Логические основы компьютеров

§ 21. Упрощение логических выражений

Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, \quad A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, \quad A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции $\oplus \rightarrow \leftrightarrow$ на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

$$A \rightarrow B = \overline{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 3. Используя законы логики, упрощать выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

Логические основы компьютеров

Задачи

Задач 1

Для какого из указанных значений X истинно высказывание **¬((X > 2)→(X > 3))**?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

$$\overline{(X>2)\to(X>3)}$$

$$\overline{(X>2)\to(X>3)}=1 \quad\Rightarrow\quad (X>2)\to(X>3)=0$$

$$A\to B=0 \quad\Rightarrow\quad A=1,\ \ B=0$$

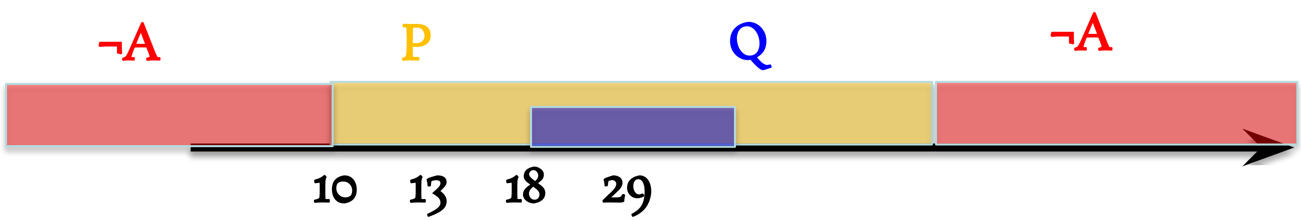
$$\left.\begin{matrix} X>2 \\ X\le 3 \end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad X=3$$

Задач 2 На числовой прямой даны два отрезка: P = [10, 29] и Q = [13, 18]. Укажите наибольшую возможную длину отрезка A, для которого выражение

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Пусть P=(x∈P), A=(x∈A); Q=(x∈Q), тогда
(A→P)+Q= ¬A+P+Q=1



⇒ A=P+Q

Ответ: 19.

Задач 3

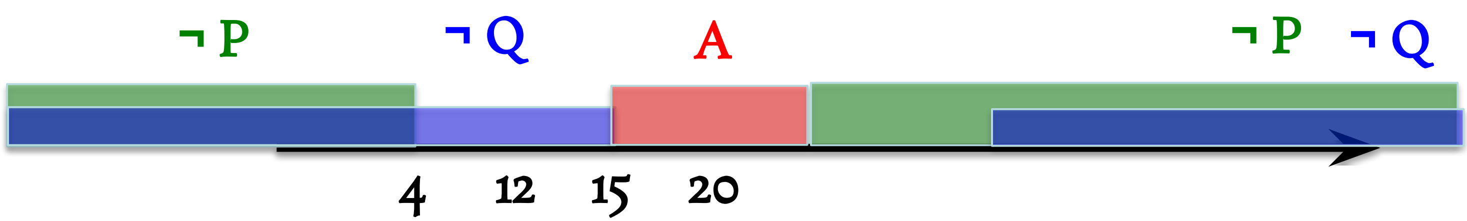
На числовой прямой даны два отрезка: P = [4, 15] и Q = [12, 20].
Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что логическое выражение

$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Пусть P=(x∈P), A=(x∈A); Q=(x∈Q), тогда

(P * Q) → A = ¬(P * Q) + A = ¬P+¬Q + A⇒



⇒A=¬(¬P+¬Q))=P*Q

Ответ: 3.

Задач 4

Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \to (((x \in \{4, 8, 12, 116\}) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества А.

1. обозначим отдельные высказывания буквами:

P = {2, 4, 6, 8, 10, 12} ; Q = {4, 8, 12, 116}

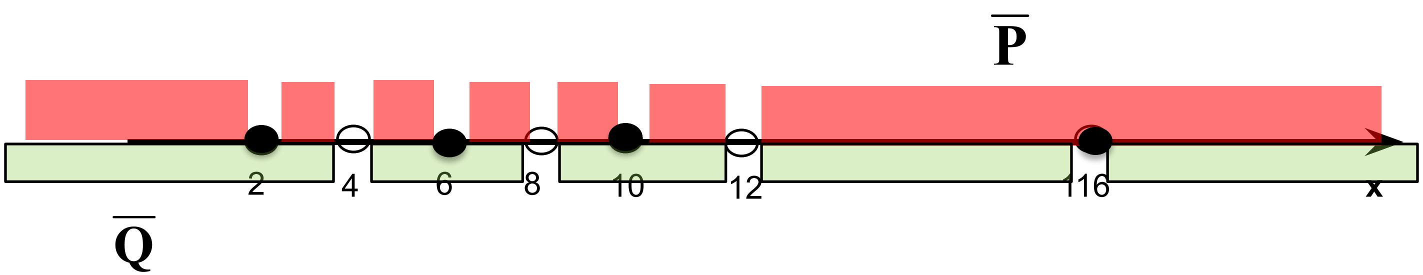
A: $x \in A$, **P**: $x \in P$, **Q**: $x \in Q$

2. перейдем к более простым обозначениям: $\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}}) = 1$

3. раскрываем обе импликации по формуле :

$$\mathbf{P} \to (\overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}) = \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}} = 1$$

4. теперь используем закон де Моргана : $\overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} = 1$



5. для множеству А обязательно должны принадлежать числа 4, 8, 12

Ответ: 24