МЕТОД СТРЕЛЬБЫ (ПРИСТРЕЛКИ).

Подготовила Бушуева Наталья

При численном решении краевой задачи предполагается, что у неё существует единственное решение, и погрешность вычисленного решения имеет такой же порядок, как и неизбежные ошибки вычислений. Заметим, однако, что условия теорем существования и единственности трудно проверять, особенно, если система дифференциальных уравнений нелинейная.

Надо иметь в виду, что для заданной корректно поставленной краевой задачи условия существования и единственности могут нарушаться из-за неизбежных ошибок округления. Это приводит к большой потери точности или к отсутствию сходимости у рассматриваемых ниже алгоритмов.

Метод стрельбы состоит в сведении краевой задачи к задаче Коши, для решения которой существует много приближенных методов, позволяющих получать результат с гарантированной точностью.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y').$

Простейшие краевые условия (первого рода) имеют вид

$$\begin{cases} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta. \end{cases}$$

Будем предполагать, что решение краевой задачи существует и единственно на отрезке [а, Ь] и обладает необходимой гладкостью.

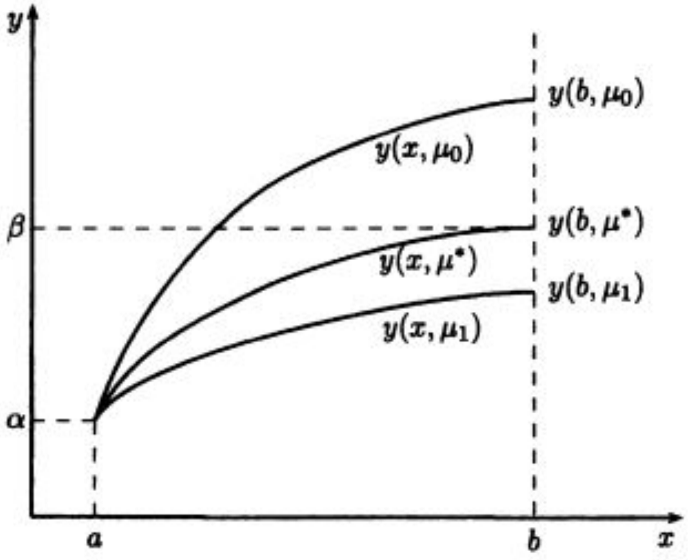
Рассмотрим метод, который позволяет свести решение краевой задачи к решению задачи Коши и нелинейного уравнения. Введем параметр /x и рассмотрим вспомогательную задачу Коши.

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = \mu. \end{cases}$$

Теперь нужно подобрать параметр $\mu = \mu^*$, чтобы выполнялось условие

$$y(b, \mu^*) = \beta,$$

для этого нужно решить нелинейное уравнение, что также можно сделать численными методами. Эта методика решения краевых задач называется методом стрельбы.



y
$y(b, \mu_0)$
$y(x, \mu_0)$
β
$y(b, \mu^*)$
$y(x, \mu^*)$
$y(b, \mu_1)$
$y(x, \mu_1)$
α
a
b
x

Метод стрельбы представляет собой пару вложенных методов: внешний — для решения нелинейного уравнения, внутренний — для решения задачи Коши (например, метод деления отрезка по полам и явный метод Эйлера).

Особый интерес представляет алгоритм в случае, когда применяется метод Ньютона для решения нелинейного уравнения. Обозначим $F(\mu) = y(b, \mu) - \beta,$

тогда метод Ньютона состоит в вычислениях по алгоритму $\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{F(\mu_k)}{F'(\mu_k)},$

поэтому необходимо на каждом шаге получить $F'(\mu_k) = y'_\mu(b, \mu_k).$

Для того чтобы вычислить эту величину, воспользуемся уравнением в вариациях. В предположении достаточной гладкости продифференцируем уравнения задачи Коши по μ:

$$\begin{cases} y'''_{xx\mu}(x,\mu) = f'_y y'_\mu + f'_{y'} y''_{x\mu} \\ y'_\mu(a,\mu) = 0 \\ y''_{x,\mu}(a,\mu) = 1. \end{cases}$$

Обозначим $z(x,\mu) = y'_\mu(x,\mu),$ тогда получаем задачу Коши для линейного уравнения второго порядка

$$
\begin{cases}
z''_{xx} = f'_y z + f'_{y'} z'_x \\
z(a, \mu) = 0 \\
z'_x(a, \mu) = 1.
\end{cases}
$$

Таким образом, метод стрельбы с применением метода Ньютона сводит решение краевой задачи к решению двух вложенных задач Коши.