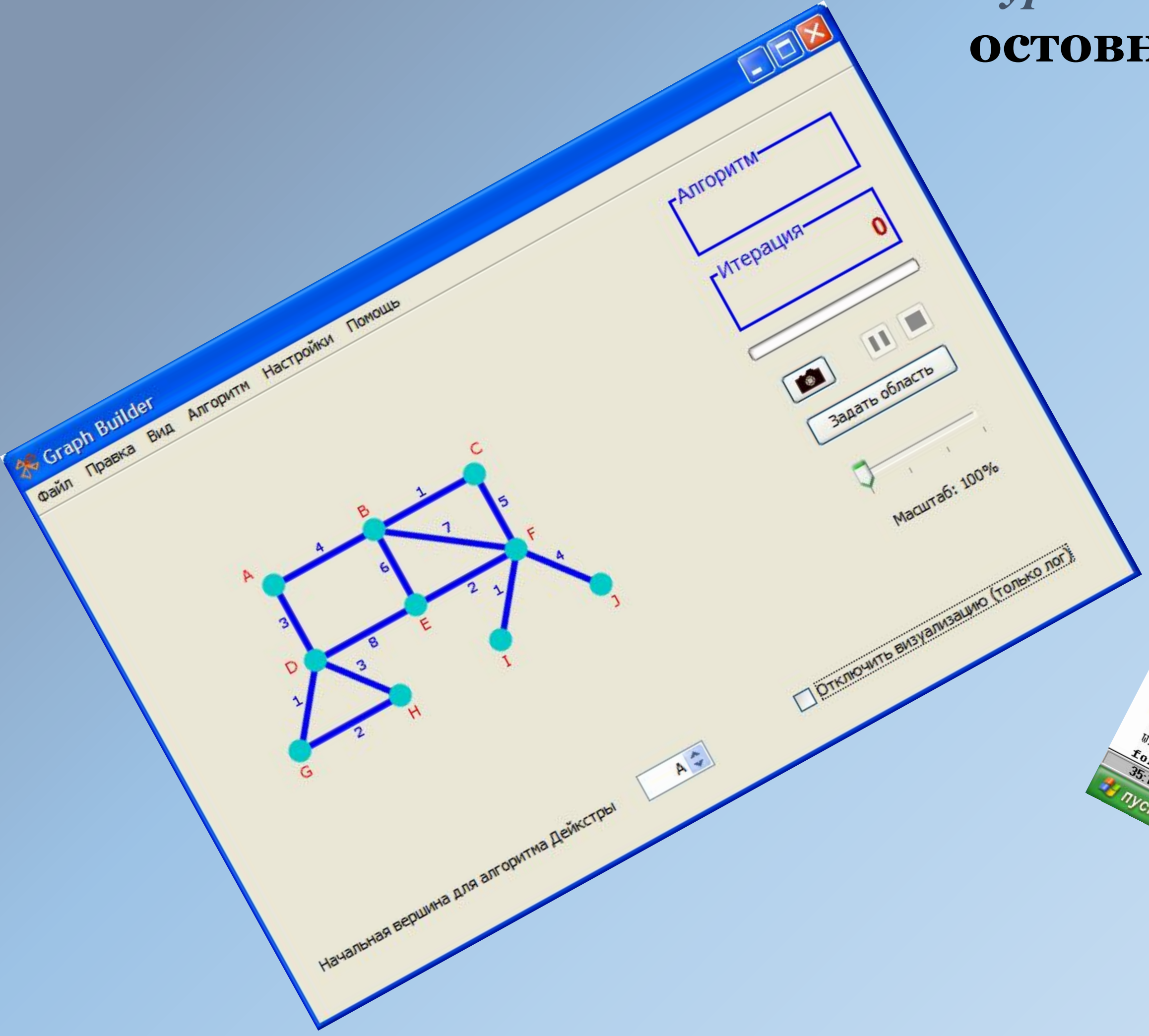
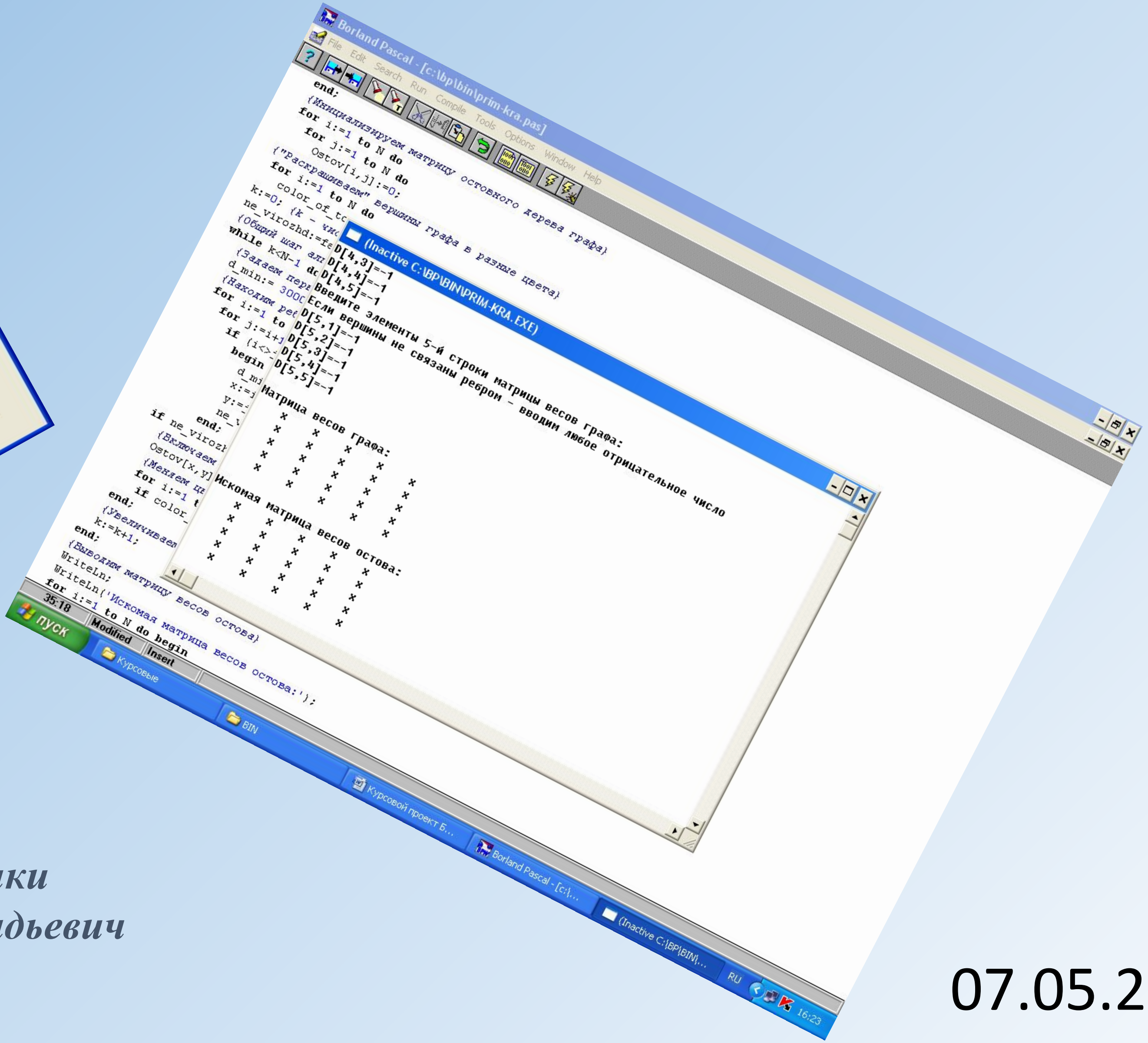
Тема урока: **Алгоритмы Прима и Крускала построения остовного связного дерева минимального веса**

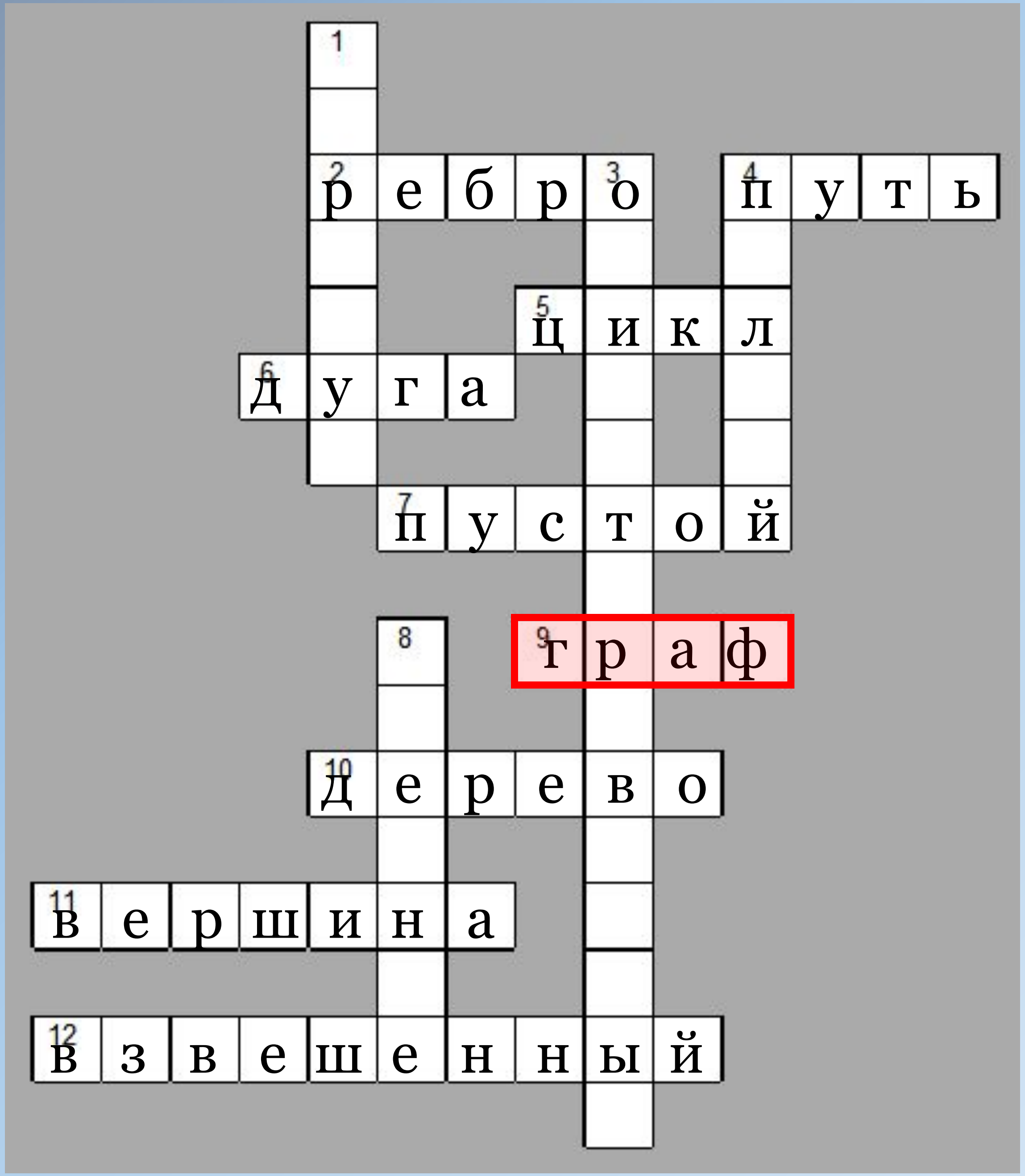




Презентацию подготовил учитель информатики
ГБОУ «Школы № 1905» Панин Геннадий Геннадьевич

07.05.2017

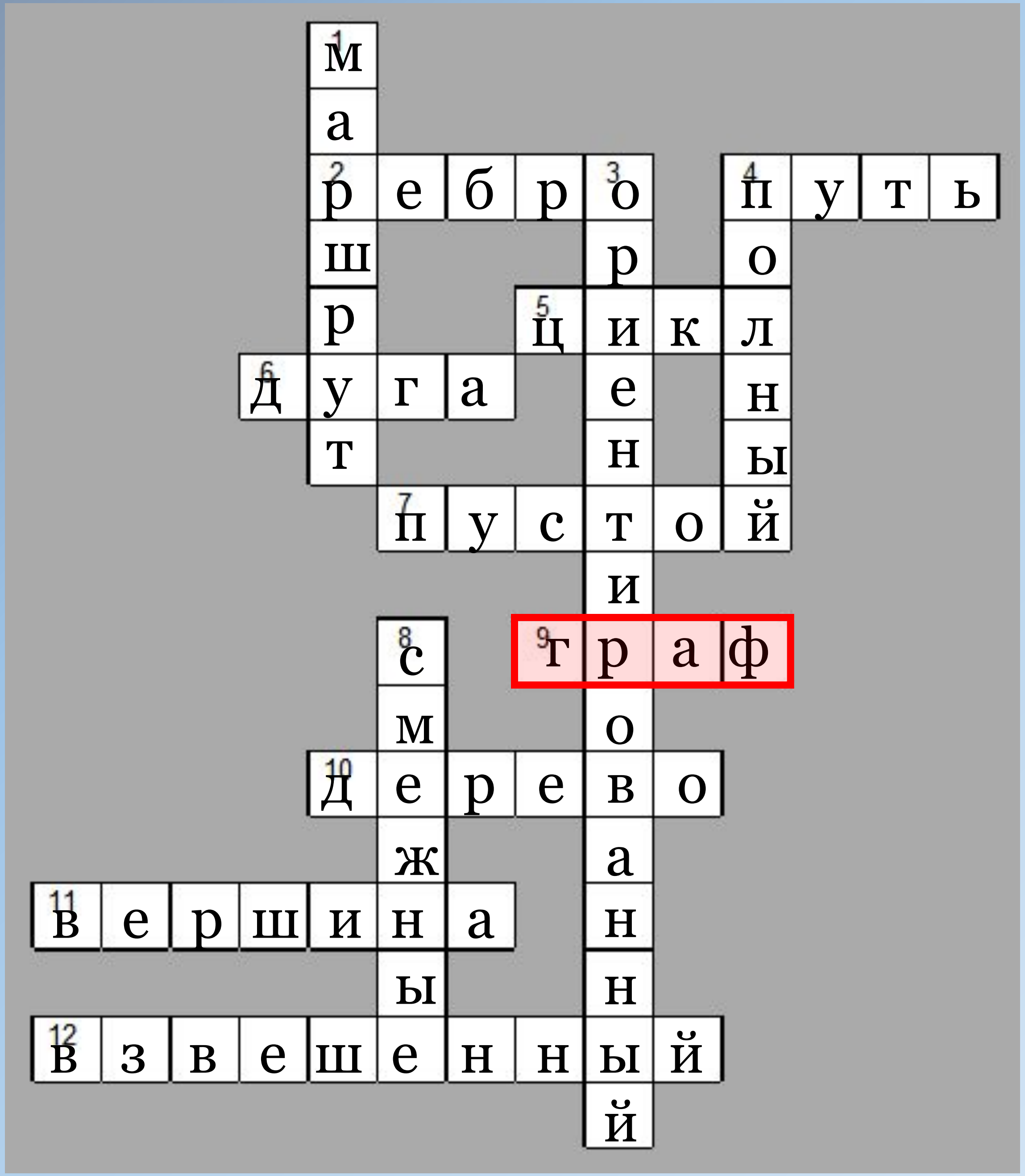
Содержание



Основные понятия теории графов

По горизонтали:

Перейдем к вопросам по вертикали



Основные понятия теории графов

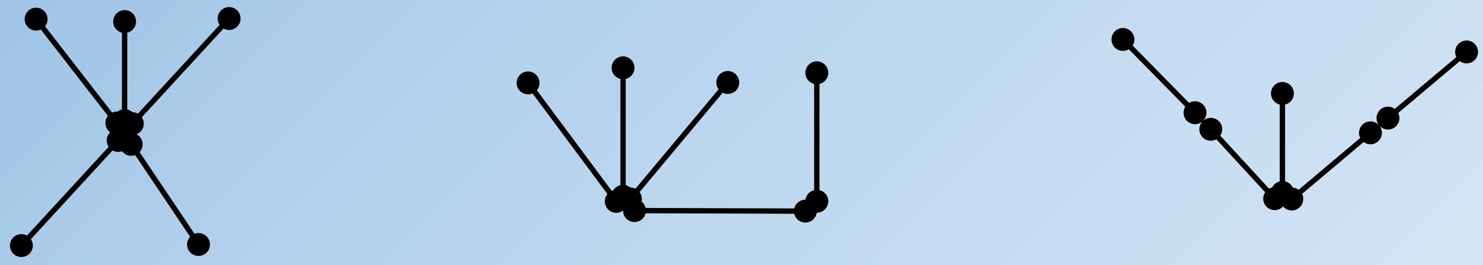
По вертикали:

графа при перемещении.

Перейдем к изучению новых понятий

Основные понятия теории графов
Остовное связное дерево

Остовной связный подграф – подграф графа G, который содержит все его вершины и каждая вершина достижима из любой другой.



Остовное связное дерево – подграф, включающий вершины исходного графа G, не содержащего циклы, каждая вершина которого достижима из любой другой.

Основные понятия теории графов
Цикломатическое число

Цикломатическое число **γ** показывает, сколько ребер нужно удалить из графа, чтобы в нем не осталось циклов

$$\boldsymbol{\gamma = m - n + 1},$$

m - количество ребер

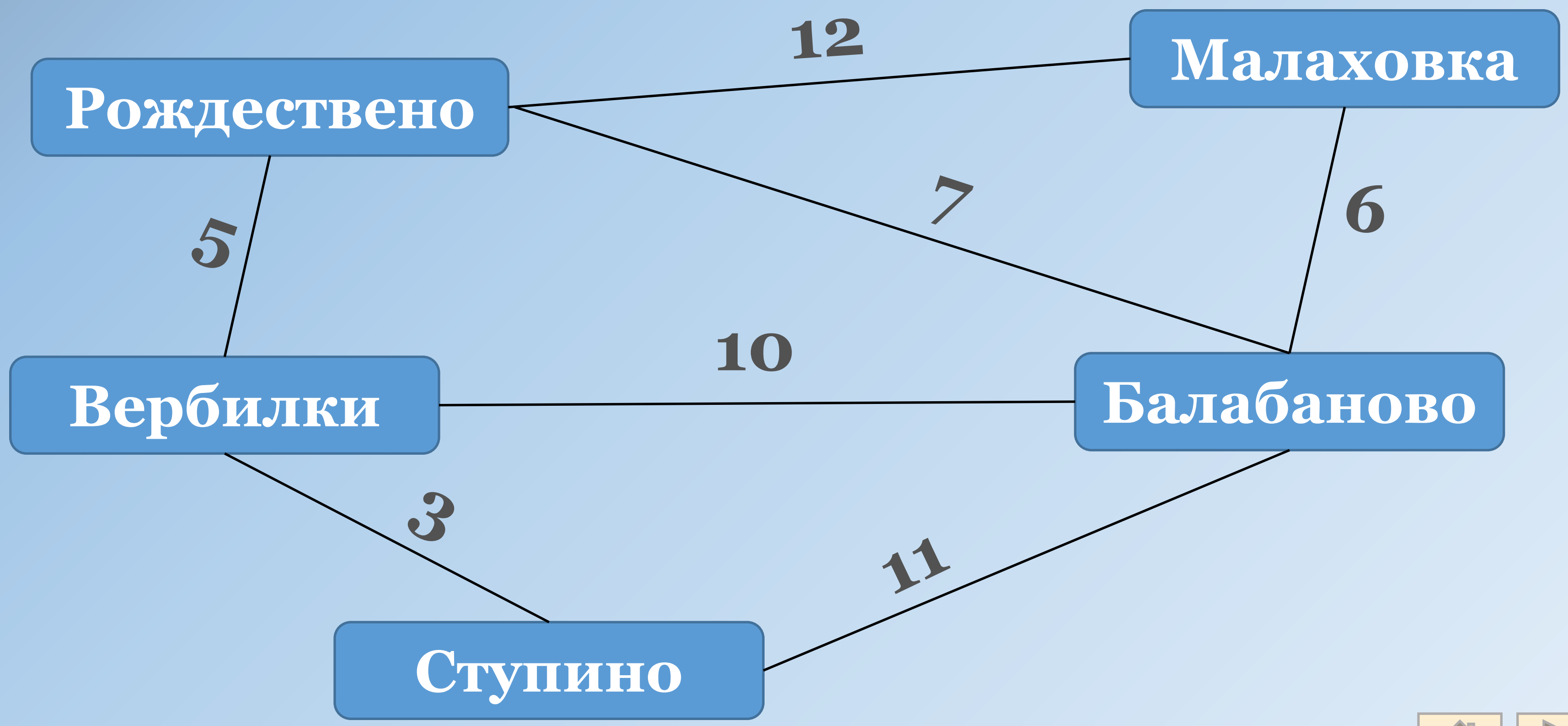
n - количество вершин

Задача 1

В некотором районе было решено провести газопровод между пятью деревнями. От Балабаново до Вербилки идти 10 км, от Вербилки до Ступино – 3 км, от Балабаново до Малаховки – 6 км, от Малаховки до Рождествено – 12 км, от Балабаново до Ступино – 11 км, от Вербилки до Рождествено – 5 км, от Балабаново до Рождествено – 7 км. Как необходимо провести трубу, чтобы она соединяла все пять деревень, и затраты при этом были минимальными?

Задача 1

Построим граф, моделирующий дороги, соединяющие деревни.



Задача 1

Задача сводится к построению остовного связного дерева минимального веса.

Рассчитаем цикломатическое число.

m (количество ребер) равно **7**

n (количество вершин) рано **5**

$$\gamma = 7 - 5 + 1 = 3$$

Т.е. три деревни напрямую соединены газовой трубой не будут.

Алгоритм Прима

Пусть дан взвешенный неориентированный граф.

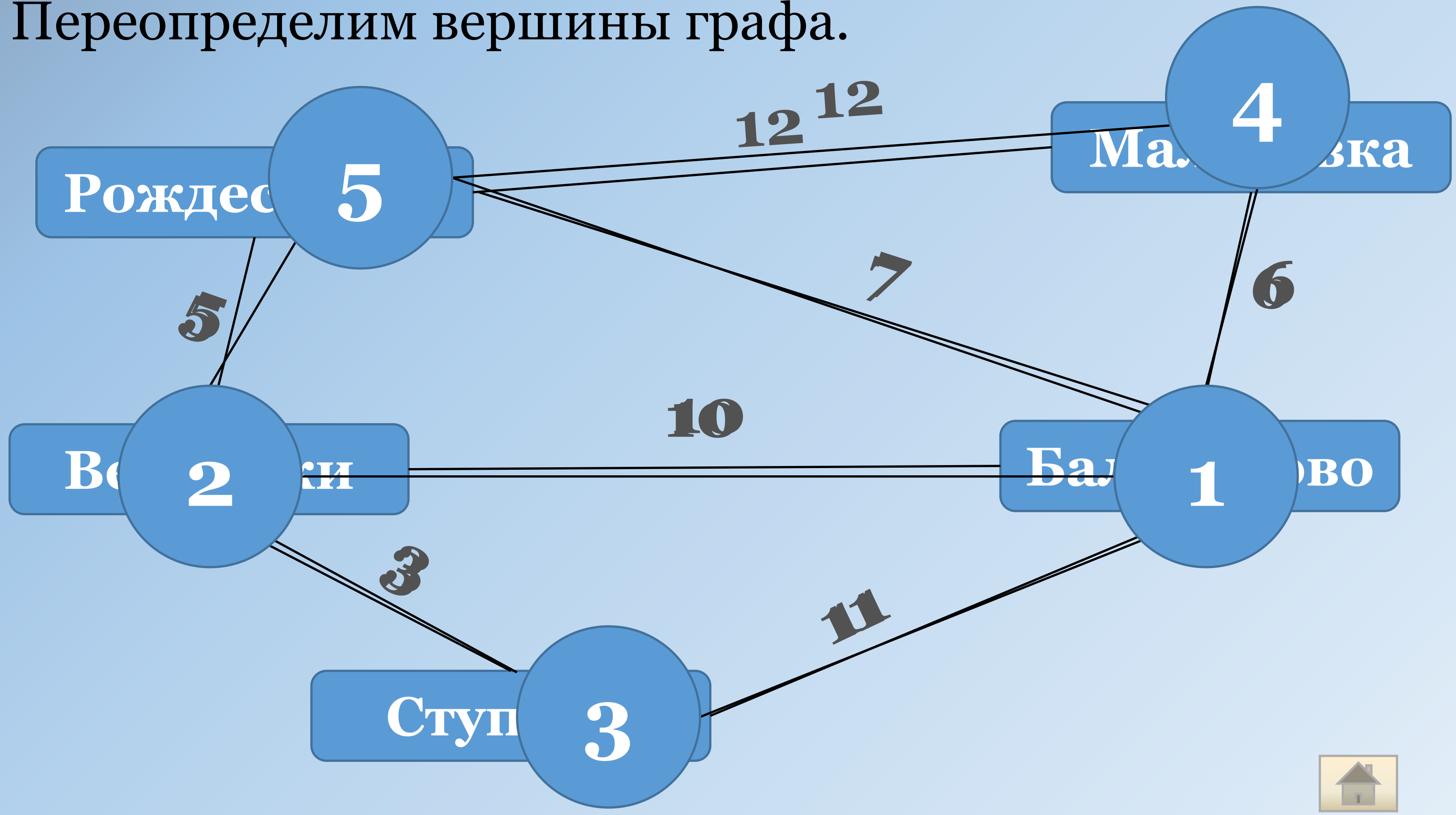
Для построения минимального остовного дерева необходимо:

1. Представить граф в виде матрицы смежности
2. Найти в матрице наименьший элемент, соответствующий ребру, соединяющему i-ю и j-ю вершины графа
3. Вычеркнуть элементы i-й и j-й строки матрицы
4. Пометить i-й и j-й столбцы матрицы
5. В помеченных столбцах i и j найти наименьший элемент, отличный от уже найденного
6. Повторять пункты 3-5 до тех пор, пока не будут задействованы все вершины графа

Задача 1

Решим задачу по алгоритму Прима.

Переопределим вершины графа.



Задача 1

Представим граф в виде матрицы смежности.

	1	2	3	4	5
1	0	10	11	6	7
2	10	0	**3**	0	5
3	11	**3**	0	0	0
4	6	0	0	0	12
5	7	5	0	12	0

Найдем минимальный элемент.

Он равен **3**

Задача 1

Вычеркнем 2-ю и 3-ю строки таблицы. А столбцы 2 и 3 выделим.

	1	2	3	4	5
1	0	10	11	6	7
2			3		
3					
4	6	0	0	0	12
5	7	5	0	12	0

Найдем минимальный элемент в выделенных столбцах.

Он равен **5**

Задача 1

Вычеркнем 5-ю строку таблицы. А столбец 5 выделим.

	1	2	3	4	5
1	0	10	11	6	7
2			3		
3					
4	6	0	0	0	12
5		5			

Найдем минимальный элемент в выделенных столбцах.

Он равен 7

Задача 1

Вычеркнем 1-ю строку таблицы. А столбец 1 выделим.

	1	2	3	4	5
1					7
2			3		
3					
4	6	0	0	0	12
5		5			

Найдем минимальный элемент в выделенных столбцах.

Он равен **6**

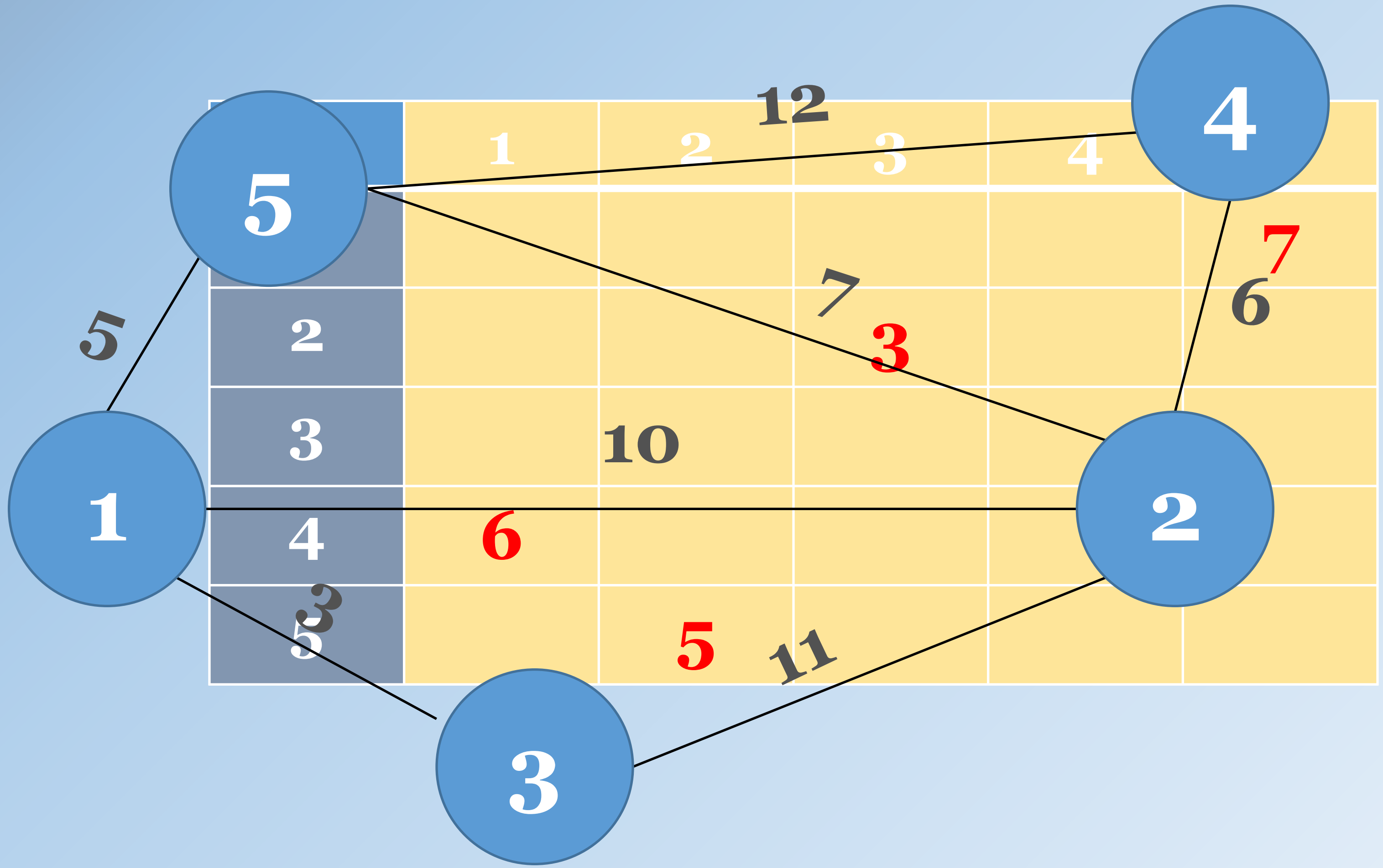
Задача 1

Вычеркнем 4-ю строку таблицы. А столбец 4 выделим.

	1	2	3	4	5
1					7
2			3		
3					
4	6				
5		5			

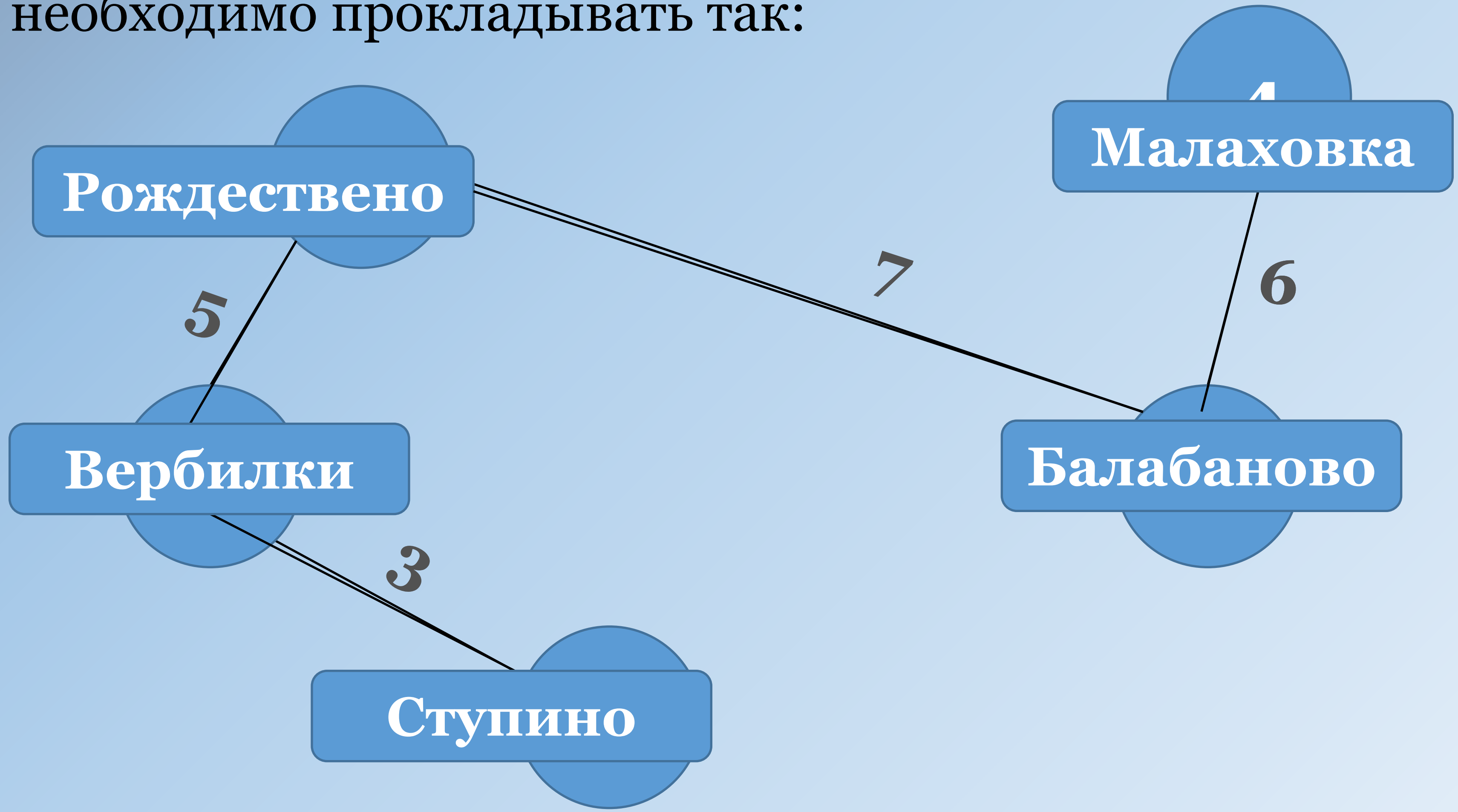
Задача 1

Получаем связное остовное дерево минимальное веса.



Задача 1

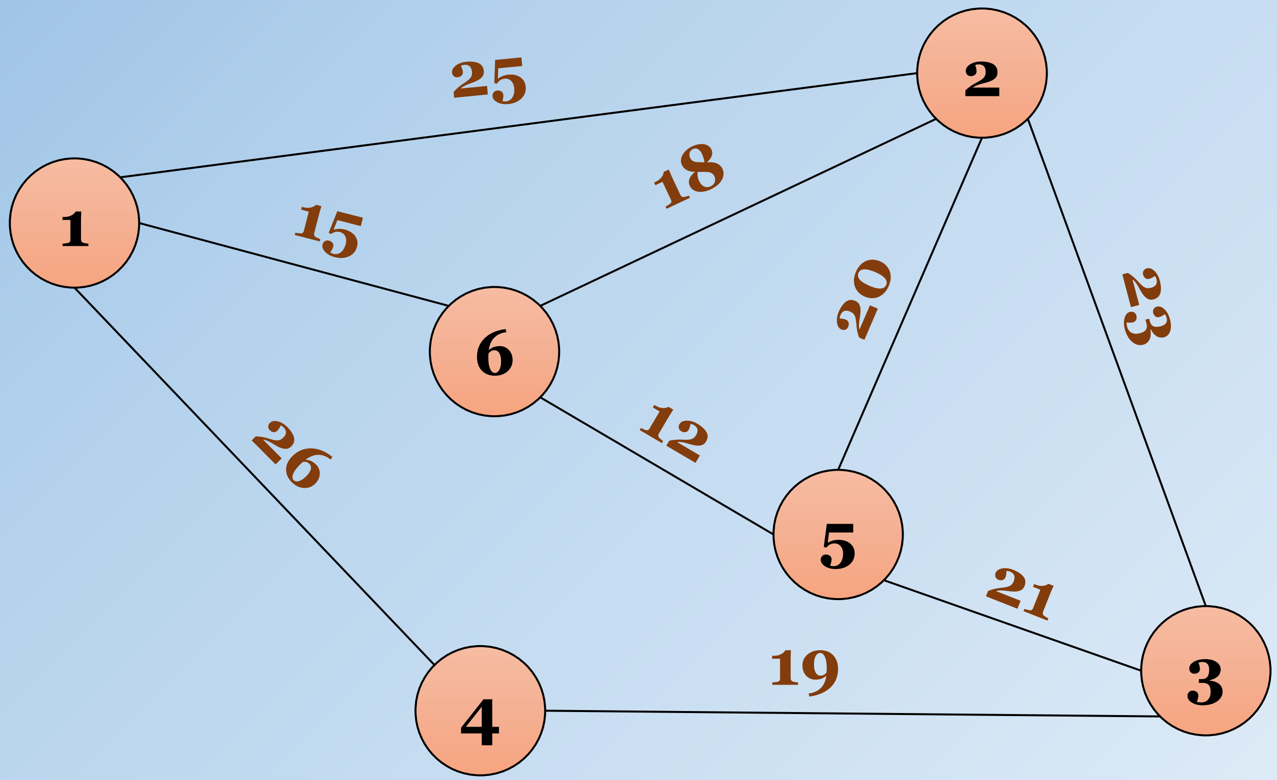
Ответ: газопровод с минимальными затратами необходимо прокладывать так:



Протяженность газопровода – **21 км**.

Задача 2

Даны города, часть которых соединена между собой дорогами. Необходимо проложить туристический маршрут минимальной длины, проходящий через все города.



Задача 2

Задача сводится к построению остовного связного дерева минимального веса.

Рассчитаем цикломатическое число.

m (количество ребер) равно **9**

n (количество вершин) рано **6**

$$\gamma = 9 - 6 + 1 = 4$$

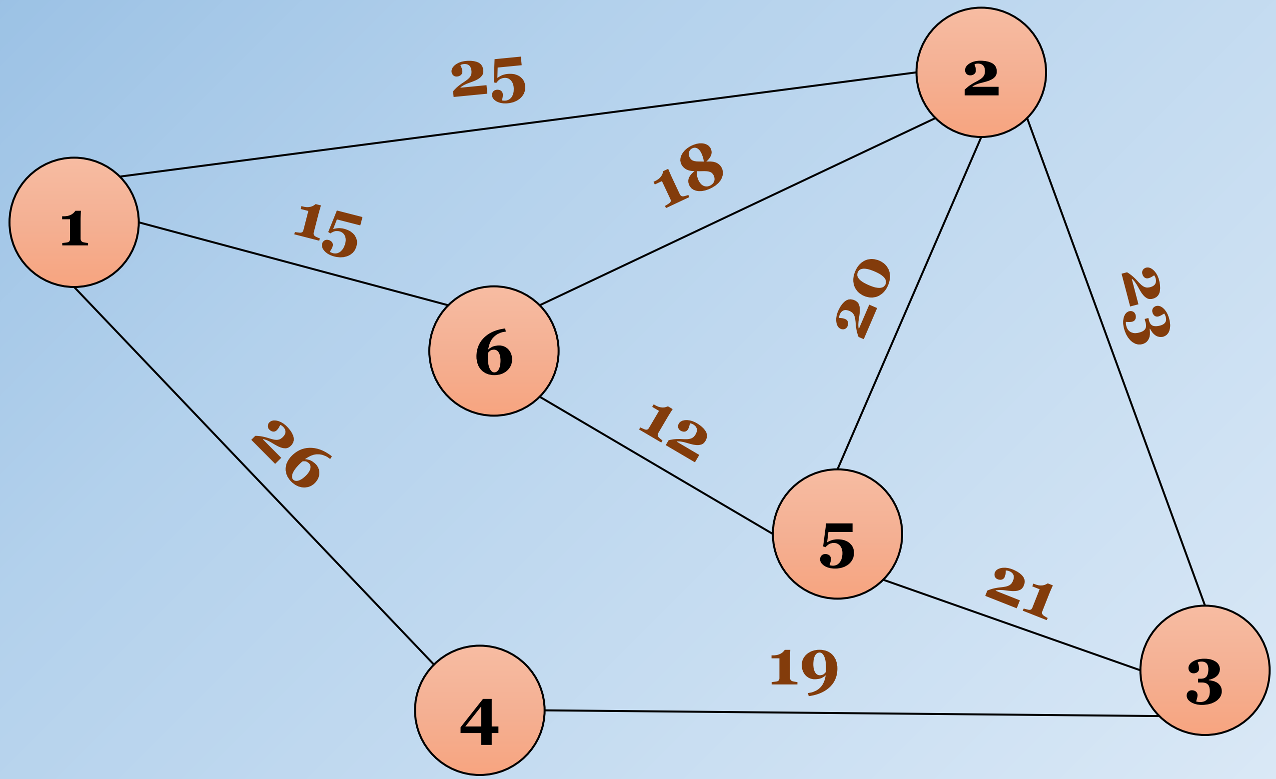
Т.е. четыре дороги, соединяющие города, не будут включены в туристический маршрут.

Алгоритм Крускала

1. Удалить все ребра и получить остовной подграф с изолированными вершинами.
2. Отсортировать ребра по возрастанию.
3. Ребра последовательно, по возрастанию их весов, включаются в остовное дерево. Возможны случаи:
   а) обе вершины включаемого ребра принадлежат одноэлементным подмножествам, тогда они объединяются в новое, связное подмножество;
   б) одна из вершин принадлежит связному подмножеству, другая нет, тогда включаем вторую в подмножество, которому принадлежит первая;
   в) обе вершины принадлежат разным связным подмножествам, тогда объединяем подмножества;
   г) обе вершины принадлежат одному связному подмножеству, тогда исключаем данное ребро.
4. Алгоритм завершается, когда все вершины будут объединены в одно множество.

Задача 2

Для определения туристического маршрута минимальной длины воспользуемся алгоритмом Крускала.

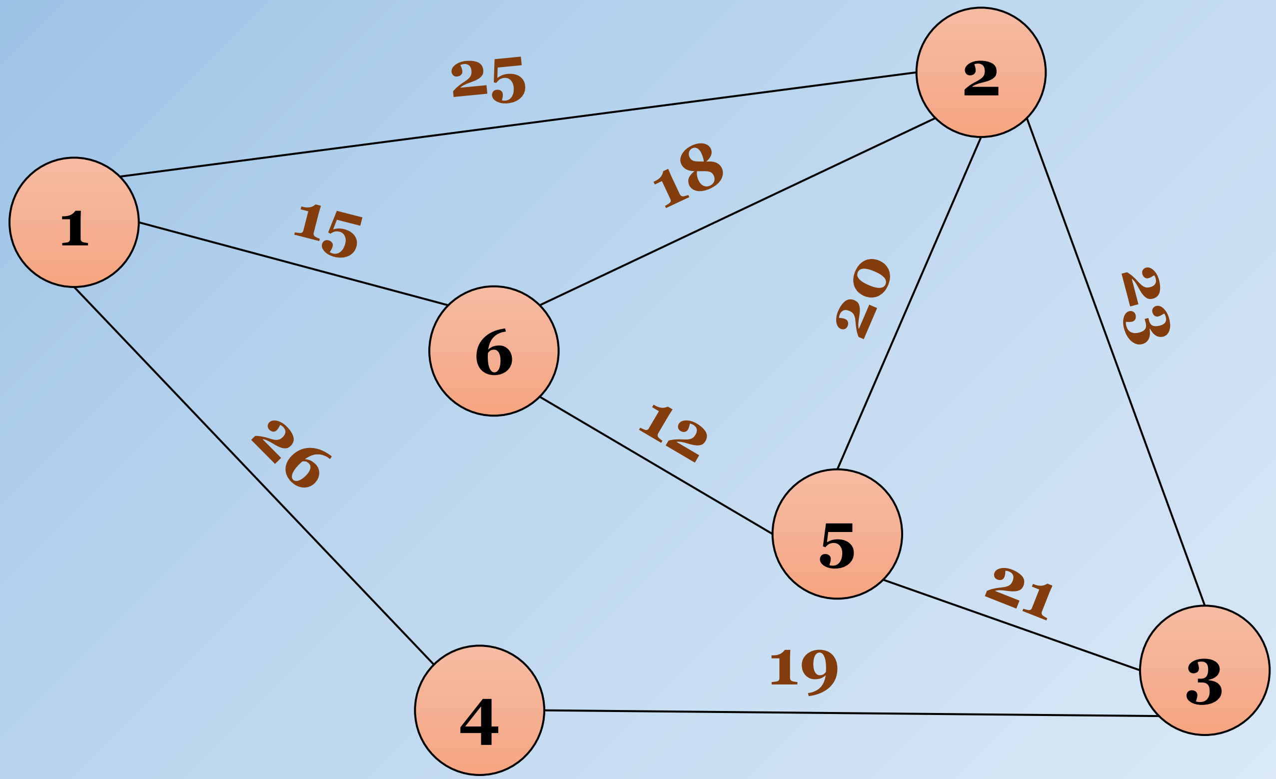


Задача 2

Построим остовной подграф, содержащий только изолированные вершины.

Получаем шесть одноэлементных подмножеств.

Шаг 1



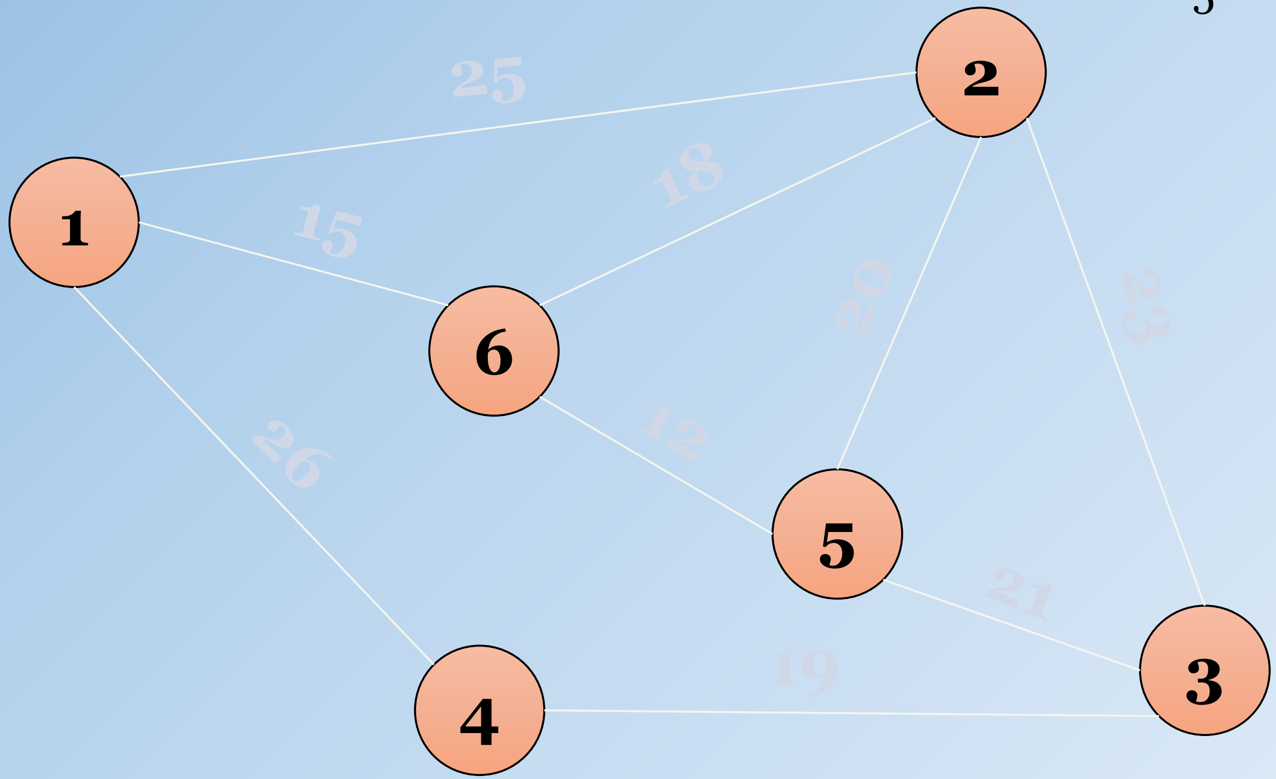
пуск

Задача 2

Найдем ребро минимального веса и добавим его в остовной подграф.

Образуется связное подмножество вершин $\{V_5, V_6\}$.

Шаг 2



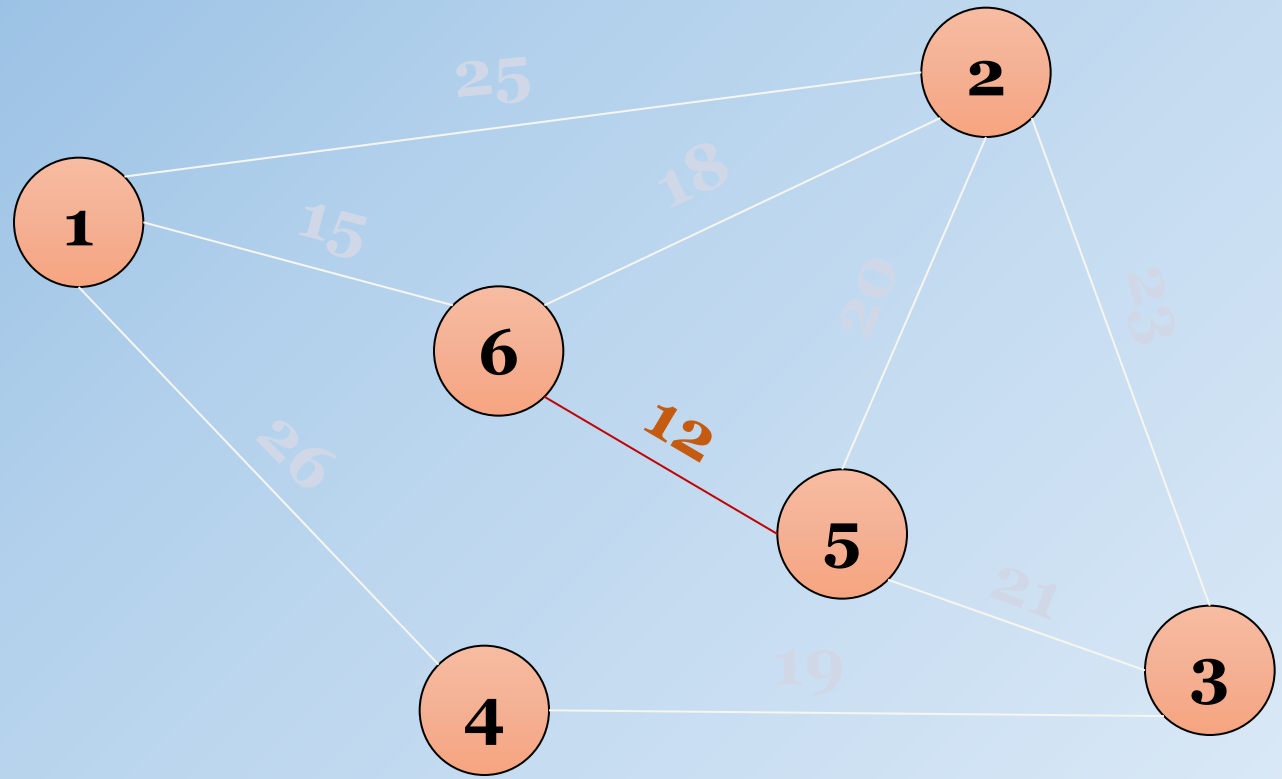
пуск

Задача 2

Среди оставшихся ребер найдем ребро минимального веса и добавим его в остовной подграф.

Добавляем в подмножество вершин еще одну $\{V_5, V_6, V_1\}$.

Шаг 3



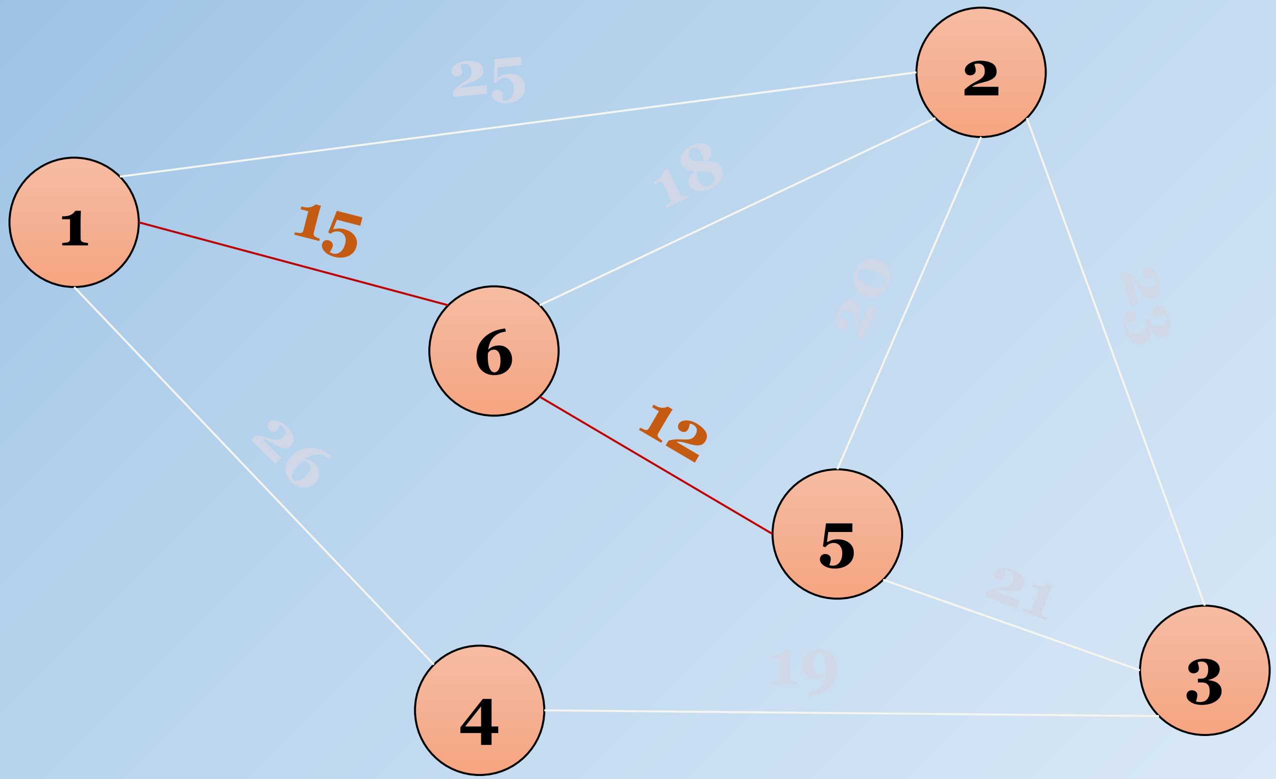
пуск

Задача 2

Среди оставшихся ребер найдем ребро минимального веса и добавим его в остовной подграф.

Добавляем в подмножество вершин еще одну $\{V_5, V_6, V_1, V_2\}$.

Шаг 4



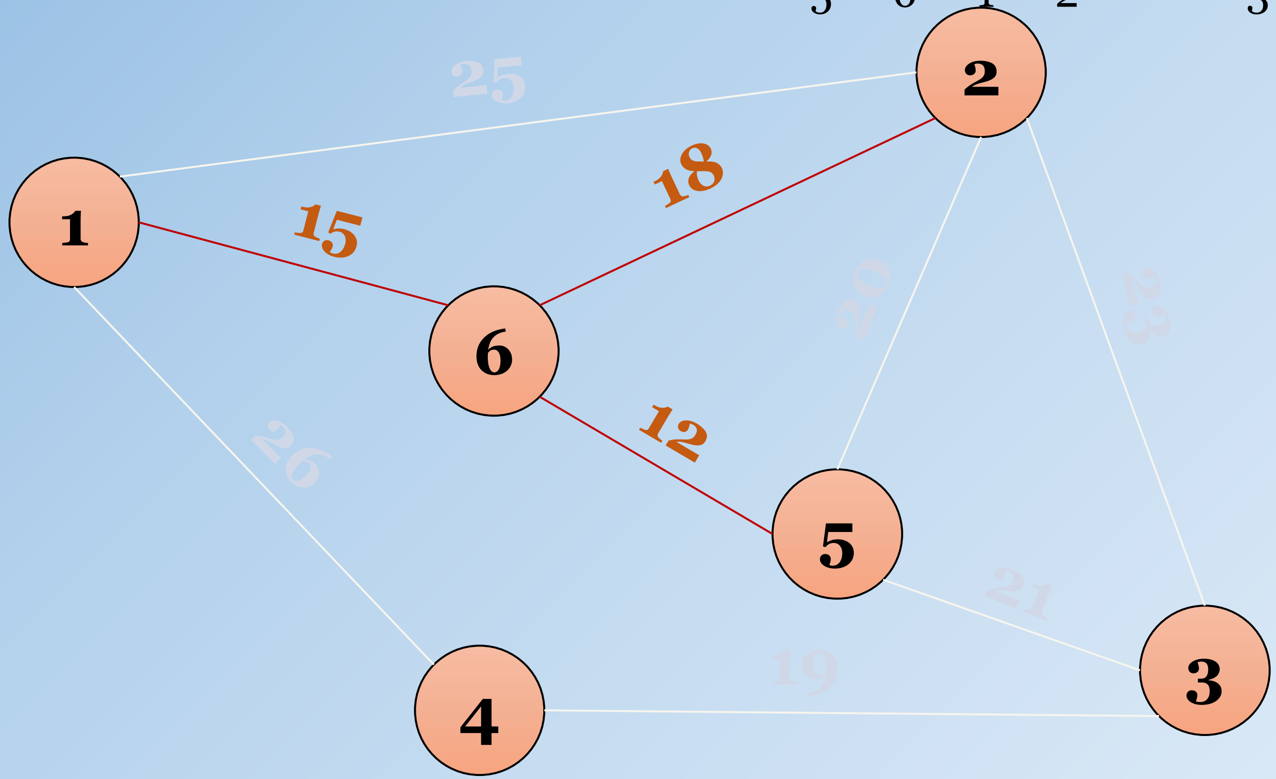
пуск

Задача 2

Среди оставшихся ребер найдем ребро минимального веса и добавим его в остовной подграф.

Образуется два подмножества $\{V_5, V_6, V_1, V_2\}$ и $\{V_3, V_4\}$.

Шаг 5



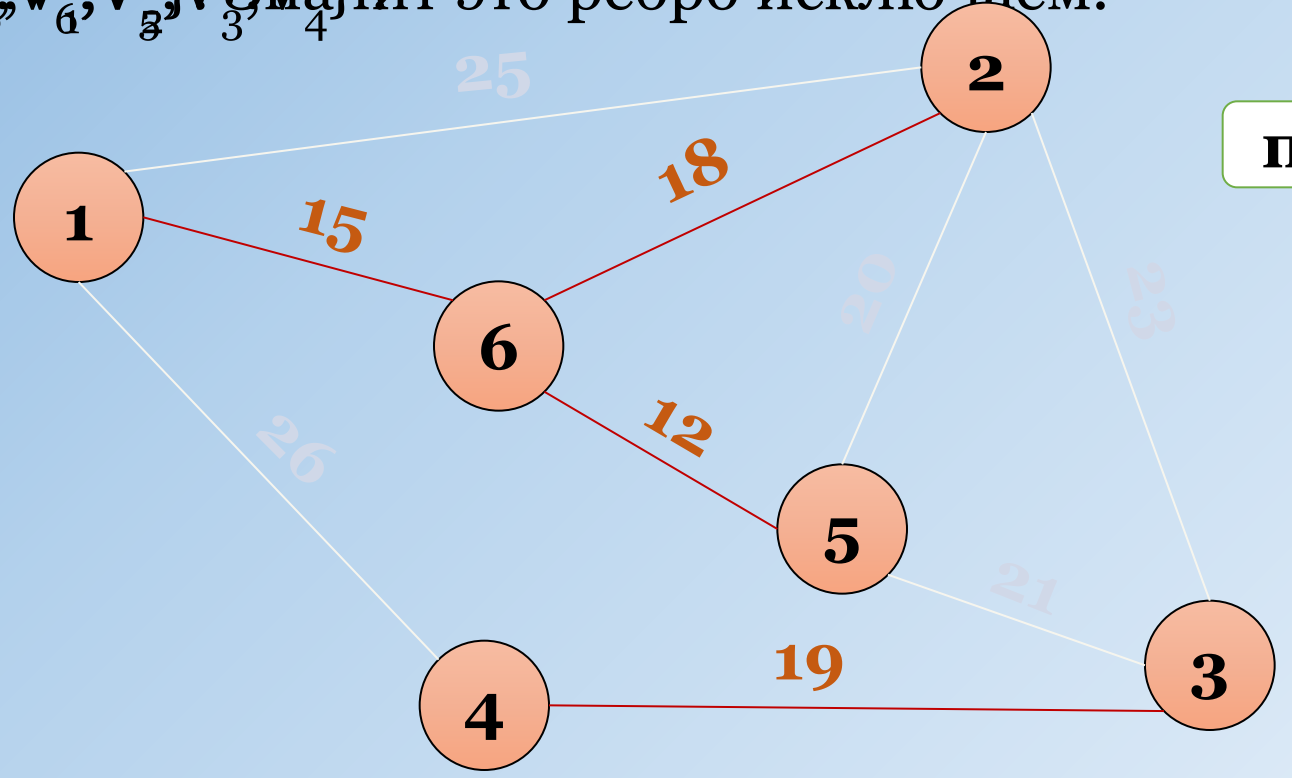
пуск

Задача 2

Среди оставшихся ребер найдем ребро минимального веса и добавим его в остовной подграф.

Но обе вершины принадлежат одному связному множеству {V_3, V_4}. Значит это ребро исключаем.

Шаг 6



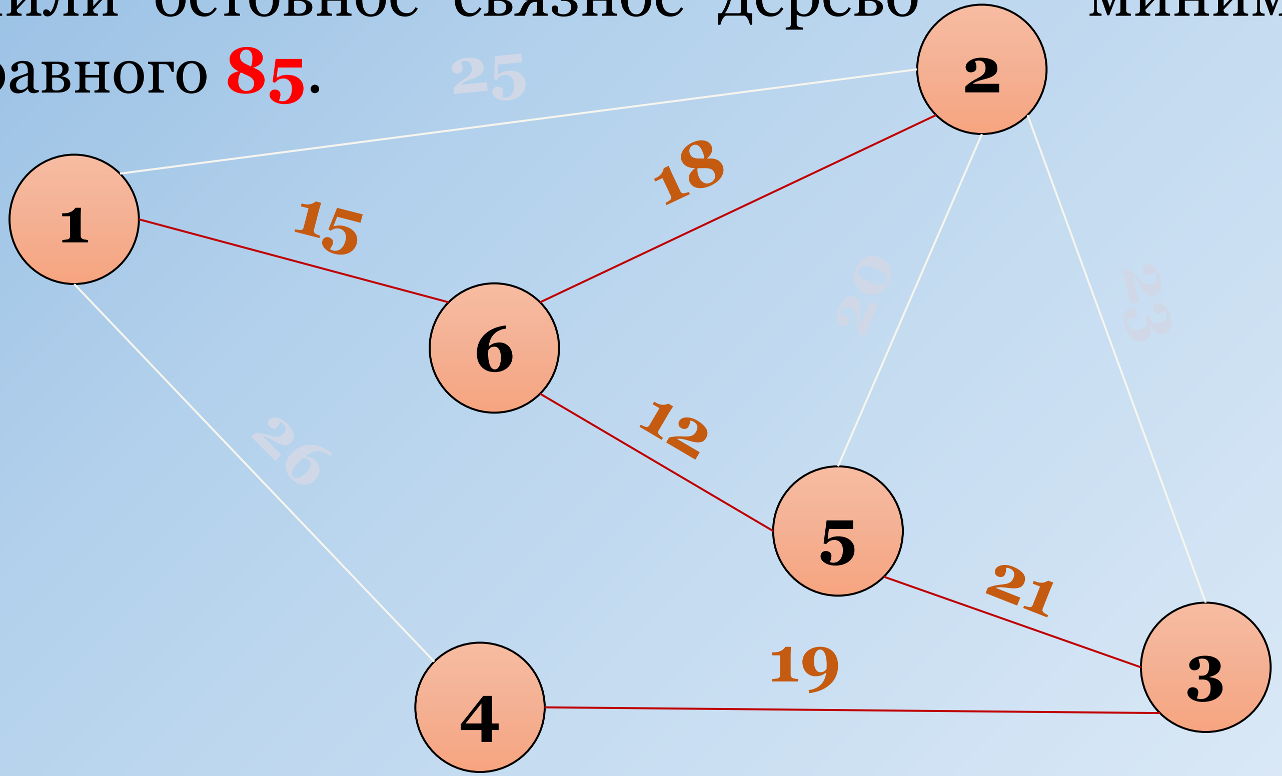
пуск (2)

Задача 2

Остальные ребра включать в граф не надо, т.к. все их вершины уже принадлежат одному связному множеству.

Получили остовное связное дерево минимального веса, равного **85**.

Итог



Вопросы

Построенный граф (в задачах 1 и 2) является

- **остовным**
- **связным**
- **деревом**
- **с минимальным весом**

В граф включены все вершины

Все вершины в графе можно соединить маршрутами

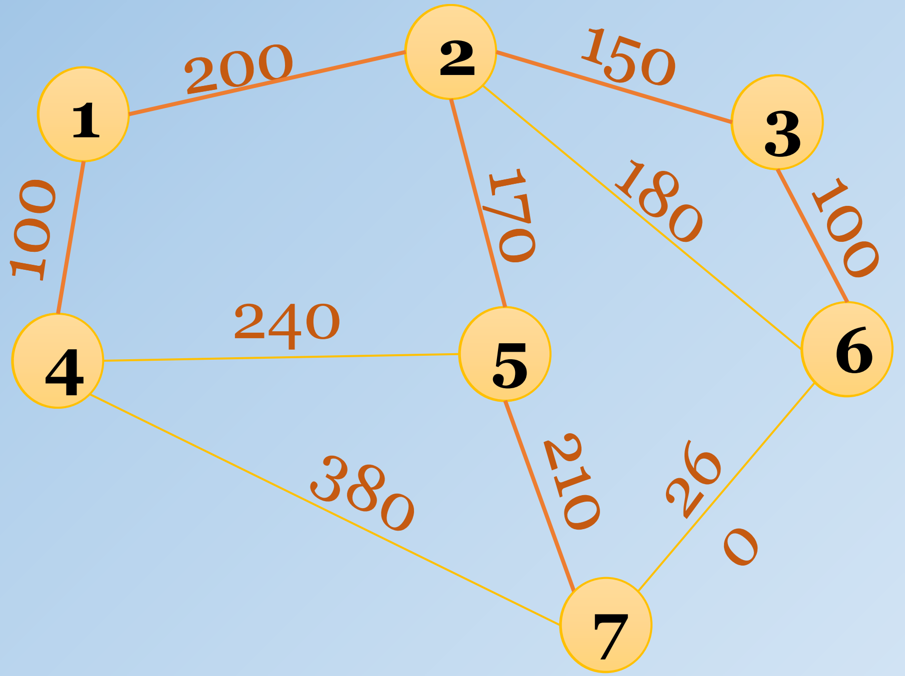
В графе отсутствуют циклы

В граф последовательно включались ребра, отсортированные по возрастанию весов

Почему?

Задача 3

На строительном участке необходимо создать телефонную сеть, соединяющую все бытовки. Для того, чтобы телефонные линии не мешали строительству, их решили проводить вдоль дорог. Схема участка изображена на рисунке.



Ответ

Каким образом провести телефонные линии, чтобы их общая длина была минимальной?

Общая длина телефонной линии равна **930** метров

Литература

- Занимательные задачи по теории графов: Учеб.-метод. пособие / О. И. Мельников. – Изд - е 2-е, стереотип. – Мн.: «ТетраСистемс», 2001

- Информатика и ИКТ. Профильный уровень: учебник для 11 класса / Н. Д. Угринович. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010.

- Кроссворд создан на сайте и расположен по адресу http://puzzlecup.com/?guess=3C2D4A01E0522AAU

выход