ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИГР

Теория игр – это раздел математики, изучающий математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях.

Теория игр опирается на предположение о том, что независимо от цели игры и ее обстоятельств найдется стратегия, которая позволит добиться успеха.

это всегда происходит по определенным правилам, но иногда их трудно распознать

Игра - упрощенная формализованная модель реальной конфликтной ситуации.

Цель теории игр - выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

Примеры конфликтных ситуаций:

взаимоотношения покупателя и продавца

конкуренция различных фирм

боевые действия

ИГРА 1

Берто и Роберт были арестованы за ограбление банка, не сумев правильно использовать для побега угнанный автомобиль. Полиция не может доказать, что именно они ограбили банк, но поймала их с поличным в украденном автомобиле. Их развели по разным комнатам и каждому предложили сделку: сдать сообщника и отправить его за решетку на 10 лет, а самому выйти на свободу. Но если они оба сдадут друг друга, то каждый получит по 7 лет. Если же никто ничего не скажет, то оба сядут на 2 года только за угон автомобиля.

ИГРА 2

Давайте быстро поделим 100$. Вы и я решаем, сколько из сотни мы требуем и одновременно озвучиваем суммы. Если наша общая сумма меньше ста, каждый получает то, что хотел. Если общее количество больше ста, тот, кто попросил наименьшее количество, получает желаемую сумму, а более жадный человек получает то, что осталось. Если мы просим одинаковую сумму, каждый получает 50 $. Сколько вы попросите? Как вы разделите деньги? Существует единственный выигрышный ход.

А также обычные игры

Игроки – заинтересованные стороны в игре.

Партия игры – каждый конкретный пример разыгрывания игры некоторым конкретным образом от начала до конца.

Ход игрока – выбор и осуществление действия производимого одним игроком в условиях точно определенных правилами игры.

Игра состоит из **ходов**, выполняемых игроками одновременно или последовательно

личный

случайный

Ход называется **личным**, если игрок сознательно выбирает его из совокупности возможных вариантов действий и осуществляет его.

Ход называется **случайным**, если его выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

В простых (одноходовых) играх, когда в каждой партии игрок может сделать лишь по одному ходу, понятие стратегии и возможного варианта действий совпадают.

Стратегия игрока называется **оптимальной**, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник.

Задание 26. Два игрока, Паша и Вова, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в кучу 1 камень или 10 камней. Например, имея кучу из 7 камней, за один ход можно получить кучу из 8 или 17 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 41. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 41 или больше камней.В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 40$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) Укажите все такие значения числа S, при которых Паша может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S, и укажите выигрывающие ходы.

б) Укажите такое значение S. при котором Паша не может выиграть за один ход, но при любом ходе Паши Вова может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вовы.

2. Укажите два значения S, при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём Паша не может выиграть за один ход, но может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Вова. Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Паши.

3. Укажите значение S, при котором у Вовы есть выигрышная стра тегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши, однако у Вовы нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Для указанного значе ния S опишите выигрышную стратегию Вовы.

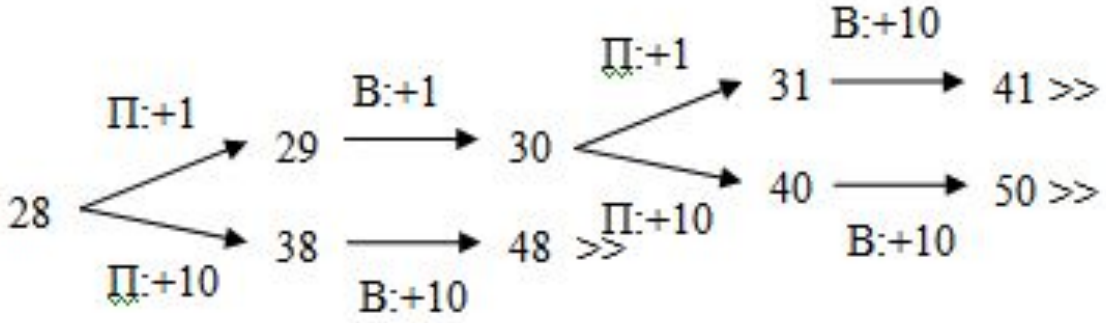
1. а) Паша может выиграть, если S = 31, ..., 40. При меньших значениях S за один ход нельзя получить кучу, в которой больше 40 камней. Паше достаточно увеличить количество камней на 10. При S < 31 получить за один ход больше 40 камней невозможно.

б) Вова может выиграть первым ходом (как бы ни играл Петя), если исходно в куче будет S = 30 камней. Тогда после первого хода Пети в куче будет 31 камень или 40 камней. В обоих случаях Ваня увеличивает количество камней на 10 и выигрывает в один ход.

2. Возможные значения S: 20, 29. В этих случаях Паша, очевидно, не может выиграть первым ходом. Однако он может получить кучу из 30 камней (при S = 20 он увеличивает количество камней на 10; при S = 29 добавляет 1 камень). Эта позиция разобрана в п. 1. б). В ней игрок, который будет ходить (теперь это Вова), выиграть не может, а его противник (то есть Паша) следующим ходом выиграет.

3. Возможное значение S: 28. После первого хода Паши в куче будет 29 или 38 камней. Если в куче станет 38 камней, Вова увеличит количество камней на 10 и выиграет своим первым ходом. Ситуация, когда в куче 29 камней, разобрана в п. 2. В этой ситуации игрок, который будет ходить (теперь это Вова), выигрывает своим вторым ходом.

В таблице изображено дерево возможных партий при описанной стратегии Вовы. Заключительные позиции (в них выигрывает Вова) подчёркнуты. На рисунке это же дерево изображено в графическом виде (оба способа изображения дерева допустимы).



Дерево всех партий, возможных при Вовиной стратегии.
Значком >> обозначены позиции, при которых игра завершается.

Задание 26 Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в кучу один ка мень или увеличить количество камней в куче в пять раз.** Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 50 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть не ограниченное количество камней.Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче ста новится более 200. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получив ший кучу, в которой будет 201 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 200$.

Говорят, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах против ника. Описать стратегию игрока - значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, ко торая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть первым ходом? Укажите все такие значения и выигрывающий ход Пети.

б) Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

2. Укажите два значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём (а) Петя не может выиграть первым ходом, но (б) Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Пети.

3. Укажите такое значение S, при котором

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах — количество камней в позиции.

1. а) Петя может выиграть, если S=41, ...,200. При меньших значениях S за один ход нельзя получить кучу, в которой больше 200 камней. Пете достаточно увели чить количество камней в 5 раз. При S < 41 получить за один ход больше 200 кам ней невозможно.
б) Ваня может выиграть первым ходом (как бы ни играл Петя), если исходно в куче будет S = 40 камней. Тогда после первого хода Пети в куче будет 41 камень или 200 камней. В обоих случаях Ваня увеличивает количество камней в 5 раз и выигрывает в один ход.

2. Возможные значения S: 8, 39. В этих случаях Петя, очевидно, не может выиг рать первым ходом. Однако он может получить кучу из 40 камней (при S=8 он увеличивает количество камней в 5 раз; при 5=39 - добавляет 1 камень). Эта пози ция разобрана в п.
1 б. В ней игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выиграть не может, а его противник (то есть Петя) следующим ходом выиграет.

3. Возможное значение S: 38. После первого хода Пети в куче будет 39 или 190 камней. Если в куче станет 190 камней, Ваня увеличит количество камней в 5 раз и выиграет своим первым ходом. Ситуация, когда в куче 39 камней, разобрана в п. 2. В этой ситуации игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выигрыва ет своим вторым ходом.

Задание 26 .Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в кучу один ка мень**, или **добавить в кучу два камня**, или **увеличить количество камней в куче в два раза**. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11, 12 или 20 камней. У каж дого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 34 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 33$.

Говорят, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах против ника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, ко торая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания.

Задание 1.

а) При каких значениях числа S Петя может выиграть первым ходом? Укажите все такие значения и вы игрывающий ход Пети.

б) Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

Задание 2.

Укажите три значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиг рать первым ходом, но может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 3.

Укажите такое значение S, при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиг рать первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стратегии, которая позво лит ему гарантированно выиграть первым ходом

Задание 1.

а) Петя может выиграть, если $S = 17, \ldots, 33$. При меньших значениях S за один ход нельзя получить кучу, в которой будет 34 или более камней. Пете достаточно уве личить количество камней в 2 раза.

б) Ваня может выиграть первым ходом (как бы ни играл Петя), если исходно в куче будет $S = 16$ камней. Тогда после первого хода Пети в куче будет 17 камней, 18 камней или 22 камня. Во всех случаях Ваня увеличивает количество камней в 2 раза и выигрывает в один ход.

Задание 2.

Возможные значения S: 8, 14, 15. В этих случаях Петя, очевидно, не может выиг рать первым ходом. Однако он может получить кучу из 16 камней (при $S = 8$ он удваивает количество камней; при $S = 14$ добавляет 2 камня; при $S = 15$ добавляет 1 камень). Эта позиция разобрана в п. 1б. В ней игрок, который будет ходить (в данном случае это Ваня), выиграть не может, а его противник (то есть Петя) сле дующим ходом выиграет.

Задание 3.

Возможное значение S: 13. После первого хода Пети в куче будет 14 камней, 15 камней или 26 камней. Если в куче станет 26 камней, то Ваня увеличит количе ство камней в 2 раза и выиграет своим первым ходом. Ситуация, когда в куче 14 или 15 камней, разобрана в п. 2. В этой ситуации игрок, который будет ходить (те перь это Ваня), выигрывает своим вторым ходом.