

Целочисленные алгоритмы (язык Паскаль)

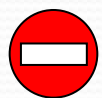
Вычисление НОД

НОД = наибольший общий делитель двух натуральных чисел – это наибольшее число, на которое оба исходных числа делятся без остатка.

Перебор:

```
k := a; { или k := b; }  
while (a mod k <> 0) or  
      (b mod k <> 0) do  
  k := k - 1;  
writeln ('НОД(' , a , ', ' , b , ')=' , k);
```

или



много операций для больших чисел

Алгоритм Евклида

$$\begin{aligned}\text{НОД}(a, b) &= \text{НОД}(a-b, b) \\ &= \text{НОД}(a, b-a)\end{aligned}$$



Евклид
(365-300 до. н. э.)

Заменяем большее из двух чисел **разностью** большего и меньшего до тех пор, пока они не станут равны. Это и есть НОД.

? НОД вычисляется через НОД. Как это называется?

Пример:

$$\begin{aligned}\text{НОД}(14, 21) &= \text{НОД}(14, 21-14) = \text{НОД}(14, \\ 7) &= \text{НОД}(7, 7) = 7\end{aligned}$$

⊖ много шагов при большой разнице чисел:

$$\begin{aligned}\text{НОД}(1998, 2) &= \text{НОД}(1996, 2) = \dots = \\ 2\end{aligned}$$

Модифицированный алгоритм Евклида

$$\begin{aligned}\text{НОД}(a, b) &= \text{НОД}(a \bmod b, b) \\ &= \text{НОД}(a, b \bmod a)\end{aligned}$$

Заменяем большее из двух чисел **остатком от деления** большего на меньшее до тех пор, пока меньшее не станет равно нулю. Тогда большее — это НОД.

Пример:

$$\text{НОД}(14, 21) = \text{НОД}(14, 7) = \text{НОД}(0, 7) =$$

Еще ⁷ один вариант:

$$\text{НОД}(2 \cdot a, 2 \cdot b) = 2 \cdot \text{НОД}(a, b)$$

$$\text{НОД}(2 \cdot a, b) = \text{НОД}(a, b) \quad // \text{ при нечетном } b$$

Реализация алгоритма Евклида

Рекурсивный вариант:

```
function NOD (a, b: integer): integer;  
begin  
  if a = b then NOD := a  
  else  
    if a < b then  
      NOD := NOD(a, b-a)  
    else NOD := NOD(a-b, b);  
end;
```

```
function NOD (a, b: integer): integer;  
begin  
  if a*b = 0 then NOD := a+b  
  else  
    if a < b then  
      NOD := NOD(a, b mod a)  
    else NOD := NOD(a mod b, b);  
end;
```



Почему a+b?

Реализация алгоритма Евклида

Без рекурсии:

```
function NOD (a, b: integer): integer;  
begin  
  while a <> b do  
    if a > b then a := a - b  
    else          b := b - a;  
  NOD := a;  
end;
```

```
function NOD (a, b: integer): integer;  
begin  
  while a*b <> 0 do  
    if a > b then a := a mod b  
    else          b := b mod a;  
  NOD := a + b;  
end;
```

Поиск простых чисел

Простые числа – это числа, которые делятся только на себя и на 1.

Применение:

- 1) криптография;
- 2) генераторы псевдослучайных чисел.

Наибольшее известное (сентябрь 2008):

$2^{43112609} - 1$ (содержит 12 978 189 цифр).

Задача. Найти все простые числа в интервале от 1 до заданного N .

Простое решение:

```
for i:=1 to N do begin
  isPrime := True;
  for k:=2 to i-1 do
    if i mod k = 0 then
      isPrime := False;
  if isPrime then
    writeln(i);
end;
```



Как уменьшить число шагов внутреннего цикла?

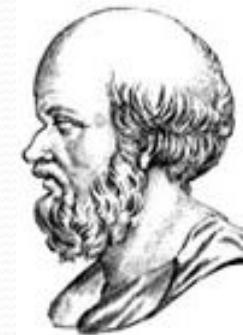
$$k \leq \sqrt{i} \iff k*k \leq i$$



Как оценить число операций?

$O(N^2)$ | растёт не быстрее N^2

Решето Эратосфена



Эратосфен Киренский
(Eratosthenes, Ερατοσθένης)
(ок. 275-194 до н.э.)

Алгоритм:

- 1) начать с $k = 2$;
- 2) «выколоть» все числа через k , начиная с $2 \cdot k$;
- 3) перейти к следующему «невыколотому» k ;
- 4) если $k \cdot k \leq N$, то перейти к шагу 2;
- 5) напечатать все числа, оставшиеся «невыколотыми».

Новая версия – [решето Аткина](#) .



высокая скорость, количество операций

$$O((N \cdot \log N) \cdot \log \log N)$$



нужно хранить в памяти все числа от 1 до N

Реализация

Логический массив $A[N]$, где

$A[i] = \text{True}$, если число i не «выколото»,

$A[i] = \text{False}$, если число i «выколото».

```
{ сначала все числа не выколоты }  
for i:=1 to N do A[i] := True;  
  
{ основной цикл  
  «выкалывание» составных чисел }  
  
{ выводим оставшиеся числа }  
for i:=1 to N do  
  if A[i] then writeln(i);
```

Реализация

Основной цикл:

```
k := 2;
while k*k <= N do begin
  if A[k] then begin
    i := k*k;
    while i <= N do begin
      A[i] := False;
      i := i + k;
    end;
  end;
  k := k + 1;
end;
```

«ВЫКАЛЫВАЕМ»
все числа,
кратные k

Задания

«4»: Реализовать «решето Эратосфена», число N вводить с клавиатуры.

«5»: То же самое, но сравнить число шагов алгоритма для различных значений N . Построить график в *Excel*, сравнить сложность с линейной.
Заполнить таблицу:

N	1000	5000	10000	20000	50000
Количество простых чисел					
Число шагов внутреннего цикла					

Что такое длинные числа?

Задача. Вычислить (точно)

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$$

Проблема:

это число содержит более 100 цифр...



Сколько нулей в конце этого числа?



Какая последняя ненулевая цифра?

Решение:

хранить цифры в виде массива, по группам (например, 6 цифр в ячейке).



Сколько ячеек нужно?

$$201 / 6 \approx 34 \text{ ячейки}$$

$$100! < \underbrace{100^{100}}_{201 \text{ цифра}}$$

Хранение длинных чисел

$$\begin{aligned} 1234 \ 568901 \ 734567 &= \\ &= 1234 \cdot 1000000^2 + \\ &\quad 568901 \cdot 1000000^1 + \\ &\quad 734567 \cdot 1000000^0 \end{aligned}$$



На что это похоже?

Хранить число по группам из 6 цифр – это значит представить его в системе счисления с основанием $d = 1000000$.

Алгоритм:

```
[A] = 1;  
for k := 2 to 100 do  
  [A] = [A] * k;  
{ вывести [A] }
```

[A] – длинное число, хранящееся как массив

умножение длинного числа на «короткое»

Умножение длинного числа на короткое

a_2 a_1 a_0

1234 568901

734567

k

x

3 c_2 c_1 c_0

3703 706705

$734567 \cdot 3 = 2023701$

2023701

перенос, r_1

$568901 \cdot 3 + 2 = 1706705$

706705

r_2 c_1

$1234 \cdot 3 + 1 = 3703$

3703

c_2

$$c_0 = (a_0 \cdot k + 0) \bmod d$$

$$r_1 = (a_0 \cdot k + 0) / d$$

$$c_1 = (a_1 \cdot k + r_1) \bmod d$$

$$r_2 = (a_1 \cdot k + r_1) / d$$

$$c_2 = (a_2 \cdot k + r_2) \bmod d$$

$$r_3 = (a_2 \cdot k + r_2) / d$$

...

Вычисление 100!

```
const d = 1000000; { основание системы }
var A: array[0..40] of integer;
    s, r,           { произведение, остаток }
    i, k,           { вспомогательные }
    len: integer;  { длина числа }
begin
    { присвоить [A] = 1 }
    { последовательно умножать
      [A] на 2, 3, ..., 100 }
    { вывести [A] }
end.
```

Вычисление 100!

```
len := 1;           { записать [A]=1 }
A[0] := 1;
for i:=1 to 40 do
  A[i] := 0;

for k:=2 to 100 do begin
  i := 0; { с младшего разряда }
  r := 0; { пока нет переноса }
  while (i < len) or (r > 0) do begin
    s := A[i]*k + r;
    A[i] := s mod d; { в этом разряде }
    r := s div d;   { перенос }
    i := i + 1; { к следующему разряду }
  end;
  len := i;       { новая длина числа }
end;
```

пока не кончились
цифры числа [A]
или есть перенос



Где результат?



Можно ли брать другое d?

Как вывести длинное число?

«Первая мысль»:

```
for i:=len-1 downto 0 do  
  write(A[i]);
```



Что плохо?

Проблема:

как не потерять первые нули при выводе чисел, длина которых менее 6 знаков?

123 → 000123

Решение:

составить свою процедуру, а при выводе старшего разряда ($len-1$) убирать лидирующие нули:

```
write(A[len-1]); { старший разряд }  
for i:=len-2 downto 0 do  
  Write6(A[i]);
```

Как вывести длинное число?

Процедура:

```
procedure Write6(N: integer);  
var x, d: integer;  
begin  
  x := 100000;  
  while x > 0 do begin  
    d := N div x;  
    N := N mod x;  
    x := x div 10;  
    write(d);  
  end;  
end;
```

N	x	d

Задания

«4»: Составить программу для вычисления

$$99!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 97 \cdot 99$$

«5»: То же самое, но написать свою процедуру для вывода, использующую символьные строки.

«6»: Написать программу для умножения двух длинных чисел (ввод из файла).

«7»: Написать программу для извлечения квадратного корня из длинного числа (ввод из файла).