Основы логики

Урок 1:

Основные понятия алгебры логики. Логические операции.

Высказыванием

называется любое повествовательное предложение, про которое известно, что оно или истинно, или ложно.

Например:

- **Жирафы летят на север. -** *Ложное высказывание.*
- **Треугольник - это геометрическая фигура. -** *Истинное высказывание*
- **Число 6 не делится на 2. -** *Ложное высказывание.*
- **Посмотрите на доску. –** *Не высказывание.*

Высказывание считается ***простым***, если никакую его часть нельзя рассматривать как отдельное высказывание

Высказывание, которое можно разложить на части называется ***сложным (составным).***

В математической логике высказывания обозначают ***<u>большими латинскими буквами.</u>***

Например:

A = Москва– столица России.

C = Все растения ядовиты.

Любое высказывание может быть *__ложно__* (=>0) или *__истинно__* (=>1).

- ***<u>Простые высказывания</u>*** называются ***логическими переменными***

<u>*Например:*</u>

А = «*Луна является спутником Земли.*»

→ ***А = 1***

В = «*Москва – столица Германии.*»

→ ***В = 0***

- ***Сложные высказывания*** называются ***логическими функциями***, а значение логической функции также может принимать значения только 0 или 1.

Составные (сложные) высказывания строятся из простых с помощью логических связок:

"и",

"или",

"не",

«если ..., то...»,

«...тогда и только тогда, когда...»

и др.

Например

обозначим

ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ -

ЛОГИЧЕСКИМИ ОПЕРАЦИЯМИ

и

получим с их помощью (составные) высказывания

I. Операция – логическое умножение

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно при помощи союза *«и»* называется *операцией логического умножения или конъюнкцией*

В алгебре логики конъюнкция обозначается значком «&» либо «Λ»

Высказывание вида **А & В (А конъюнкция В)** истинно тогда и только тогда, когда

истинны оба высказывания и А и В

Таблица истинности для **А & В**

	A	B	A & B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

II. Операция – логическое сложение

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно при помощи союза <u>*«или»*</u> называется <u>*операцией логического сложения или дизъюнкцией*</u>

В алгебре логики дизъюнкция обозначается значком «**V**» либо «+»

Высказывание вида **A V B (A дизъюнкция B)** истинно тогда и только тогда, когда ***истинно хотя бы одно из входящих в него простых (элементарных) высказываний***

Таблица истинности для **A V B**

A	B	A v B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Союз **«или»** употребляется в неисключающих друг друга случаях.

III. Операция – логическое отрицание

Присоединение частицы *«не»* к высказыванию называется *операцией логического отрицания или инверсией*

В алгебре логики инверсия обозначается значком « ¬ » либо чертой над высказыванием **«Ā»**

Рассмотренные выше операции были двуместные, т.е. выполнялись над двумя высказываниями. В алгебре логики широко применяется и одноместная операция – операция *отрицание.*

Высказывание вида **Ā (инверсия А)** делает ***истинное*** высказывание ***ложным*** и , наоборот, ***ложное - истинным***

Таблица истинности для **Ā**

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

[***Например***]

IV. Операция – логическое следование

Объединение двух высказываний с помощью оборота речи *«если …, то …»* называется *операцией логического следования или импликация*

В алгебре логики импликация обозначается значком « → »

Высказывание вида **A → B (A импликация B)** ***ложно*** тогда и только тогда, ***когда A – истинно, а B – ложно*** (т.е. из истинного высказывания следует ложное)

Таблица истинности для **A → B**

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \to B = \overline{A} + B$$

V. Операция – логическое равенство

Объединение двух высказываний с помощью оборота речи
<u>«…тогда и только тогда, когда …»</u>
называется
<u>операцией логического равенства или эквивалентность</u>

В алгебре логики эквивалентность обозначается значком « $\leftrightarrow$ »

Высказывание вида **A ↔ B** **(A эквивалентность B)** ***истинно*** тогда и только тогда, когда ***оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны***

Таблица истинности для **A ↔ B**

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Урок 2:

Решение логических выражений

через построение таблиц

истинности

Применяя логические операции, мы можем решить любые логические выражения:

1. Для этого простые логические высказывания обозначим как логические переменные – ***буквами***;
2. Свяжем их с помощью знаков логических операций.

Такие формулы в алгебре логики называются ***логическими выражениями.***

Теперь мы можем определить значение логической функции для любого набора значений логических переменных.

Например: $F\,(X,Y,Z) = \overline{X} + Y \wedge Z$

Для определения значения логической функции
необходимо помнить
порядок выполнения логических операций
по убыванию старшинства

Операции в логическом выражении выполняются слева направо с учетом скобок в следующем порядке:

1. *инверсия;*
2. *конъюнкция;*
3. *дизъюнкция;*
4. *импликация;*
5. *эквивалентность.*

Для построения таблицы истинности любой логической функции

следует соблюдать:

1. определить кол-во строк таблицы – 2^n, где **n = кол-ву логических переменных;**

2. определить кол-во столбцов таблицы- оно равно **кол-ву логических переменных + кол-во логических операций;**

Для построения таблицы истинности любой логической функции

следует соблюдать:

3. построить таблицу истинности с найденным **кол-вом строк и столбцов + строка с названием столбцов;**

4. заполнить столбцы таблицы, выполняя логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности.

Вернёмся к нашему примеру:

$$F\ (X,Y,Z) = \overline{X} + Y \wedge Z$$

1. Количество входных переменных равно трем *(X,Y,Z),* а значит строк

Q= 2^3 = 8 +1 =9 *(заголовки столбцов).*

2. Количество столбцов равно **6**

(3 переменные + 3 операции).

Определим значение логической функции

$F\ (X,Y,Z) = \overline{X} + Y \wedge Z$

X	Y	Z	$\overline{X}$	$Y \wedge Z$	$\overline{X} + Y \wedge Z$

Значение логической функции

$F(X, Y, Z) = \overline{X} + Y \wedge Z$

X	Y	Z	$\overline{X}$	$Y \wedge Z$	$\overline{X} + Y \wedge Z$
0	0	0	1	0	**1**
0	0	1	1	0	**1**
0	1	0	1	0	**1**
0	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	0	**0**
1	0	1	0	0	**0**
1	1	0	0	0	**0**
1	1	1	0	1	**1**

Подробное решение

Урок 3:

Математическая логика - решение задач

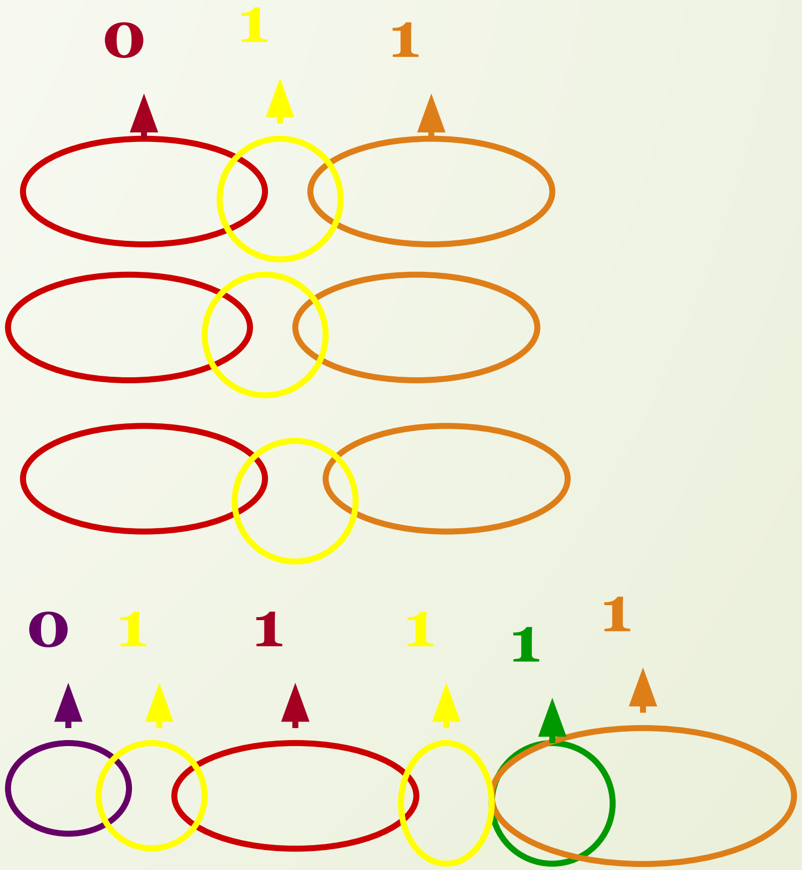
Найдём значения логических выражений:

1)F= (0 ∨ 0) ∨ (1 ∨ 1)

2)F= (1 ∨ 1) ∨ (1 ∨ 0)

3)F= (0 Λ 0) Λ (1 Λ 1)

4)F= ¬1 ∨ (1 Λ 1) Λ (¬0 Λ 1)



Ответ: 1

Ответ: 1

Ответ: 0

Ответ: 1

Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание $\neg((X > 3) \rightarrow (X > 4))$

1) 1 2)2 3) 3 4) 4

Решение:

В записи логического высказывания стоит отрицание сложного высказывания.

Если $\neg((X > 3) \rightarrow (X > 4)) = 1$ (истинно),

то $(X > 3) \rightarrow (X > 4) = 0$ (ложно)

Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание $\neg((X > 3) \rightarrow (X > 4))$

1) 1 2)2 3) 3 4) 4

Решение:

Импликация ложна в единственном случае - ***когда из истинного высказывания следует ложное,*** тогда $(X > 3) = 1$, а $(X > 4) = 0$.

Получаем, что X должно быть задано в диапазоне: **$X > 3$ и $X \le 4$**.

Только одно число входит в этот промежуток – это 4

Правильный ответ – 4.