
Использование Диофантовых уравнений при решении задач в математике и химии

Цель:

Рассмотреть использование
неопределенных уравнений
при решении задач
в математике и химии



Диофант
Александрийский

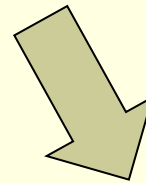
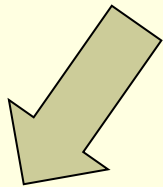
-древнегреческий
математик
живший в
III веке.

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Ответ: 84 года

Виды Диофантовых уравнений

1-ой степени



$$ax+by=c$$

$$ax+by+cz=d$$

Однородное уравнение

в целых числах

В уравнении $ax+by=c$, если $c=0$, то оно называется однородным уравнением и имеет вид $ax+by=0$.

Это уравнение имеет бесконечное множество решений в целых числах.

Теорема

Если числа a и b - взаимно простые, то уравнение вида $ax+by=0$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

Доказательство:

Рассмотрим уравнение $80x+126y=0$

Разложим коэффициенты $a = 80$ и $b=126$ на простые множители:

$a = 2^4 * 5$ и $b= 2 * 3 * 7$. После сокращения на 2 мы получим уравнение

$40x+63y=0, (1)$ 40 и 63- взаимно простые числа

Перепишем уравнение (1) в виде:

$$2^4 * 5 * x = -3 * 2 * 7 * y. (2)$$

$$y = 2^3 * 5 * u = 40u, (3)$$

$$x = 3 * 2 * 7 * v = 63v, (4) \quad u=-v$$

все пары $(u; -u)$ вида $(-n; n)$

уравнения (2) можно записать в виде: $x = 63n, y = -40n$

При $n=1, (63; -40)$, при $n=2, (126; -80)$ и т.д.

Однородное уравнение в целых числах в случае когда $c \neq 0$

$$4x - 6y = 17$$

Это уравнение не будет иметь решений т.к. 4 и 6-кратны 2, а 17 не кратно 2

$$4x - 6y = 18, \quad 2x - 3y = 9, \quad x = (9 + 3y)/2,$$

выделим целую часть из полученной дроби и представим x в виде целой дробной части.

$$X = y + 4 + (y + 1)/2 \quad (y + 1)/2 - \text{является целым числом}$$

Пусть $(y + 1)/2 = n$, где n - целое.

$$y = 2n - 1$$

$$X = 2n - 1 + 4 + (2n - 1 + 1)/2$$

$$X = 3n + 3$$

Ответ: $x = 3n + 3; 2n - 1$, где $n \in \mathbb{Z}$

Задача «Покупки»

Отправляясь за покупками, я имел в кошельке около 15 рублей

~~отдельными рублями и 20-ти копеечными монетами.~~

Возвратившись, я принес столько отдельных рублей, сколько было у меня первоначально 20-ти копеечных монет, и столько 20-ти копеечных, сколько имел я раньше отдельных рублей. Всего же уцелела у меня в кошельке треть той суммы, с какой я отправлялся за покупками.

Сколько стоили покупки?

X- первоначальное у- 20-ти копеечные монеты

$100x+20y$ было до похода в магазин

$100y+20x$ стало после похода в магазин

$$100x+20y=3(100y+20x)$$

Ответ: 960 копеек

Задача по химии

Даны два сплава железа и магния массой 100г и 80г соответственно. Известно, что в первом сплаве железа в два раза больше, чем во втором, а масса магния одинакова. Установите количественный состав сплавов.

Решение:

Пусть $m(\text{Fe})_2 = x \Rightarrow m(\text{Fe})_1 = 2x$ $\text{Mg} = y$

Получим уравнения $2x + y = 100$ (1) $x + y = 80$ (2)

Выразим из 2-ого уравнения x и подставим в 1-ое уравнение.

$$2(80 - y) + y = 100$$

$$160 - 2y + y = 100$$

$$160 - y = 100$$

$$160 - 100 = y$$

$$y = 60$$

$$100 - 60 = 40 \text{ (Fe1)}$$

$$80 - 60 = 20 \text{ (Fe2)}$$

Ответ: 40г., 20г.

Выводы

Умения решать Диофантовы уравнения способствуют:

-нахождению остроумных и простых решений;

-развитию математических навыков и логического мышления;

- быстpому и правильному решению задач по другим предметам.