*

Тема №6.
Системы логических уравнений (СЛУ)

«Платон и Аристотель»
Рафаэль Санти

«Платон мне друг, но истина дороже»
Аристотель

I. Решение логических задач

Задача 1.

Следующие два высказывания истинны:

1) Неверно, что если корабль A вышел в море, то корабль C — нет.

2) В море вышел корабль B или корабль C, но не оба вместе.

Определить, какие корабли вышли в море.

$A \to \overline{C} = 0$

$A \oplus B = 1$

Решение:

Обозначим буквами высказывания:

A — “корабль A вышел в море”,

B — “корабль B вышел в море”,

C — “корабль C вышел в море”.

$$\begin{cases} A \to \overline{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases}$$

*Найти значения **A, B** и **C**, при которых оба уравнения превращаются в истинные равенства.*

Способ 1. Сведение к одному уравнению

$$\begin{cases} A \to \overline{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{A} + \overline{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\overline{A} + \overline{C}} = 1 \\ A \oplus B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(\overline{\overline{A} + \overline{C}}) \cdot (A \oplus B) = 1 \Leftrightarrow (A \cdot C) \cdot (A \oplus B) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(A \cdot C) \cdot (\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}) = 1 \Leftrightarrow C \cdot (A \cdot \overline{A} \cdot B + A \cdot A \cdot \overline{B}) = 1 \Leftrightarrow$$

$$A \cdot \overline{B} \cdot C = 1$$

A	B	C
1	0	1

Ответ: В море вышли корабли А и С

Способ 2. Таблица истинности

$$\begin{cases} A \to \overline{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases}$$

A	B	C	$\overline{C}$	$A \to \overline{C}$	$A \oplus B$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0

$\Rightarrow$

A	B	C
1	0	1

Способ 3. Декомпозиция

Идея:

1) Зафиксировать значение одной из переменных (положить ее равной 0 или 1)
2) Упростить уравнения
3) Зафиксировать значение второй переменной и т.д.

$$\begin{cases} A \to \overline{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases}$$

1) **A = 0** $\Rightarrow \begin{cases} 0 \to \overline{C} = 0 \\ 0 \oplus B = 1 \end{cases}$

Решений не имеет (т.к. 1→0=0)

2) **A = 1** $\Rightarrow \begin{cases} 1 \to \overline{C} = 0 \\ 1 \oplus B = 1 \end{cases}$

C=1

B=0

$\Rightarrow$

A	B	C
1	0	1

Ответ: В море вышли корабли А и С

Способ 4. Последовательное решение

На каждом шаге добавлять по одной переменной в рассматриваемый набор.

$$\begin{cases} A \to \overline{C} = 0 \\ A \oplus B = 1 \end{cases}$$

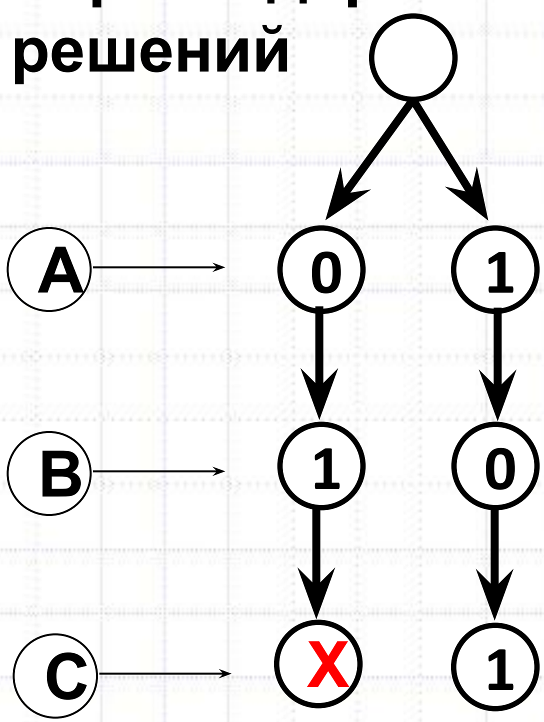
$$\begin{cases} A \oplus B = 1 \\ A \to \overline{C} = 0 \end{cases}$$

Будем вводить переменные в алфавитном порядке:

Строим дерево решений

1-е ур-е:

2-е ур-е:



A
0
1

A	B
0	1
1	0

A	B	C
1	0	1

III. Замена переменных

Сколько решений имеет уравнение $(A \to B) + (C \to D) = 1$

Решение:

Пусть: **X = A → B** и **Y = C → D**

Тогда уравнение принимает вид: **X + Y = 1** (*)

Решение уравнения (*) : **(0; 1)**, **(1; 0)**, **(1; 1)**

(0;1)	(1;0)	(1;1)
A → B = 0	**A → B = 1**	**A → B = 1**
1 решение: **(1,0)** **C → D = 1** 3 решения: **(0,1), (0,0), (1,1)** Всего решений: **1·3=3**	3 решения: **(0,1), (0,0), (1,1)** **C → D = 0** 1 решение: **(1,0)** Всего решений: **1·3=3**	**C → D = 1** Каждое уравнение имеет по 3 решения: **(0,1), (0,0), (1,1)** Всего решений: **3·3=9**

Ответ: **3+3+9=15**

В данном случае не самый рациональный подход

«Решение обратной задачи»

Сколько решений имеет уравнение $(A \to B) + (C \to D) = 1$

Решение:

Обратная задача:

$$(A \to B) + (C \to D) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\overline{A} + B + \overline{C} + D = 0 \quad \Leftrightarrow$$

A	B	C	D
1	0	1	0

Одно решение

$\Rightarrow$

Исходное уравнение имеет **2^4 – 1 = 15** решений

IV. Количество решений

Задачи, содержащие импликацию

$$\begin{cases} \overline{X_1} + X_2 = 1 \\ \overline{X_2} + X_3 = 1 \\ \dots \\ \overline{X_{m-1}} + X_m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (X_1 \to X_2) \cdot (X_2 \to X_3) \cdot \quad \dots \quad \cdot (X_{m-1} \to X_m) = 1$$

Будем решать систему последовательно

Уравнение		Значения переменных	N
1	X_1	0 1	
	X_2	0 1 1	3
2	X_3	0 1 1 1	4
3	X_4	0 1 1 1 1	5
4	X_5	0 1 1 1 1 1	6
m - 1	X_m		m + 1

№1. Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{cases} X_1 + \overline{X_2} = 1 \\ X_2 + \overline{X_3} = 1 \\ \dots \\ X_9 + \overline{X_{10}} = 1 \end{cases}$$

Решение:

Проведем замену переменных

$$Y_i = \overline{X_i}, \quad i = \overline{1,10}$$

$$\begin{cases} \overline{Y_1} + Y_2 = 1 \\ \overline{Y_2} + Y_3 = 1 \\ \dots \\ \overline{Y_9} + Y_{10} = 1 \end{cases}$$

СЛУ имеет 11 решений

(см. предыдущую задачу)

Ответ: **11**

№2. Сколько различных решений имеет СЛУ

$$\begin{cases}(X_1 \to X_2)\cdot(X_2 \to X_3)\cdot(X_3 \to X_4)\cdot(X_4 \to X_5)=1\\(Y_1 \to Y_2)\cdot(Y_2 \to Y_3)\cdot(Y_3 \to Y_4)\cdot(Y_4 \to Y_5)=1\end{cases}$$

Решение:

Уравнения не зависят друг от друга ⇒ Их можно решать отдельно

$$(X_1 \to X_2)\cdot(X_2 \to X_3)\cdot(X_3 \to X_4)\cdot(X_4 \to X_5)=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{X_1}+X_2=1\\\overline{X_2}+X_3=1\\\overline{X_3}+X_4=1\\\overline{X_4}+X_5=1\end{cases}$$

Имеет **6** решений

Общее количество решений:
6·6=**36**

$$(Y_1 \to Y_2)\cdot(Y_2 \to Y_3)\cdot(Y_3 \to Y_4)\cdot(Y_4 \to Y_5)=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{Y_1}+Y_2=1\\\overline{Y_2}+Y_3=1\\\overline{Y_3}+Y_4=1\\\overline{Y_4}+Y_5=1\end{cases}$$

Имеет **6** решений

Ответ: **36**

Задача 3. Найти количество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} (X_2 \equiv X_1) + X_2 \cdot X_3 + \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3 = 1 \\ (X_3 \equiv X_1) + X_3 \cdot X_4 + \overline{X}_3 \cdot \overline{X}_4 = 1 \\ \ldots \\ (X_9 \equiv X_1) + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X}_9 \cdot \overline{X}_{10} = 1 \\ (X_{10} \equiv X_1) = 0 \end{cases}$$

Упростим систему

$$A \leftrightarrow B = A \wedge B + \neg A \wedge \neg B$$

$$\begin{cases} (X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1 \\ (X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1 \\ \ldots \\ (X_9 \equiv X_1) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1 \\ (X_{10} \equiv X_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1 \\ (X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1 \\ \dots \\ (X_9 \equiv X_1) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1 \\ \boxed{(X_{10} \equiv X_1) = 0} \end{cases}$$

Будем решать систему последовательно

В 1-ом уравнении используются три переменных: **X_1, X_2, X_3**

X_1, X_2 - могут быть выбраны произвольно

X_1	X_2
0	0
0	1
1	0
1	1

4 - решения

Добавляем **X_3**

$\Rightarrow$

X_1	X_2	X_3
0	0	0
		1
0	1	1
1	0	0
1	1	0
		1

6 - решений

$\Rightarrow$

При подключении к системе очередного уравнения число решений увеличивается на 2.

2 уравнения – 8 решений

…

8 уравнений – 20 решений

Раздваиваются строки $X_1 = X_2$ (2)

Раздваиваются строки $X_1 = X_3$ (2)

Ответ: 18 решений

*

Домашнее задание

1. Конспект