

## Основы алгебры логики

Формы мышления



Логические выражения



Логические операции



Законы алгебры логики



Таблицы истинности



Логические задачи

## Логические основы компьютера

Базовые логические элементы



Построение логических схем



Одноразрядный сумматор



Триггер



Регистры



Контрольная работа

**Логика** – это наука о формах и способах мышления, рассуждений и доказательств.

Мышление осуществляется через **понятия, высказывания и умозаключения.**

**Понятие** – это форма мышления, выделяющая существенные и отличительные признаки объекта.

**Умозаключение** – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких **простых высказываний** (суждений) может быть получено новое **составное высказывание** (суждение).

**Высказывание** – это формулировка в форме утверждения или отрицания об объекте и его свойствах. **Высказывание может быть истинным или ложным.**



# Примеры высказываний

Истинное высказывание: «Буква «А» - гласная».

Ложное высказывание: «Компьютер был изобретен в середине XIX века».

**Какие из предложений являются высказываниями?  
Какие из высказываний истинные?**



1. Какой длины эта лента? *Не высказывание*
2. Прослушайте сообщение. *Не высказывание*
3. Делайте утреннюю зарядку! *Не высказывание*
4. Назовите устройства ввода информации. *Не высказывание*
5. Кто отсутствует? *Не высказывание*
6. Париж – столица Англии. *Ложное высказывание*
7. Число 11 является простым. *Истинное высказывание*
8.  $4+5=10$  *Ложное высказывание*
9. Без труда не вытащишь и рыбку из пруда. *Истинное высказывание*
10. Сложите числа 2 и 5. *Не высказывание*
11. Некоторые медведи живут на Севере. *Истинное высказывание*
12. Все медведи – бурые. *Ложное высказывание*
13. Чему равно расстояние от Москвы до Ленинграда? *Не высказывание*
14. Сумма углов треугольника – 180 градусов. *Истинное высказывание*



# Конъюнкция - логическое умножение



Результат логического умножения является истинным тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

*От лат. conjunctio - связываю*

Таблица истинности функции логического умножения

A	B	F=A*B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**В переводе на естественный язык**

«и A, и B»                      «как A, так и B»  
«A вместе с B»                «A несмотря на B»  
«A, в то время как B»

Пример: Даны высказывания

**A** – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

**B** – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

**C** – «Число 10 кратно 2» = **ИСТИНА**

**A и B** – «Число 10 – четное и отрицательное» - **ЛОЖЬ**

**A и C** – «Число 10 как четное, так и кратно 2» - **ИСТИНА**

И,  $\wedge$ , and, &, \*, ·



# Дизъюнкция - логическое сложение



Результат логического сложения является истинным тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

*От лат. disjunctio – различаю*

Таблица истинности функции логического сложения

A	B	F=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**В переводе на естественный язык  
«А или В»**

Пример: Даны высказывания

**A** – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

**B** – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

**C** – «Число 10 - простое» = **ЛОЖЬ**

**A или B** – «Число 10 – четное или отрицательное» - **ИСТИНА**

**A или C** – «Число 10 четное или простое» - **ИСТИНА**

**B или C** – «Число 10 отрицательное или простое» - **ЛОЖЬ**

ИЛИ,  $\vee$ , or, +



# Импликация - логическое следование



Результат логического следования является ложным тогда и только тогда, когда из истины следует ложь.

*От лат. implicatio – тесно связывать*

Таблица истинности функции логического следования

A	B	$F=A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A – условие, B - следствие

*В переводе на естественный язык*  
**«если A, то B»**                      **«B, если A»**  
**«Когда A, тогда B»**  
**«A достаточно для B»**  
**«A только тогда, когда B»**

Пример: Даны высказывания

**A** – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

**B** – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

**C** – «Число 10 - простое» = **ЛОЖЬ**

**A**  $\rightarrow$  **B** – «Если число 10 – четное, то оно - отрицательное» - **ЛОЖЬ**

**A**  $\rightarrow$  **C** – «Число 10 простое, если четное» - **ЛОЖЬ**  
**«Если число делится на 10, то оно делится на 5»**  
**ИСТИНА**



# Эквивалентность - логическое равенство



Результат логического равенства является истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо истинны, либо ложны.

*От лат. aequivalens  
– равноценное*

Таблица истинности функции логического равенства

A	B	$F=A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**В переводе на естественный язык**

**«A эквивалентно B»**

**«A только тогда и только тогда, когда B»**

Пример: Даны высказывания

**A** – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

**B** – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

**C** – «Число 10 - простое» = **ЛОЖЬ**

**A**  $\leftrightarrow$  **B** – «Число 10 – четное, тогда и только тогда, когда оно - отрицательное» - **ЛОЖЬ**

**B**  $\leftrightarrow$  **C** – «Число 10 такое же простое, как и отрицательное» **ИСТИНА**

=,



# Упражнения по записи высказываний в виде логических выражений

1  
«Летом Петя поедет в деревню и, если будет хорошая погода, то он будет рыбачить.»

A

B

C

$$F = A * (B \rightarrow C)$$

2  
«Точка X принадлежит интервалу [A;B]»

$$(X \geq A) * (X \leq B)$$

3  
«Точка X не принадлежит интервалу [A;B]»

$$\overline{(X \geq A) * (X \leq B)}$$

$$(X < A) + (X > B)$$

4  
«Неверно, что если дует ветер, то солнце светит только тогда, когда нет дождя.»

D – идет дождь

B

C

$$\overline{B \rightarrow (C \rightarrow D)}$$

При составлении логического выражения необходимо учитывать порядок выполнения логических операций:

1. действия в скобках
2. инверсия
3. конъюнкция
4. дизъюнкция
5. импликация
6. эквивалентность



# Упражнения по записи высказываний в виде логических выражений

5

«Если урок будет интересным, то никто из школьников – Миша, Вика, Света – не будет смотреть в окно»

У Урок будет интересным

М Миша будет смотреть в окно

В Вика будет смотреть в окно

С Света будет смотреть в окно

$$U \rightarrow \overline{M * V * C}$$

6

«Я пойду гулять тогда и только тогда, когда выучу все уроки.»

В

С

$$B \leftrightarrow C$$

## Упражнения с логическими выражениями

7

По мишеням произведено три выстрела. Рассмотрено высказывание:

$P_k$  = «Мишень поражена k-тым выстрелом», где  $k=1, 2, 3$ .

Что означают следующие высказывания:

а)  $P_1 + P_2 + P_3$     б)  $P_1 * P_2 * P_3$     в)  $\overline{P_1 * P_2 * P_3}$



8

Построить таблицу истинности для выражения  $F=(A+B)*(\overline{A}+\overline{B})$

A	B	A+B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	F
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

9

Вычислить значение булевого выражения  $X1*X2+\overline{X3}+\overline{X4}$ , при  $X1=1, X2=0, X3=1, X4=0$ .

$$1*0 + 1 + 0 = 1*0 + 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$



# Законы алгебры логики

Закон	Для «ИЛИ»	Для «И»
Переместительный	$X + Y = Y + X$	$X * Y = Y * X$
Сочетательный	$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$	$(X * Y) * Z = X * (Y * Z)$
Распределительный	$X * (Y + Z) = X * Y + X * Z$	$X + Y * Z = (X + Y) * (X + Z)$
Правила де Моргана	$\overline{X + Y} = \overline{X} * \overline{Y}$	$\overline{X * Y} = \overline{X} + \overline{Y}$
Идемпотенции	$X + X = X$	$X * X = X$
Поглощения	$X + X * Y = X$	$X * (X + Y) = X$
Склеивания	$(X * Y) + (\overline{X} * Y) = Y$	$(X + Y) * (\overline{X} + Y) = Y$
Операции переменной с ее инверсией	$X + \overline{X} = 1$	$X * \overline{X} = 0$
Операция с константами	$X + 0 = X; X + 1 = 1$	$X * 1 = X; X * 0 = 0$
Двойного отрицания	$\overline{\overline{X}} = X$	$\overline{\overline{X}} = X$

$$A \longrightarrow B = \overline{A} + B$$

$$A \longleftrightarrow B = (\overline{A} + B) * (\overline{B} + A)$$



# Решение содержательных задач с помощью алгебры логики

## Алгоритм

Внимательно изучить условие

Выделить простые высказывания и обозначить их буквами

Записать условие задачи на языке алгебры логики

Составить формулу, в которой объединить логическим умножением формулы каждого утверждения, приравнять произведение к 1

Упростить формулу согласно законам – минимизировать логическое выражение

Проанализировать результат или построить таблицу истинности результирующего выражения и найти по таблице значения переменных, для которых значение функции равно 1



# Решение логических задач с помощью алгебры логики

1

$$F1 = A \rightarrow B * \bar{C}$$

$$F2 = C \rightarrow B * A$$

$$F3 = B \rightarrow C * A$$

«Синоптик объявляет прогноз погоды на завтра и утверждает следующее:

1. Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя.
  2. Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.
  3. Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра».
- Так какая же погода будет завтра?

A

Ветра нет

B

Пасмурно

C

Дождь

$$F1 * F2 * F3 = (A \rightarrow B * \bar{C}) * (C \rightarrow B * A) * (B \rightarrow C * A) =$$

$$(\bar{A} + B * \bar{C}) * (\bar{C} + B * A) * (\bar{B} + C * A) =$$

$$\bar{A} * \bar{C} * \bar{B} + \underbrace{\bar{A} * \bar{C} * B}_{0} + \underbrace{\bar{A} * B * \bar{C}}_{0} + \underbrace{\bar{A} * B * C}_{0} + \underbrace{A * \bar{C} * \bar{B}}_{0} + \underbrace{A * \bar{C} * B}_{0} + \underbrace{A * B * \bar{C}}_{0} + \underbrace{A * B * C}_{0} = \bar{A} * \bar{C} * \bar{B}$$

Высказывание истинно (=1), если каждый множитель =1. Поэтому  
**«погода будет ясная, без дождя, но ветреная»**



# Решение содержательных задач табличным способом

2

В оркестр приняли трех новых музыкантов: Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Известно, что:

- 1) Смит – самый высокий;
- 2) играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
- 3) играющие на скрипке и флейте и Браун любят пиццу;
- 4) когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Смит мирит их;
- 5) Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами.

	Скрипка	Флейта	Альт	Кларнет	Гобой	Труба
Браун	0	0	1	1	0	0
Смит	0	1	0	0	1	0
Вессон	1	0	0	0	0	1

Так как музыкантов трое, а инструментов 6 и каждый владеет только 2-мя, получается, что каждый играет только на тех инструментах, которыми другие не владеют.

0 - не играет на инструменте, 1 – играет на инструменте.

Ответ: Браун играет на альте и кларнете, Смит – на флейте и гобое, Вессон – на скрипке и трубе.



## Решение содержательных задач с помощью рассуждений

3

Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: «Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский». Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый?

**Решение.**

Если верно первое утверждение, то верно и второе, так как юноши изучают разные языки. Это противоречит условию задачи, поэтому первое утверждение ложно.

Если верно второе утверждение, то первое и третье должны быть ложны. При этом получается, что никто не изучает китайский. Это противоречит условию, поэтому второе утверждение тоже ложно.

Остается считать верным третье утверждение, а первое и второе – ложными. Следовательно, Вадим не изучает китайский, китайский изучает Сергей.

**Ответ:** Сергей изучает китайский язык, Михаил – японский, Вадим – арабский.



# Таблицы истинности

1 Докажите эквивалентность булевских выражений  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$

A	B	$A \rightarrow B$	$\bar{A} + B$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
0	0	1	1

2 Восстановите булевское выражение по таблице истинности

X1	X2	X3	F-?
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\bar{X}_1 * \bar{X}_2 * X_3 = F_1$$

$$\bar{X}_1 * X_2 * X_3 = F_2$$

$$X_1 * X_2 * X_3 = F_3$$

Ответ:  $F = F_1 + F_2 + F_3$





# Логические основы компьютера.

## Базовые логические элементы

**Логический элемент компьютера** (вентиль) - это электронная схема, реализующая базовую логическую операцию и характеризующаяся наличием сигнала на входе и выходе элемента.

**И (конъюнктор), ИЛИ (дизъюнктор), НЕ (инвертор)**

С помощью базовых логических элементов можно реализовать любую логическую функцию, выполняющую арифметические операции или хранение информации.

Обычно у вентиля от двух до восьми входов и один или два выхода. Состояние логических элементов характеризуется **таблицей входов-выходов** логических элементов. На входы логических элементов подаются электрические сигналы высокого уровня напряжения (+5 вольт) – «логическая 1», и низкого уровня напряжения (около 0 вольт) – «логический 0»

Чтобы построить логическую схему необходимо:

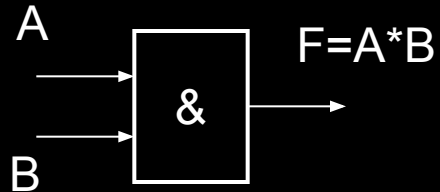
- 1) определить число логических переменных
- 2) определить количество базовых логических операций и их порядок
- 3) выбрать вентиль для каждой операции и соединить их в порядке выполнения логических операций.



# Логические основы компьютера.

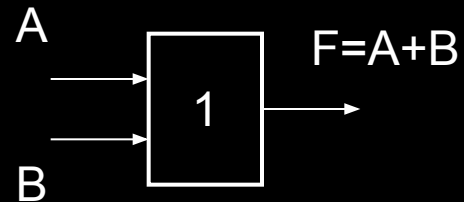
## Базовые логические элементы

### Конъюнктор



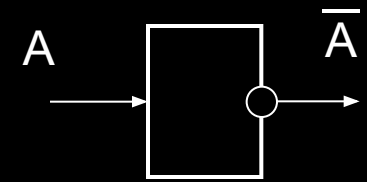
A	B	$F=A*B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

### Дизъюнктор



A	B	$F=A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

### Инвертор



A	$\bar{A}$
0	1
1	0

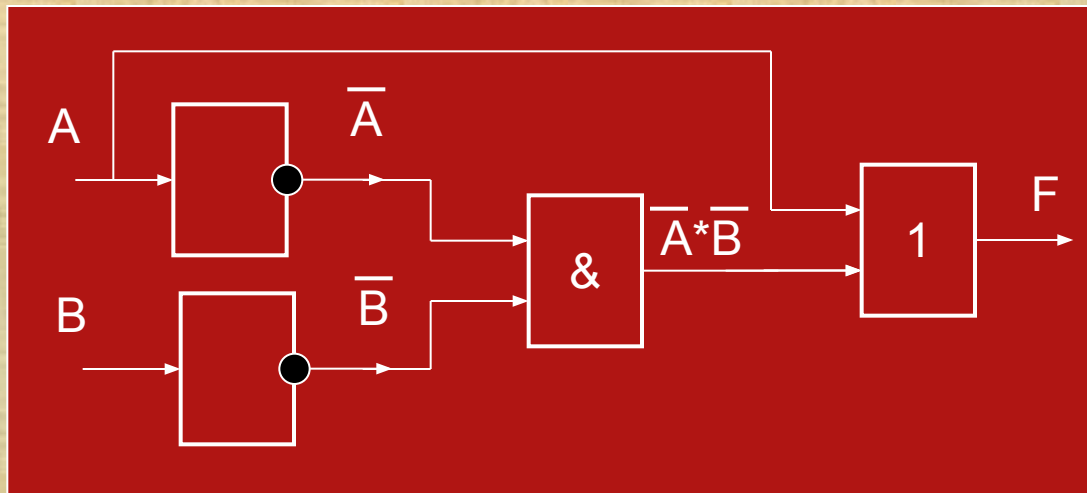


# Логические основы компьютера. Построение логических схем

1

Вычертить функциональную логическую схему по логическому выражению, предварительно упростив его:  $(\bar{A}+B) + (\bar{A}*B) + A$

$$F=(A+B) + (A*B) + A = A*B + A$$

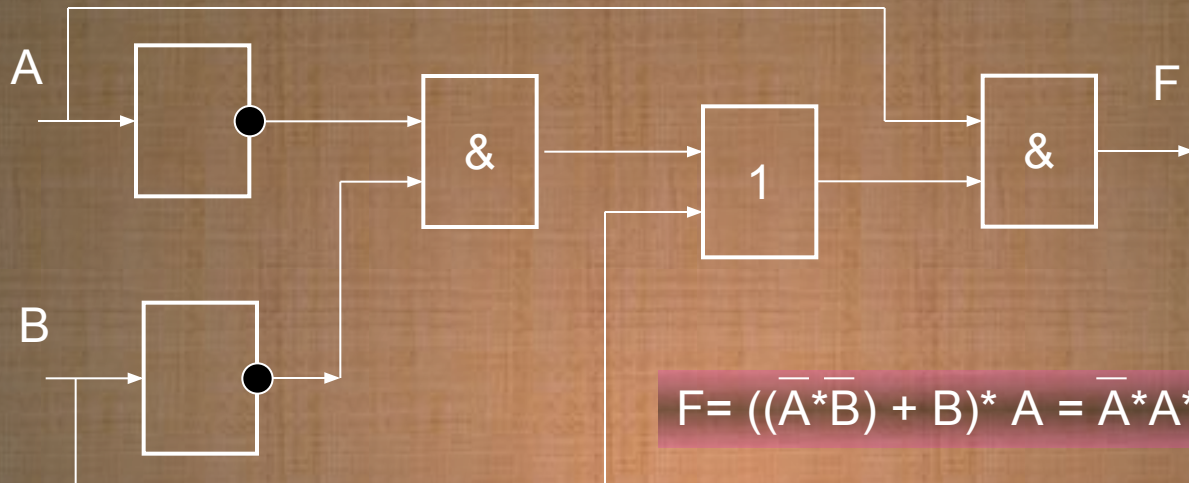


# Логические основы компьютера.

## Построение логических схем

2

По функциональной логической схеме записать логическую функцию F, упростить ее и построить таблицу входов-выходов функции F.



$$F = ((\bar{A} * \bar{B}) + B) * A = \bar{A} * A * \bar{B} + B * A = B * A$$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A * \bar{B}$	$A * \bar{B} + B$	$((\bar{A} * \bar{B}) + B) * A$	$F = B * A$
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1

# Логические основы компьютера.

## Одноразрядный двоичный полусумматор

**Сумматор – это логическая электронная схема, выполняющая сложение двоичных чисел.**

Сконструируем схему одноразрядного полусумматора (без учета переноса из младшего разряда).



- 1 Запишем таблицу сложения двоичных чисел, обозначив P – цифру переноса в старший разряд.

A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

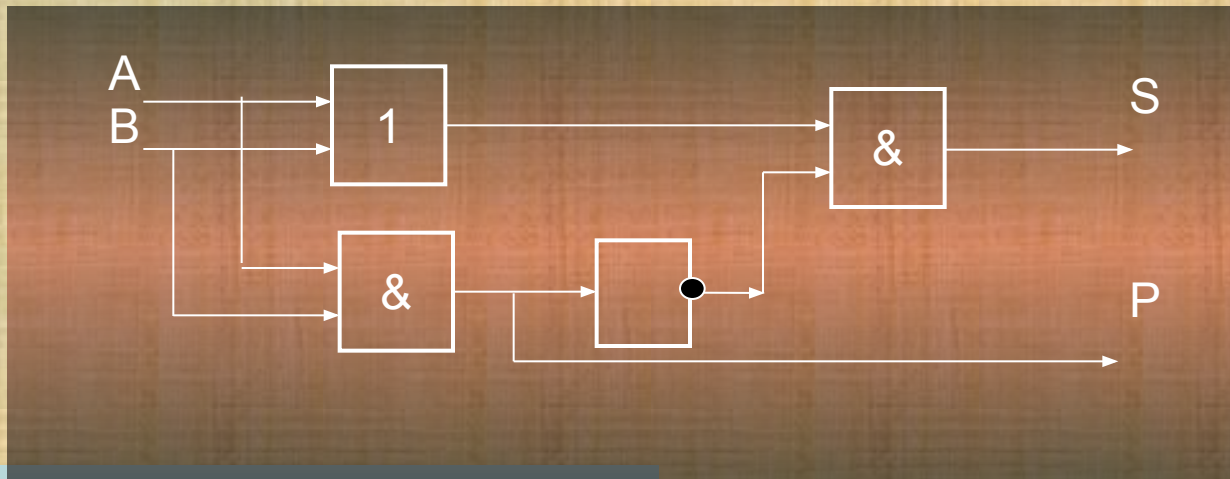
- 2 Столбец P соответствует таблице истинности логического умножения.

$$P = A * B$$

- 3 Столбец S соответствует логическому сложению, кроме случая, когда две 1.

$$S = (A + B) * \overline{(A * B)}$$

- 4 Построим схему для S и P



# Логические основы компьютера.

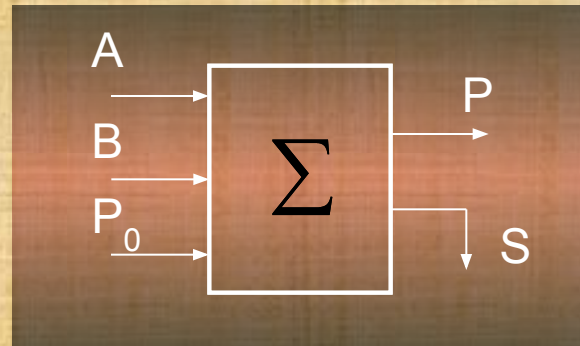
## Одноразрядный двоичный сумматор

При сложении чисел A и B в каждом разряде на вход сумматора должны подаваться три двоичных сигнала: цифра A - первое слагаемое, цифра B - второе слагаемое,  $P_0$  – перенос из предыдущего разряда. Выходы одноразрядного сумматора: S – сумма, P – перенос цифры из текущего разряда в старший.

Таблица входов-выходов

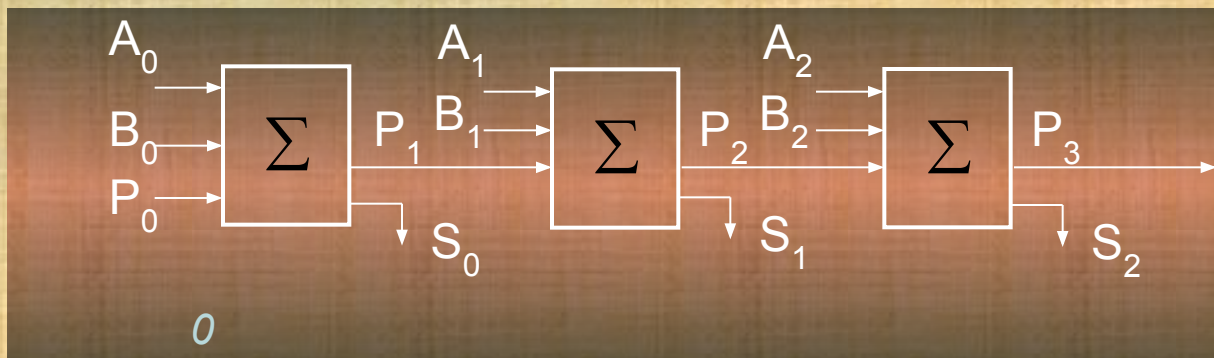
A	B	$P_0$	P	S
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	1	1	1

Вид одноразрядного сумматора в виде единого функционального узла (условное обозначение)



$$S = (A + B + P_0) * \bar{P}_0 + (A * B * P_0)$$

$$S = (A * B) + (A * P_0) + (B * P_0)$$



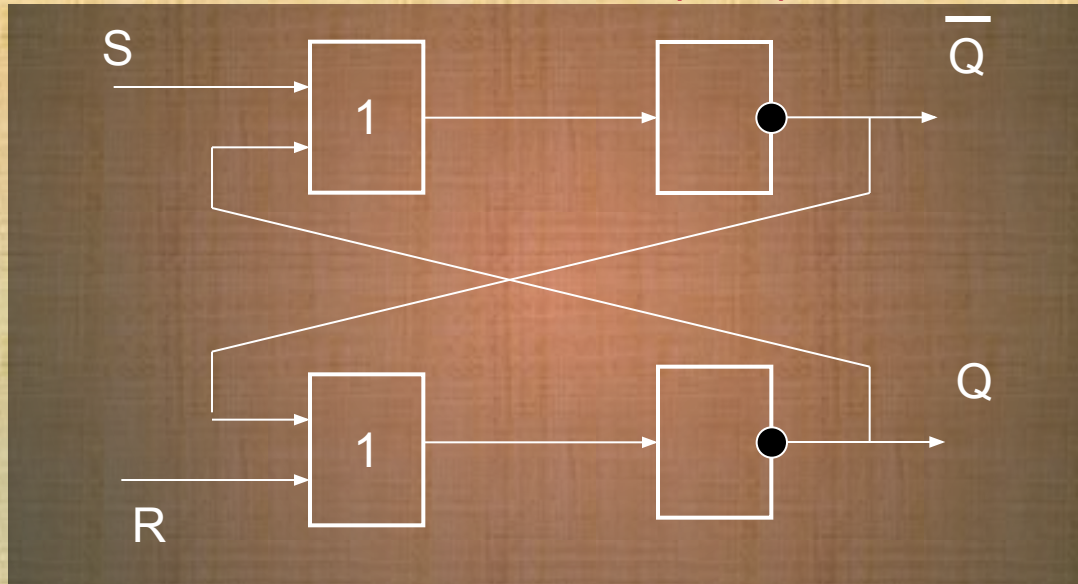
Вид трехразрядного сумматора



# Логические основы компьютера. Триггер

Триггер (trigger – защелка, спусковой крючок) – это устройство, позволяющее запоминать, хранить и считывать 1 бит информации, т.е. он может находиться в одном из двух устойчивых состояний - логический 0 или логическая 1, и мгновенно переходить («перебрасываться») из одного электрического состояния в другое.

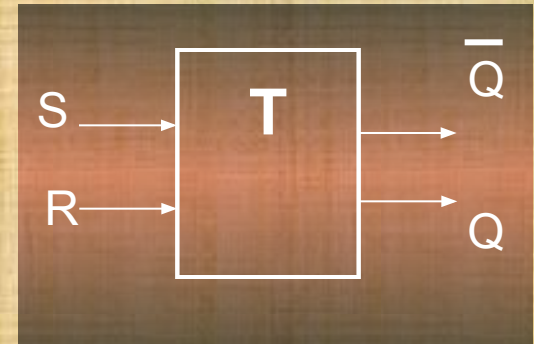
Логическая схема RS-триггера



S – Set  
(установка)

R – Reset  
(сбрасывать)

Условное обозначение RS-триггера



При подаче сигнала на вход S триггер переходит в устойчивое единичное состояние

При подаче сигнала на вход R триггер сбрасывается в устойчивое нулевое состояние

При отсутствии сигнала триггер хранит последнее значение

S	R	Q	$\bar{Q}$	Режим триггера
1	0	1	0	Установка 1
0	1	0	1	Установка 0
0	0	Последние значения		Хранение информации
1	1	Запрещено!		

# Логические основы компьютера. Регистры

Регистры – совокупность триггеров, предназначенных для хранения и обработки двоичной информации. Число триггеров в регистре называется разрядностью компьютера и равна 8, 16, 32, 64.

*Триггер был создан советским ученым А. Н.Бонч-Бруевичем*



Сколько триггеров необходимо для хранения информации объемом 1 бт, 1 Кбт, 1 Мбт, 64 Мбт?

Виды регистров	Назначение
Регистры памяти (ячейки внутренней памяти)	Служат для хранения информации.
Счетчик команд	Регистр устройства управления процессора (УУ), хранит адрес выполняемой в данный момент команды, по которому она находится в ОЗУ.
Регистр команд	Служит для вычисления адреса ячейки, где хранятся данные, требующиеся программе.
Регистр флагов	Регистр УУ, хранит информацию о последней команде, выполненной процессором.



# Контрольная работа по теме «Основы алгебры логики и логические основы компьютера»

## Вариант 1

1. Запишите следующие высказывания в виде логического выражения, определив простые высказывания и используя логические операции:
  - А) На уроке информатики старшеклассники отвечали на вопросы учителя и выполняли практическую работу.
  - Б) Если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на три.
2. Составьте таблицу истинности логического выражения:  
 $F = A \vee \overline{B} \& (A \vee B)$
3. Нарисуйте логическую схему для следующего логического выражения и определите значения сигналов на входах и выходе:  $F = A \& B \vee B \& C$ .
4. Упростите логическое выражение:  $F = X \vee Y \vee X \& Y$ .
5. Решите задачу:

Компьютер вышел из строя. Известно, что:

- 1) Если монитор неисправен, то исправна видеокарта, но не исправна оперативная память.
- 2) Если видеокарта исправна, то исправна оперативная память, но неисправен монитор.
- 3) Если оперативная память исправна, то исправна видеокарта, но неисправен монитор.

*Исправен ли монитор?*

## Вариант 2

1. Запишите следующие высказывания в виде логического выражения, определив простые высказывания и используя логические операции:
  - А) Число 2005 нечетное и четырехзначное.
  - Б) Если Солнце всходит на востоке, то заходит оно на западе.
2. Составьте таблицу истинности логического выражения:  
 $F = \overline{A} \& B \vee (A \& B)$
3. Нарисуйте логическую схему для следующего логического выражения и определите значения сигналов на входах и выходе:  $F = \overline{A} \& B \vee C \vee A$ .
4. Упростите логическое выражение:  $F = (X \vee Z) \& (X \vee \overline{Z}) \& \overline{Y}$ .
5. Решите задачу:  
Кто из учеников идет на олимпиаду по физике, если известно следующее:
  - 1) Если Миша идет, то идет Аня, но не идет Маша.
  - 2) Если Маша не идет на олимпиаду, то идет Аня, но не идет Миша.
  - 3) Если Аня идет, то идет Миша, но не идет Маша.

