



# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИГР



**Теория игр** – это раздел математики, изучающий математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях.

**Теория игр** опирается на предположение о том, что независимо от цели игры и ее обстоятельств найдется стратегия, которая позволит добиться успеха.



*это всегда происходит по определенным правилам, но иногда их трудно распознать*

**Игра** - упрощенная  
формализованная модель реальной  
конфликтной ситуации.

**Цель теории игр** - выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

# Примеры конфликтных ситуаций:



**взаимоотношения  
покупателя и  
продавца**



**конкуренция  
различных  
фирм**



**боевые  
действия**



# ИГРА

1

Берто и Роберт были арестованы за ограбление банка, не сумев правильно использовать для побега угнанный автомобиль. Полиция не может доказать, что именно они ограбили банк, но поймала их с поличным в украденном автомобиле. Их развели по разным комнатам и каждому предложили сделку: сдать сообщника и отправить его за решетку на 10 лет, а самому выйти на свободу. Но если они оба сдадут друг друга, то каждый получит по 7 лет. Если же никто ничего не скажет, то оба сядут на 2 года только за угон автомобиля.



# ИГРА

Давайте быстро поделим **2** 100\$. Вы и я решаем, сколько из сотни мы требуем и одновременно озвучиваем суммы. Если наша общая сумма меньше ста, каждый получает то, что хотел. Если общее количество больше ста, тот, кто попросил наименьшее количество, получает желаемую сумму, а более жадный человек получает то, что осталось. Если мы просим одинаковую сумму, каждый получает 50 \$. Сколько вы попросите? Как вы разделите деньги? Существует единственный выигрышный ход.

## А также обычные игры



**Игроки** – заинтересованные стороны в игре.

**Партия игры** – каждый конкретный пример разыгрывания игры некоторым конкретным образом от начала до конца.

**Ход игрока** – выбор и осуществление действия производимого одним игроком в условиях точно определенных правилами игры.

Игра состоит из **ХОДОВ**, выполняемых игроками  
одновременно или последовательно



**ЛИЧНЫЙ**

**СЛУЧАЙНЫЙ**

Ход называется **ЛИЧНЫМ**, если игрок сознательно выбирает его из совокупности возможных вариантов действий и осуществляет его.



Ход называется **случайным**,  
если его выбор производится не  
игроком, а каким-либо  
механизмом  
случайного выбора



**Стратегией** игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

*В простых (одноходовых) играх, когда в каждой партии игрок может сделать лишь по одному ходу, понятие стратегии и возможного варианта действий совпадают.*

Стратегия игрока называется **оптимальной**, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник.





**Задание 26.** Два игрока, Паша и Вова, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в кучу 1 камень или 10 камней. Например, имея кучу из 7 камней, за один ход можно получить кучу из 8 или 17 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 41. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 41 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 40$ .

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) Укажите все такие значения числа  $S$ , при которых Паша может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения  $S$ , и укажите выигрывающие ходы.

б) Укажите такое значение  $S$ , при котором Паша не может выиграть за один ход, но при любом ходе Паши Вова может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вовы.

2. Укажите два значения  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём Паша не может выиграть за один ход, но может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Вова. Для указанных значений  $S$  опишите выигрышную стратегию Паши.

3. Укажите значение  $S$ , при котором у Вовы есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши, однако у Вовы нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Вовы.

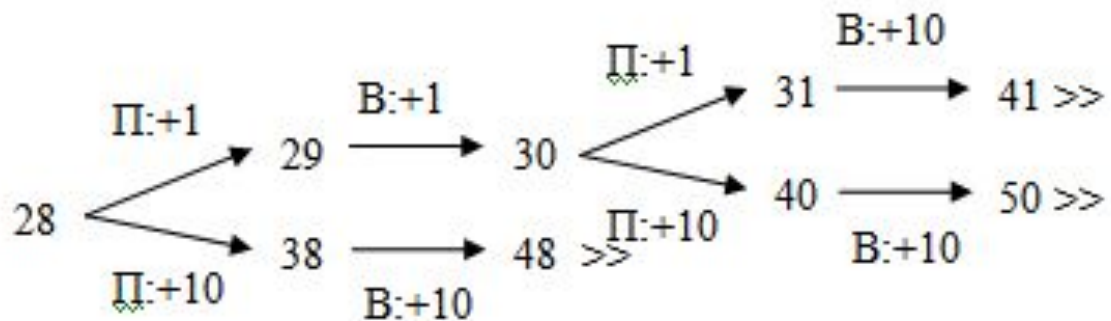
1. а) Паша может выиграть, если  $S = 31, \dots, 40$ . При меньших значениях  $S$  за один ход нельзя получить кучу, в которой больше 40 камней. Паше достаточно увеличить количество камней на 10. При  $S < 31$  получить за один ход больше 40 камней невозможно.

б) Вова может выиграть первым ходом (как бы ни играл Петя), если изначально в куче будет  $S = 30$  камней. Тогда после первого хода Пети в куче будет 31 камень или 40 камней. В обоих случаях Ваня увеличивает количество камней на 10 и выигрывает в один ход.

2. Возможные значения  $S$ : 20, 29. В этих случаях Паша, очевидно, не может выиграть первым ходом. Однако он может получить кучу из 30 камней (при  $S = 20$  он увеличивает количество камней на 10; при  $S = 29$  добавляет 1 камень). Эта позиция разобрана в п. 1. б). В ней игрок, который будет ходить (теперь это Вова), выиграть не может, а его противник (то есть Паша) следующим ходом выигрывает.

3. Возможное значение  $S$ : 28. После первого хода Паши в куче будет 29 или 38 камней. Если в куче станет 38 камней, Вова увеличит количество камней на 10 и выигрывает своим первым ходом. Ситуация, когда в куче 29 камней, разобрана в п. 2. В этой ситуации игрок, который будет ходить (теперь это Вова), выигрывает своим вторым ходом.

В таблице изображено дерево возможных партий при описанной стратегии Вовы. Заключительные позиции (в них выигрывает Вова) подчёркнуты. На рисунке это же дерево изображено в графическом виде (оба способа изображения дерева допустимы).



Дерево всех партий, возможных при Вовиной стратегии. РШУЕГЭ.РФ  
 Значком >> обозначены позиции, при которых игра завершается.

**Задание 26** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в кучу один камень** или **увеличить количество камней в куче в пять раз**. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 50 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится более 200. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 201 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 200$ .

Говорят, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока - значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) При каких значениях числа  $S$  Петя может выиграть первым ходом? Укажите все такие значения и выигрывающий ход Пети.

б) Укажите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. опишите выигрышную стратегию Вани.

2. Укажите два значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём (а) Петя не может выиграть первым ходом, но (б) Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для указанных значений  $S$  опишите выигрышную стратегию Пети.

3. Укажите такое значение  $S$ , при котором

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом

- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах — количество камней в позиции.

1. а) Петя может выиграть, если  $S=41, \dots, 200$ . При меньших значениях  $S$  за один ход нельзя получить кучу, в которой больше 200 камней. Пете достаточно увеличить количество камней в 5 раз. При  $S < 41$  получить за один ход больше 200 камней невозможно.

б) Ваня может выиграть первым ходом (как бы ни играл Петя), если исходно в куче будет  $S = 40$  камней. Тогда после первого хода Пети в куче будет 41 камень или 200 камней. В обоих случаях Ваня увеличивает количество камней в 5 раз и выигрывает в один ход.

2. Возможные значения  $S$ : 8, 39. В этих случаях Петя, очевидно, не может выиграть первым ходом. Однако он может получить кучу из 40 камней (при  $S=8$  он увеличивает количество камней в 5 раз; при  $S=39$  - добавляет 1 камень). Эта позиция разобрана в п.

1 б. В ней игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выиграть не может, а его противник (то есть Петя) следующим ходом выигрывает.

3. Возможное значение  $S$ : 38. После первого хода Пети в куче будет 39 или 190 камней. Если в куче станет 190 камней, Ваня увеличит количество камней в 5 раз и выиграет своим первым ходом. Ситуация, когда в куче 39 камней, разобрана в п. 2. В этой ситуации игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выигрывает своим вторым ходом.

**Задание 26** . Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в кучу один камень**, или **добавить в кучу два камня**, или **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11, 12 или 20 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 34 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 33$ .

Говорят, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания.

**Задание 1.**

а) При каких значениях числа  $S$  Петя может выиграть первым ходом? Укажите все такие значения и выигрывающий ход Пети.

б) Укажите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. опишите выигрышную стратегию Вани.

**Задание 2.**

Укажите три значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть первым ходом, но может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанных значений  $S$  опишите выигрышную стратегию Пети.

**Задание 3.**

Укажите такое значение  $S$ , при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом

### **Задание 1.**

а) Петя может выиграть, если  $S = 17, \dots, 33$ . При меньших значениях  $S$  за один ход нельзя получить кучу, в которой будет 34 или более камней. Пете достаточно увеличить количество камней в 2 раза.

б) Ваня может выиграть первым ходом (как бы ни играл Петя), если исходно в куче будет  $S = 16$  камней. Тогда после первого хода Пети в куче будет 17 камней, 18 камней или 22 камня. Во всех случаях Ваня увеличивает количество камней в 2 раза и выигрывает в один ход.

### **Задание 2.**

Возможные значения  $S$ : 8, 14, 15. В этих случаях Петя, очевидно, не может выиграть первым ходом. Однако он может получить кучу из 16 камней (при  $S = 8$  он удваивает количество камней; при  $S = 14$  добавляет 2 камня; при  $S = 15$  добавляет 1 камень). Эта позиция разобрана в п. 1б. В ней игрок, который будет ходить (в данном случае это Ваня), выиграть не может, а его противник (то есть Петя) следующим ходом выигрывает.

### **Задание 3.**

Возможное значение  $S$ : 13. После первого хода Пети в куче будет 14 камней, 15 камней или 26 камней. Если в куче станет 26 камней, то Ваня увеличит количество камней в 2 раза и выиграет своим первым ходом. Ситуация, когда в куче 14 или 15 камней, разобрана в п. 2. В этой ситуации игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выигрывает своим вторым ходом.