

Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

§ 21. Упрощение логических выражений

Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции $\oplus \rightarrow \leftrightarrow$ на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

Шаг 3. Используя законы логики, упростить выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

Задачи

Задач 1

Для какого из указанных значений X истинно

высказывание $\neg((X > 2) \rightarrow (X > 3))$?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

$$\overline{(X > 2) \rightarrow (X > 3)}$$

$$\overline{(X > 2) \rightarrow (X > 3)} = 1 \Rightarrow (X > 2) \rightarrow (X > 3) = 0$$

$$A \rightarrow B = 0 \Rightarrow A = 1, B = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} X > 2 \\ X \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow X = 3$$

Задач 2 На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 29]$ и $Q = [13, 18]$.

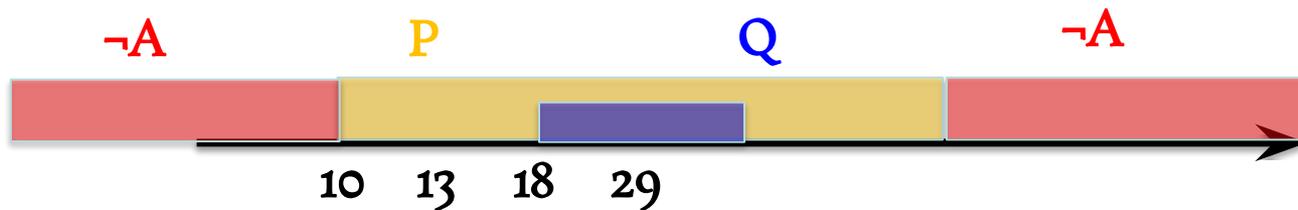
Укажите наибольшую возможную длину отрезка A , для которого выражение

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

Пусть $P=(x \in P)$, $A=(x \in A)$; $Q=(x \in Q)$, тогда

$$(A \rightarrow P) + Q = \neg A + P + Q = 1$$



$$\Rightarrow A = P + Q$$

Ответ: 19.

Задач 3

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [4, 15]$ и $Q = [12, 20]$.

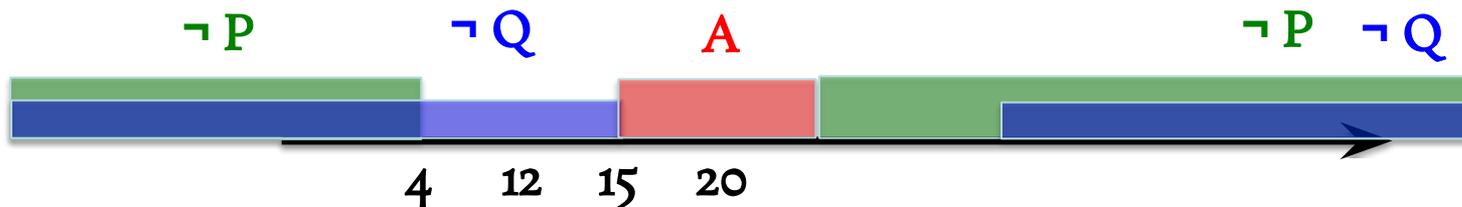
Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A , что логическое выражение

$$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

Пусть $P=(x \in P)$, $A=(x \in A)$; $Q=(x \in Q)$, тогда

$$(P * Q) \rightarrow A = \neg(P * Q) + A = \neg P + \neg Q + A \Rightarrow$$



$$\Rightarrow A = \neg(\neg P + \neg Q) = P * Q$$

Ответ: 3.

Задач 4

Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \rightarrow (((x \in \{4, 8, 12, 116\}) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x .

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A .

1. обозначим отдельные высказывания буквами:

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}; Q = \{4, 8, 12, 116\}$$

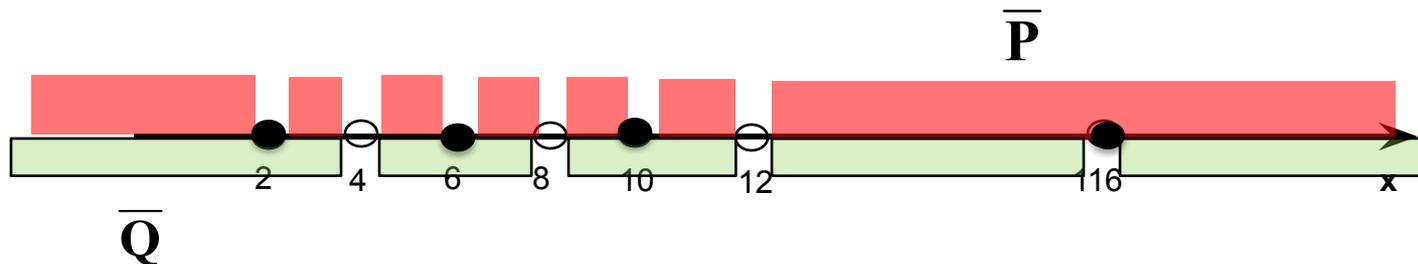
$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

2. перейдем к более простым обозначениям: $P \rightarrow (Q \cdot \bar{A} \rightarrow \bar{P}) = 1$

3. раскрываем обе импликации по формуле :

$$P \rightarrow (\bar{Q} \cdot \bar{A} + \bar{P}) = \bar{P} + \bar{Q} \cdot \bar{A} + \bar{P} = \bar{Q} \cdot \bar{A} + \bar{P} = 1$$

4. теперь используем закон де Моргана : $\bar{Q} + A + \bar{P} = 1$



5. для множеству A обязательно должны принадлежать числа 4, 8, 12