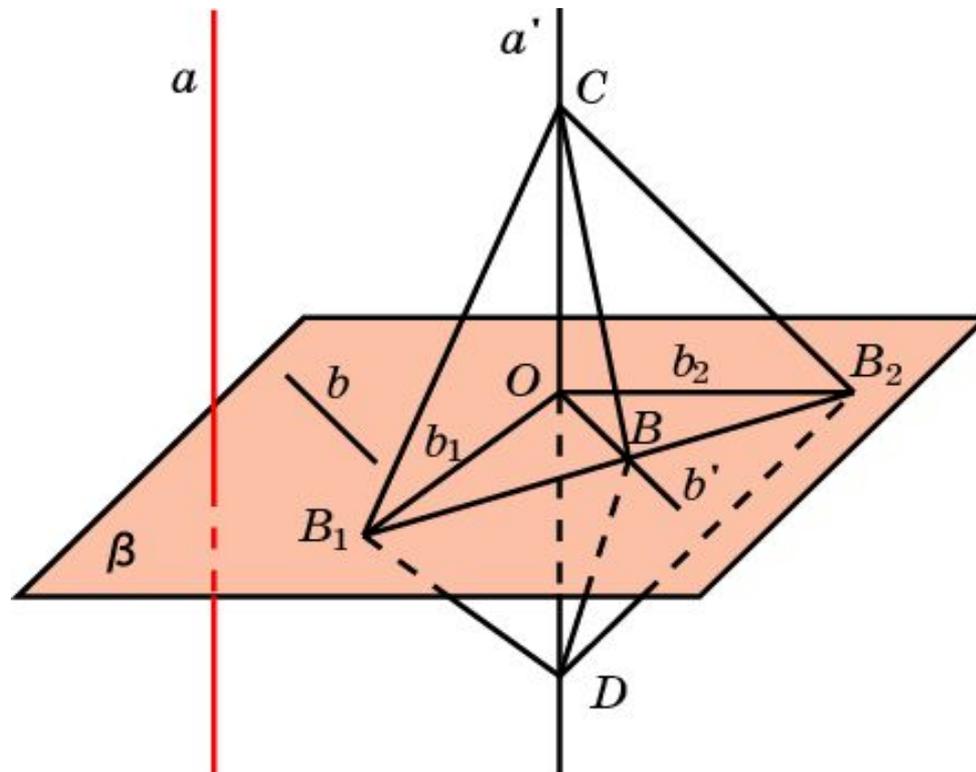


# ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая называется **перпендикулярной** плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

**Теорема.** (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.)  
Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.



## Упражнение 1

Верно ли, что если прямая перпендикулярна каким-нибудь двум прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости?

Ответ: Нет.

## Упражнение 2

Прямая параллельна плоскости. Может ли она быть перпендикулярной какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости?

Ответ: Да.

## Упражнение 3

Что представляет собой геометрическое место точек, расположенных на прямых, проходящих через данную точку на прямой и перпендикулярных этой прямой?

**Ответ:** Плоскость, перпендикулярная данной прямой.

## Упражнение 4

Как расположена относительно плоскости треугольника прямая, перпендикулярная двум его сторонам?

**Ответ:** Перпендикулярна.

## Упражнение 5

Найдите ГМТ в пространстве, равноудалённых от двух данных точек.

**Ответ:** Плоскость, проходящая через середину отрезка, концами которого являются данные точки, и перпендикулярная этому отрезку.

## Упражнение 6

При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой?

**Ответ:** Прямые перпендикулярны.

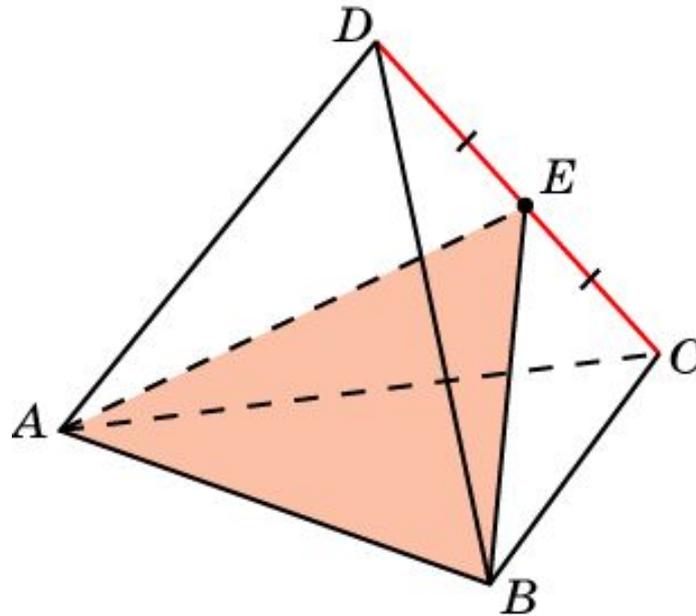
## Упражнение 7

Определите вид треугольника, если через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную другой стороне.

**Ответ:** Прямоугольный.

## Упражнение 8

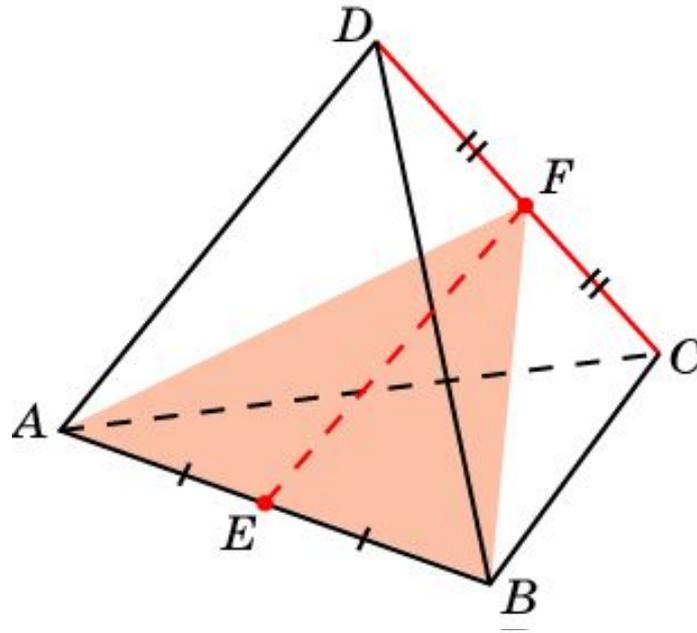
Докажите, что плоскость, проходящая через ребро  $AB$  правильного тетраэдра  $ABCD$  и точку  $H$  – середину ребра  $CD$ , перпендикулярна ребру  $CD$ .



**Доказательство:** Прямая  $CD$  перпендикулярна прямым  $AE$  и  $BE$ . Следовательно, она перпендикулярна плоскости  $ABE$ .

## Упражнение 9

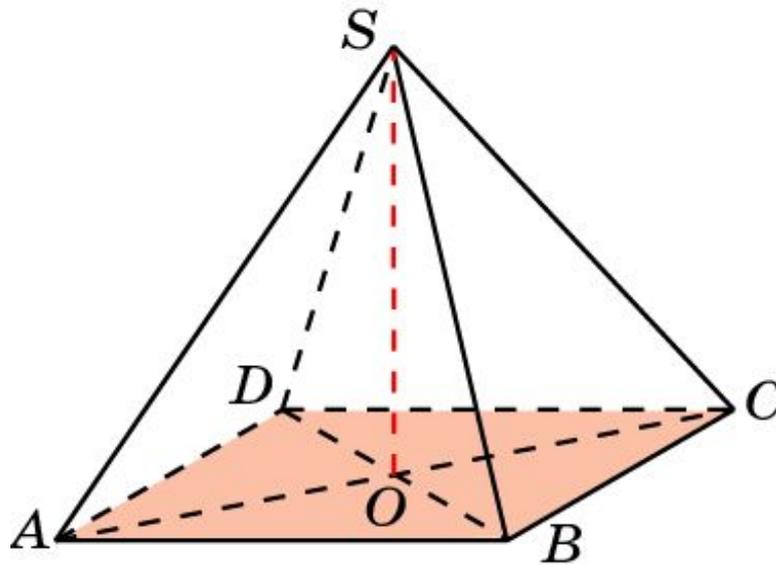
Докажите, что отрезок  $EF$ , соединяющий середины противоположных ребер  $AB$  и  $CD$  правильного тетраэдра  $ABCD$ , перпендикулярен ребру  $CD$ .



**Доказательство:** В силу предыдущей задачи, прямая  $CD$  перпендикулярна плоскости  $ABF$ . Следовательно, она перпендикулярна прямой  $EF$ , лежащей в этой плоскости.

## Упражнение 10

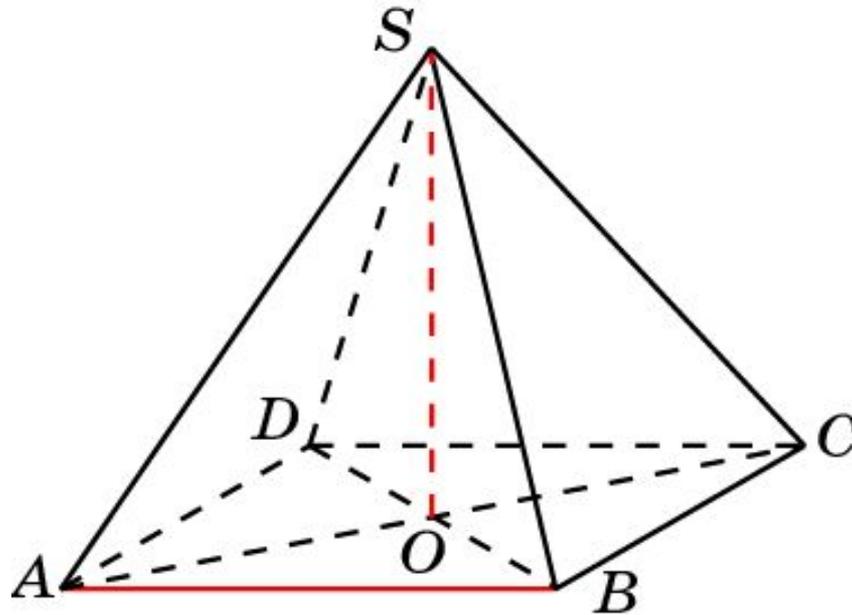
Докажите, что прямая  $SO$ , проходящая через вершину  $S$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  и точку  $O$  пересечения диагоналей основания, перпендикулярна плоскости основания  $ABCD$ .



**Доказательство:** Треугольник  $ACS$  равнобедренный,  $SO$  – медиана. Следовательно, прямая  $SO$  перпендикулярна  $AC$ . Аналогично, прямая  $SO$  перпендикулярна  $BD$ . В силу признака перпендикулярности прямой и плоскости, прямая  $SO$  перпендикулярна плоскости  $ABCD$ .

## Упражнение 11

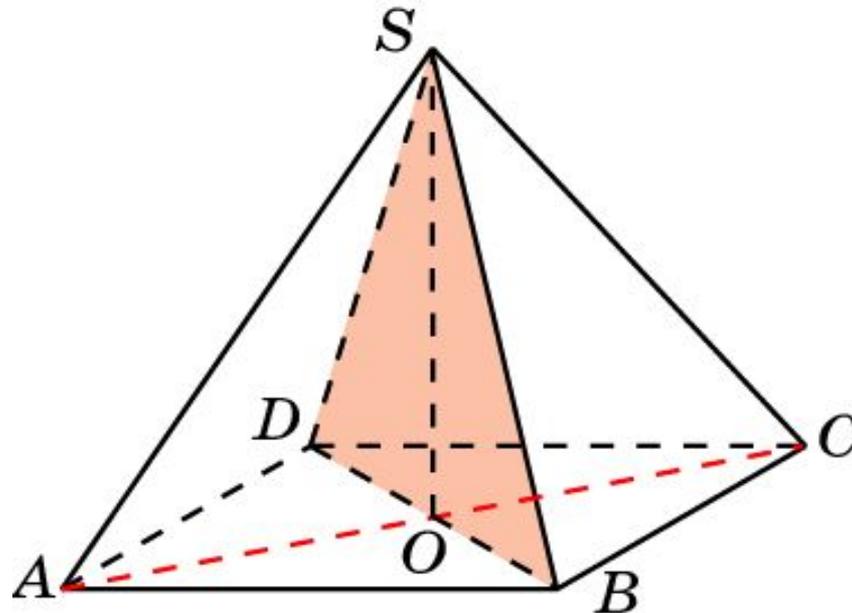
Докажите, что прямая  $SO$ , проходящая через вершину  $S$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  и точку  $O$  пересечения диагоналей основания, перпендикулярна прямой  $AB$ .



**Доказательство:** В силу предыдущей задачи, прямая  $SO$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В частности, она перпендикулярна прямой  $AB$ .

## Упражнение 12

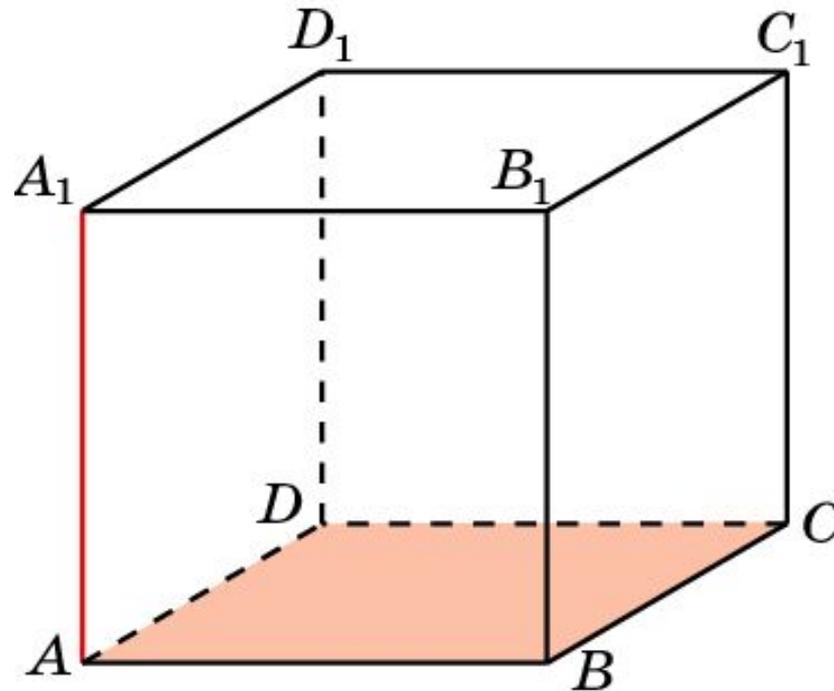
Докажите, что прямая  $AC$ , проходящая через вершины правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$ , перпендикулярна плоскости  $SBD$ .



**Доказательство:** Прямая  $AC$  перпендикулярна прямым  $BD$  и  $SO$ . Следовательно, она перпендикулярна плоскости  $SBD$ .

## Упражнение 13

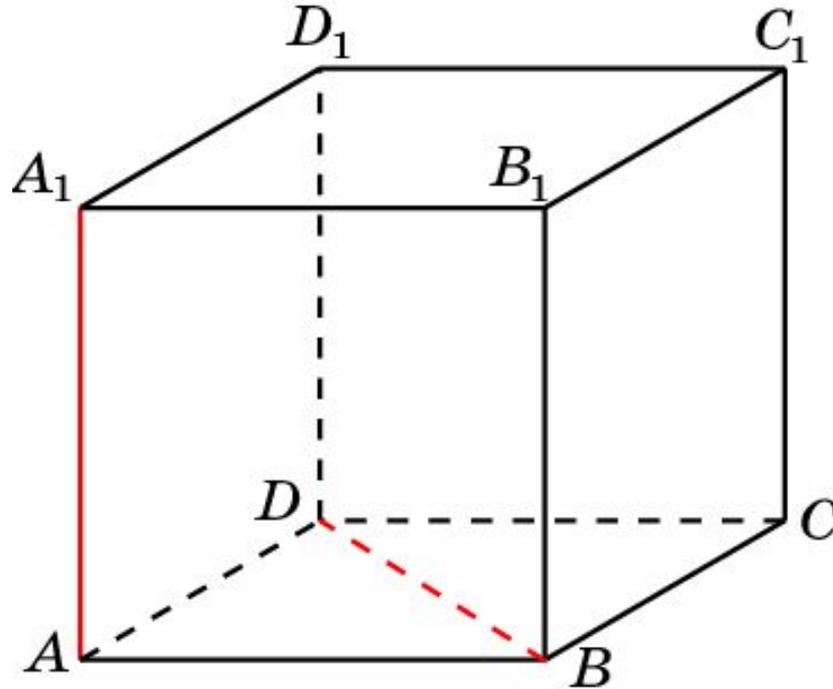
Докажите, что прямая  $AA_1$ , проходящая через вершины куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .



**Доказательство.** Прямая  $AA_1$  перпендикулярна прямым  $AB$  и  $AD$ . Следовательно, она перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

## Упражнение 14

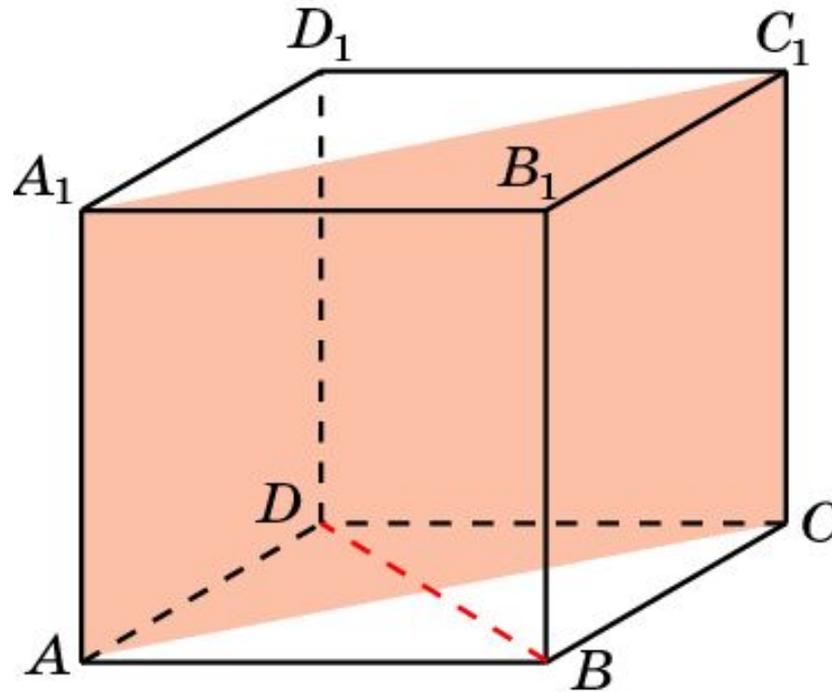
Докажите, что прямые  $AA_1$  и  $BD$ , проходящие через вершины куба  $ABCD, B_1, C_1, D_1$ , перпендикулярны.



**Доказательство.** В силу предыдущей задачи, прямая  $AA_1$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В частности, она перпендикулярна прямой  $BD$ .

## Упражнение 15

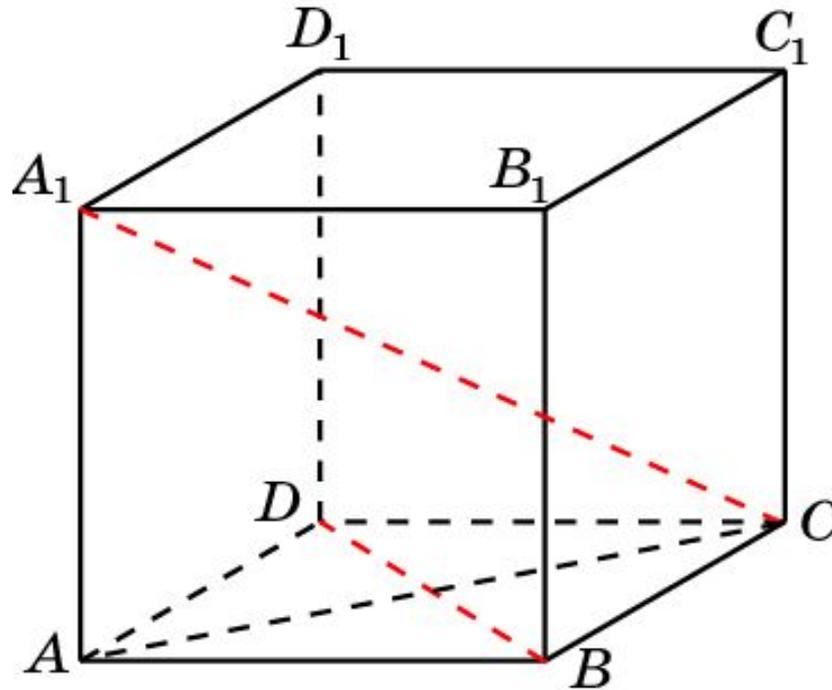
Докажите, что прямая  $BD$ , проходящая через вершины куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  перпендикулярна плоскости  $ACC_1$ .



**Доказательство.** Прямая  $BD$  перпендикулярна прямым  $AA_1$  и  $AC$ . Следовательно, она перпендикулярна плоскости  $ACC_1$ .

## Упражнение 16

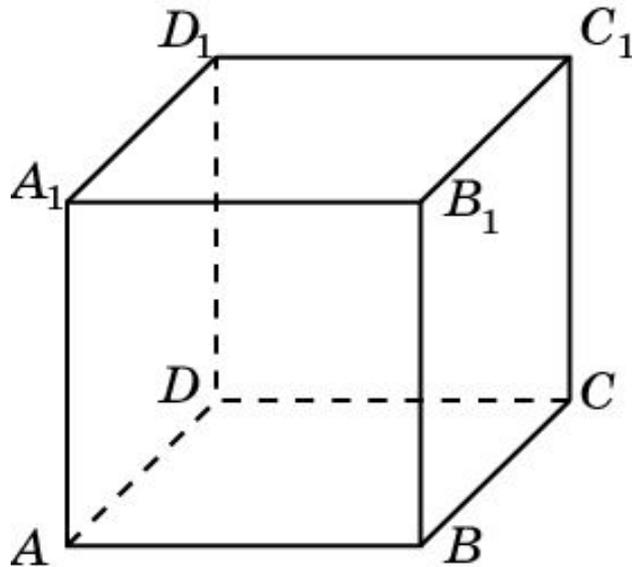
Докажите, что прямые  $CA_1$  и  $BD$ , проходящие через вершины куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , перпендикулярны.



**Доказательство.** В силу предыдущей задачи, прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $AA_1C$ . Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В частности, она перпендикулярна прямой  $CA_1$ .

## Упражнение 17

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  укажите прямые, проходящие через вершины куба, перпендикулярные плоскости: а)  $ABC$ ; б)  $BCC_1$ ; в)  $BCC_1 D_1$ .



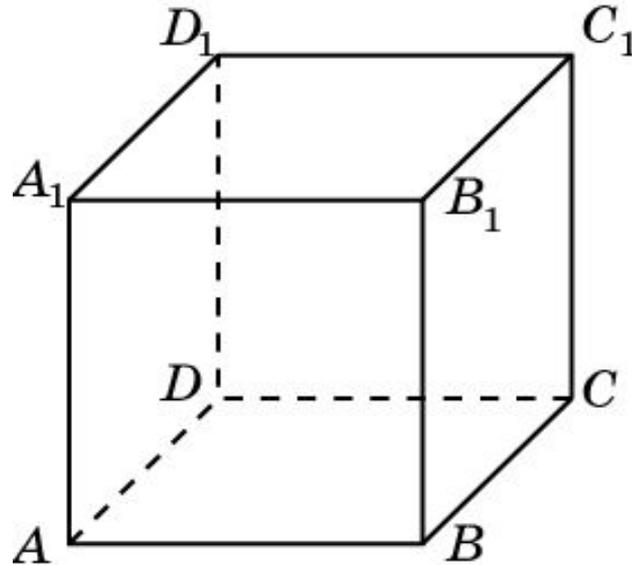
**Ответ:** а)  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ ;

б)  $AB, CD, A_1B_1, C_1D_1$ ;

в)  $AB_1, DC_1$ .

## Упражнение 18

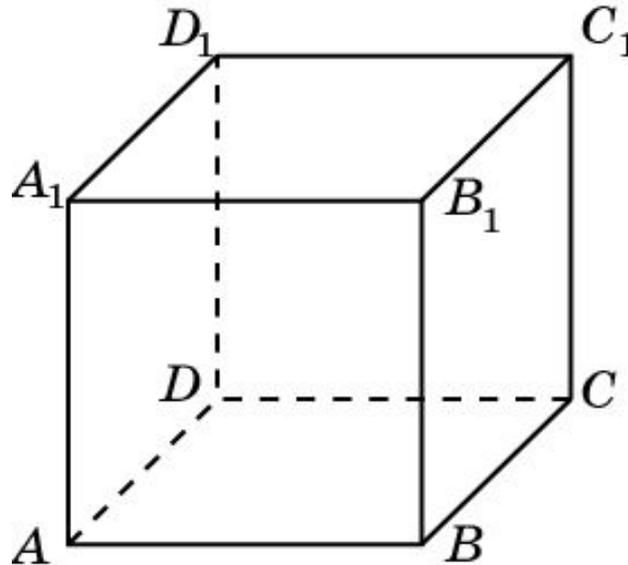
В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  укажите плоскости, проходящие через вершины куба, перпендикулярные прямой: а)  $AA_1$ ; б)  $AB_1$ ; в)  $AC_1$ .



**Ответ:** а)  $ABC, A_1 B_1 C_1$ ;  
б)  $BCD_1$ .  
в)  $BDA_1, CB_1 D_1$ .

## Упражнение 19

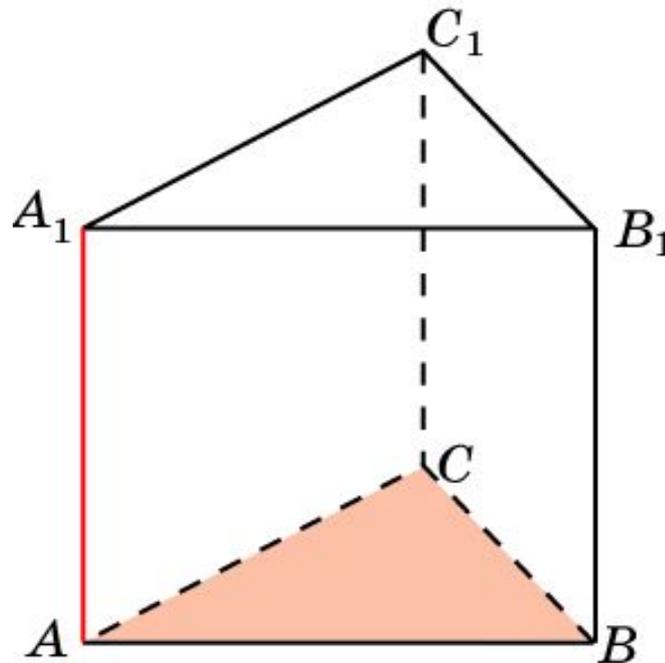
Сколько имеется пар перпендикулярных прямых и плоскостей, содержащих ребра куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ?



**Решение:** Для каждого ребра имеется две грани, ей перпендикулярные. У куба имеется 12 ребер. Следовательно, искомое число пар перпендикулярных прямых и плоскостей равно 24.

## Упражнение 20

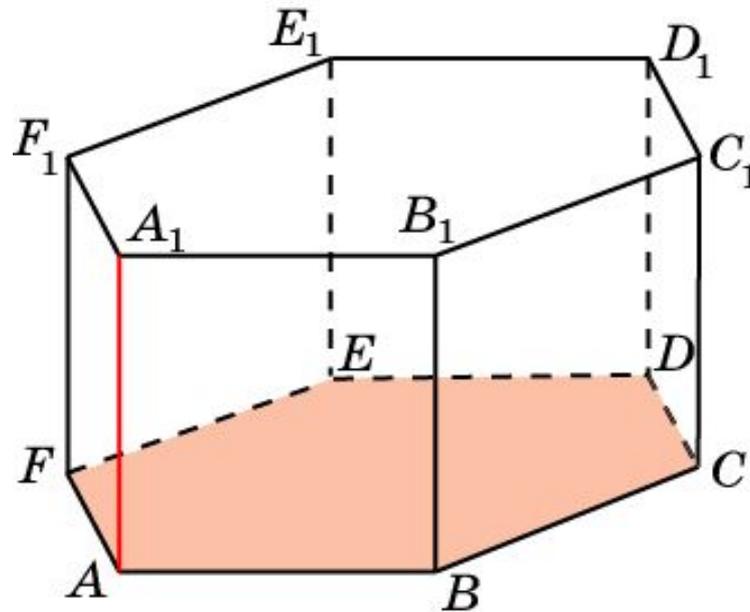
Докажите, что прямая  $AA_1$ , проходящая через вершины правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , перпендикулярна плоскости  $ABC$ .



**Доказательство.** Прямая  $AA_1$  перпендикулярна прямым  $AB$  и  $AC$ . Следовательно, она перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

## Упражнение 21

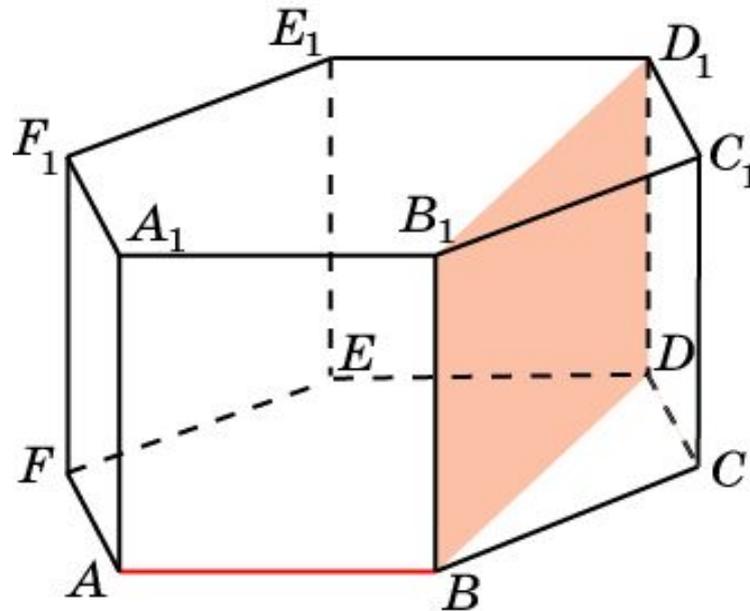
Докажите, что прямая  $AA_1$ , проходящая через вершины правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , перпендикулярна плоскости  $ABC$ .



**Доказательство.** Прямая  $AA_1$  перпендикулярна прямым  $AB$  и  $AC$ . Следовательно, она перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

## Упражнение 22

Докажите, что прямая  $AB$ , проходящая через вершины правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , перпендикулярна плоскости  $BDD_1$ .

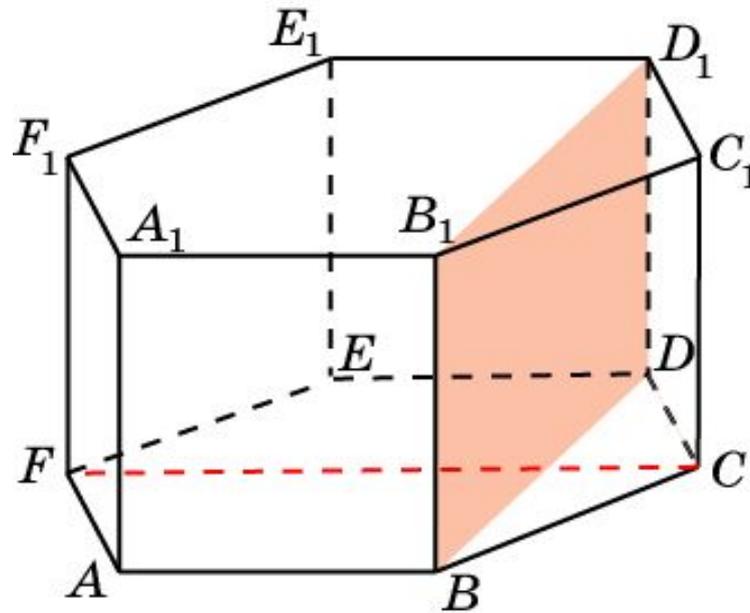


**Доказательство.** Прямая  $AB$  перпендикулярна прямым  $BB_1$  и  $BD$ . Следовательно, она перпендикулярна плоскости  $BDD_1$ .



## Упражнение 24

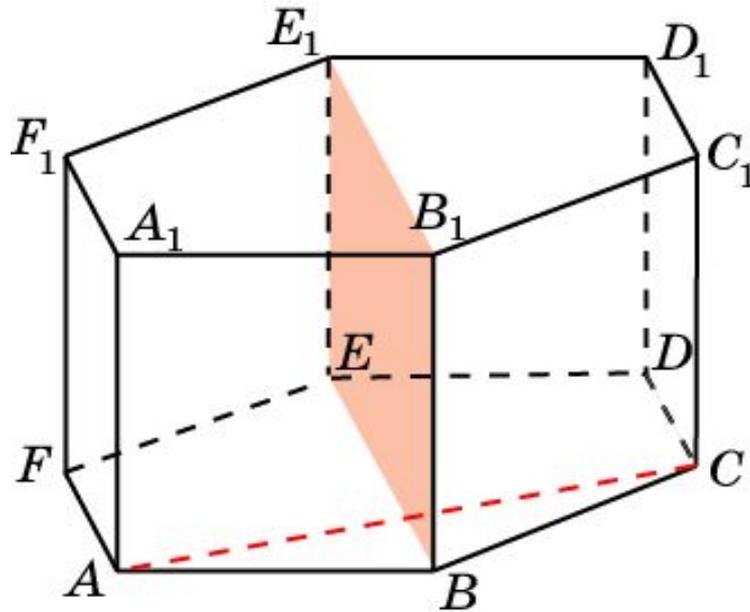
Докажите, что прямая  $CF$ , проходящая через вершины правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , перпендикулярна плоскости  $BDD_1$ .



**Доказательство.** Прямая  $CF$  параллельна прямой  $AB$ , которая перпендикулярна плоскости  $BDD_1$ . Следовательно, прямая  $CF$  также перпендикулярна плоскости  $BDD_1$ .

## Упражнение 25

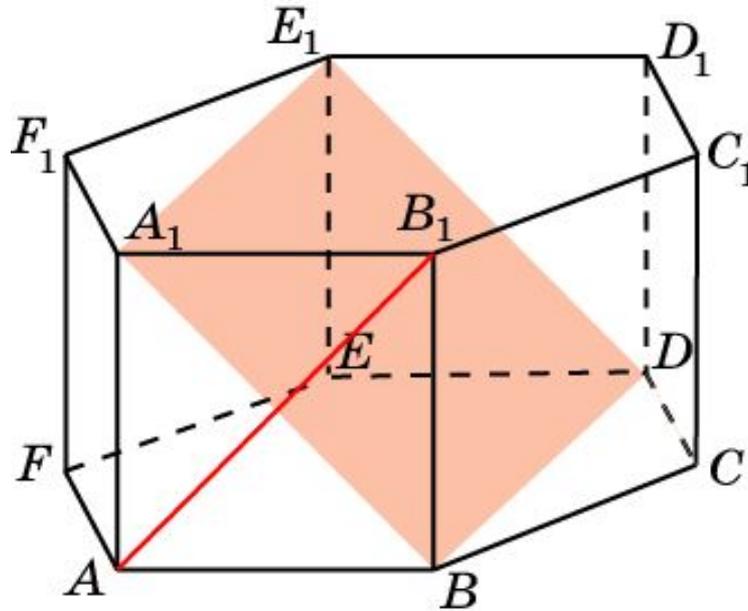
Докажите, что прямая  $AC$ , проходящая через вершины правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , перпендикулярна плоскости  $BEE_1$ .



**Доказательство.** Прямая  $AC$  перпендикулярна прямым  $BE$  и  $BB_1$ . Следовательно, она перпендикулярна плоскости  $BEE_1$ .

## Упражнение 26

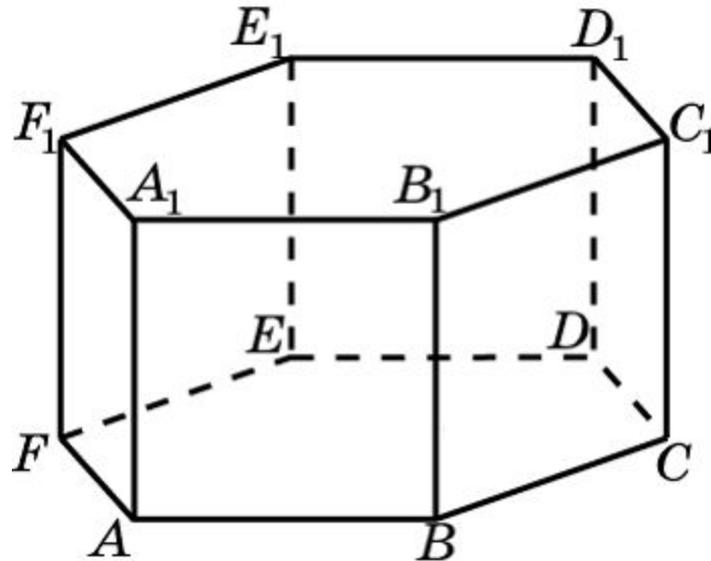
Докажите, что прямая  $AB_1$ , проходящая через вершины правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , перпендикулярна плоскости  $BDE_1$ .



**Доказательство.** Прямая  $AB_1$  перпендикулярна прямым  $BA_1$  и  $BD$ . Следовательно, прямая  $AB_1$  перпендикулярна плоскости  $BDE_1$ .

## Упражнение 27

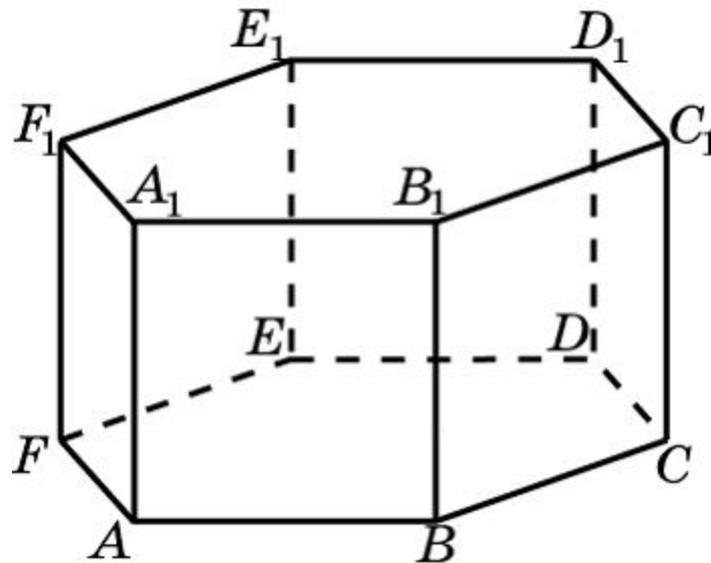
В правильной шестиугольной призме назовите плоскости, проходящие через ребра призмы и перпендикулярные прямой: а)  $AA_1$ ; б)  $AB$ ; в)  $AB_1$ .



- Ответ:** а)  $ABC, A_1B_1C_1$ ;  
б)  $AEE_1; BDD_1$ ;  
в)  $BDE_1$ .

## Упражнение 28

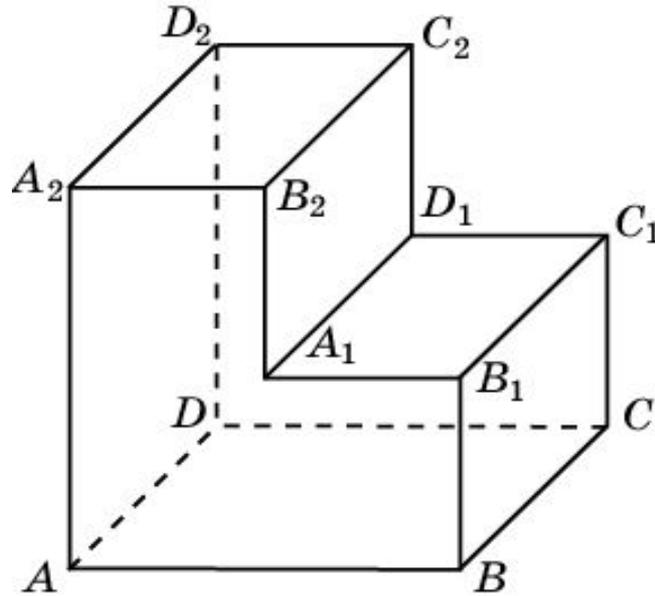
В правильной шестиугольной призме назовите прямые, проходящие через вершины призмы и перпендикулярные плоскости: а)  $ABB_1$ ; б)  $ACC_1$ ; в)  $ADD_1$ .



- Ответ:** а)  $AE, BD, A_1E_1, B_1D_1$ ;  
б)  $AF, CD, BE, A_1F_1, C_1D_1, B_1E_1$ ;  
в)  $BF, CE, B_1F_1, C_1E_1$ .

## Упражнение 29

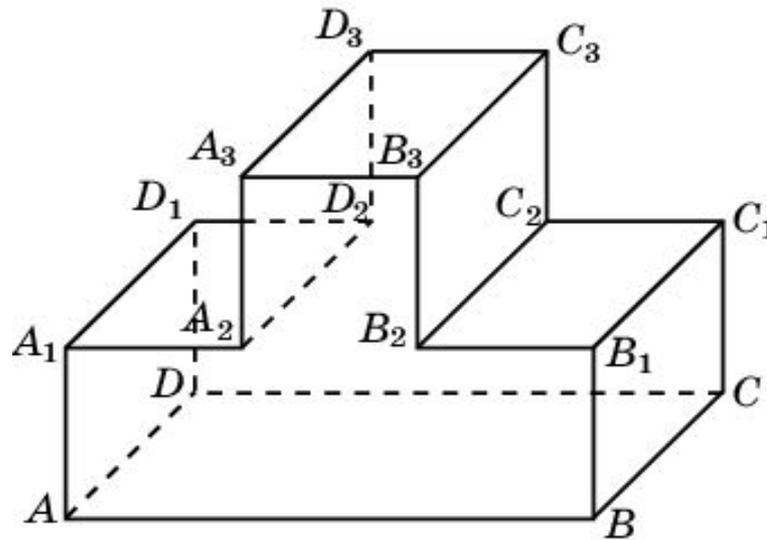
Назовите прямые, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, перпендикулярные плоскости  $ABC$ .



**Ответ.**  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, A_1B_2; D_1C_2$ .

## Упражнение 30

Назовите прямые, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, перпендикулярные плоскости  $ADD_1$ .



**Ответ.**  $AB, DC, A_1A_2, D_1D_2, A_3B_3, D_3C_3$ .