

Тема №6.

Системы логических уравнений (СЛУ)



**«Платон и
Аристотель»
Рафаэль Санти**

**«Платон мне друг,
но истина дороже»
Аристотель**

I. Решение логических задач

Задача 1.

Следующие два высказывания истинны:

- 1) Неверно, что если корабль А вышел в море, то корабль С — нет.
- 2) В море вышел корабль В или корабль С, но не оба вместе.

$$A \rightarrow \bar{C} = 0$$

$$A \oplus B = 1$$

Определить, какие корабли вышли в море.

Решение:

Обозначим буквами высказывания:

A — “корабль А вышел в море”,

B — “корабль В вышел в море”,

C — “корабль С вышел в море”.

$$\begin{cases} A \rightarrow \bar{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases} \quad \text{Найти значения } A, B \text{ и } C, \text{ при которых оба уравнения превращаются в истинные равенства.}$$

Способ 1. Сведение к одному уравнению

$$\begin{cases} A \rightarrow \bar{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{A} + \bar{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\bar{A} + \bar{C}} = 1 \\ A \oplus B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overline{(\bar{A} + \bar{C})} \cdot (A \oplus B) = 1 \Leftrightarrow (A \cdot C) \cdot (A \oplus B) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(A \cdot C) \cdot (\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}) = 1 \Leftrightarrow C \cdot (A \cdot \bar{A} \cdot B + A \cdot A \cdot \bar{B}) = 1 \Leftrightarrow$$

$$A \cdot \bar{B} \cdot C = 1$$

A	B	C
1	0	1

Ответ: В море вышли корабли А
и С

Способ 2. Таблица истинности

$$\begin{cases} A \rightarrow \bar{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases}$$

A	B	C	\bar{C}	$A \rightarrow \bar{C}$	$A \oplus B$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0

\Rightarrow

A	B	C
1	0	1

Способ 3. Декомпозиция

Идея:

- 1) Зафиксировать значение одной из переменных (положить ее равной 0 или 1)
- 2) Упростить уравнения
- 3) Зафиксировать значение второй переменной и т.д.

$$\begin{cases} A \rightarrow \bar{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases}$$

$$1) A = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \rightarrow \bar{C} = 0 \\ 0 \oplus B = 1 \end{cases}$$

Решений не имеет
(т.к. $1 \rightarrow 0 = 0$)

$$2) A = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \bar{C} = 0 \\ 1 \oplus B = 1 \end{cases}$$

C=1

B=0

$$\Rightarrow$$

A	B	C
1	0	1

Ответ: В море вышли корабли А
и С

Способ 4. Последовательное решение

На каждом шаге добавлять по одной переменной в рассматриваемый набор.

$$\begin{cases} A \rightarrow \bar{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases}$$

Будем вводить переменные в алфавитном порядке:

$$\begin{cases} A \oplus B = 1 \\ A \rightarrow \bar{C} = 0 \end{cases}$$

Строим дерево решений

1-е ур-е:



A
0
1

2-е ур-е:



A	B
0	1
1	0



A	B	C
1	0	1

III. Замена переменных

Сколько решений имеет уравнение $(A \rightarrow B) + (C \rightarrow D) = 1$

Решение:

Пусть: $X = A \rightarrow B$ и $Y = C \rightarrow D$

Тогда уравнение принимает вид: $X + Y = 1$ (*)

Решение уравнения (*): $(0; 1), (1; 0), (1; 1)$

$(0;1)$	$(1;0)$	$(1;1)$
$A \rightarrow B = 0$	$A \rightarrow B = 1$	$A \rightarrow B = 1$
1 решение: $(1,0)$	3 решения: $(0,1), (0,0), (1,1)$	$C \rightarrow D = 1$ Каждое уравнение имеет по 3 решения: $(0,1), (0,0), (1,1)$
$C \rightarrow D = 1$	$C \rightarrow D = 0$	
3 решения: $(0,1), (0,0), (1,1)$	1 решение: $(1,0)$	
Всего решений: $1 \cdot 3 = 3$	Всего решений: $1 \cdot 2 = 2$	Всего решений: $3 \cdot 3 = 9$

В данном случае не самый рациональный подход

Ответ: $3+3+9=15$

«Решение обратной задачи»

Сколько решений имеет уравнение $(A \rightarrow B) + (C \rightarrow D) = 1$

Решение:

Обратная задача:

$$(A \rightarrow B) + (C \rightarrow D) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bar{A} + B + \bar{C} + D = 0 \Leftrightarrow$$

A	B	C	D
1	0	1	0

Одно решение

⇒

Исходное уравнение имеет $2^4 - 1 = 15$ решений

IV. Количество решений

Задачи, содержащие импликацию

$$\begin{cases} \overline{X_1} + X_2 = 1 \\ \overline{X_2} + X_3 = 1 \\ \dots \\ \overline{X_{m-1}} + X_m = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (X_1 \rightarrow X_2) \cdot (X_2 \rightarrow X_3) \cdot \dots \cdot (X_{m-1} \rightarrow X_m) = 1$$

Будем решать систему последовательно

Уравнение		Значения переменных					N
1	X_1						
	X_2						3
2	X_3						4
3	X_4						5
4	X_5						6
$m - 1$	X_m						$m + 1$

№1. Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{cases} X_1 + \overline{X_2} = 1 \\ X_2 + \overline{X_3} = 1 \\ \dots \\ X_9 + \overline{X_{10}} = 1 \end{cases}$$

Решение:

Проведем замену переменных

$$Y_i = \overline{X_i}, \quad i = \overline{1, 10}$$

$$\begin{cases} \overline{Y_1} + Y_2 = 1 \\ \overline{Y_2} + Y_3 = 1 \\ \dots \\ \overline{Y_9} + Y_{10} = 1 \end{cases}$$

СЛУ имеет 11 решений
(см. предыдущую задачу)

Ответ: 11

№2. Сколько различных решений имеет СЛУ

$$\begin{cases} (X_1 \rightarrow X_2) \cdot (X_2 \rightarrow X_3) \cdot (X_3 \rightarrow X_4) \cdot (X_4 \rightarrow X_5) = 1 \\ (Y_1 \rightarrow Y_2) \cdot (Y_2 \rightarrow Y_3) \cdot (Y_3 \rightarrow Y_4) \cdot (Y_4 \rightarrow Y_5) = 1 \end{cases}$$

Решение:

Уравнения не зависят друг от друга \Rightarrow Их можно решать отдельно

$$(X_1 \rightarrow X_2) \cdot (X_2 \rightarrow X_3) \cdot (X_3 \rightarrow X_4) \cdot (X_4 \rightarrow X_5) = 1 \Leftrightarrow$$

Имеет **6** решений

$$\begin{cases} \overline{X_1} + X_2 = 1 \\ \overline{X_2} + X_3 = 1 \\ \overline{X_3} + X_4 = 1 \\ \overline{X_4} + X_5 = 1 \end{cases}$$

Общее количество решений:
 $6 \cdot 6 = 36$

$$(Y_1 \rightarrow Y_2) \cdot (Y_2 \rightarrow Y_3) \cdot (Y_3 \rightarrow Y_4) \cdot (Y_4 \rightarrow Y_5) = 1 \Leftrightarrow$$

Имеет **6** решений

$$\begin{cases} \overline{Y_1} + Y_2 = 1 \\ \overline{Y_2} + Y_3 = 1 \\ \overline{Y_3} + Y_4 = 1 \\ \overline{Y_4} + Y_5 = 1 \end{cases}$$

Ответ: 36

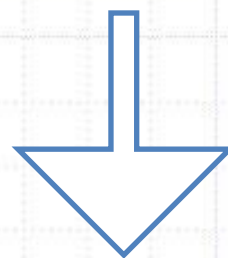
Задача 3. Найти количество решений системы

уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (X_2 \equiv X_1) + X_2 \cdot X_3 + \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 = 1 \\ (X_3 \equiv X_1) + X_3 \cdot X_4 + \bar{X}_3 \cdot \bar{X}_4 = 1 \\ \dots \\ (X_9 \equiv X_1) + X_9 \cdot X_{10} + \bar{X}_9 \cdot \bar{X}_{10} = 1 \\ (X_{10} \equiv X_1) = 0 \end{array} \right.$$

Упростим
систему

$$A \leftrightarrow B = A \wedge B + \neg A \wedge \neg B$$



$$\left\{ \begin{array}{l} (X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1 \\ (X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1 \\ \dots \\ (X_9 \equiv X_1) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1 \\ (X_{10} \equiv X_1) = 0 \end{array} \right.$$

**Будем решать
систему
последовательно**

$$\begin{cases} (X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1 \\ (X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1 \\ \dots \\ (X_9 \equiv X_1) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1 \\ \boxed{(X_{10} \equiv X_1) = 0} \end{cases}$$

В 1-ом уравнении используются три переменных: X_1, X_2, X_3
 X_1, X_2 - могут быть выбраны произвольно

При подключении к системе очередного уравнения число решений увеличивается на 2.



2 уравнения – 8 решений
...
8 уравнений – 20 решений

x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Добавляем
 X_3



x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0
1	1	1



4 - решения

6 - решений

Раздваиваются строки $X_1 = X_2$ (2) Раздваиваются строки $X_1 = X_3$ (2)

$X_1 = X_2$ (2)

$X_1 = X_3$ (2)

Ответ: 18 решений

*

Домашнее задание

1. Конспект