# Решение задач С-2 методом объемов

Составила : учитель математики Воробьева Г.В.
МБОУСОШ № 150 г. Красноярск.

**Данный метод применим для задач :**

-нахождение расстояния между двумя скрещивающими прямыми.

-нахождение расстояния от точки до плоскости.

**Алгоритм метода объемов.**

- построить пирамиду, в которой высота, опущенная из вершины этой пирамиды на плоскость основания, является искомым расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми;
- доказать, что эта высота и есть искомое расстояние;
- найти объём этой пирамиды двумя способами;
- и выразить эту высоту;

**При решении задач данного типа используется следующие утверждение:**

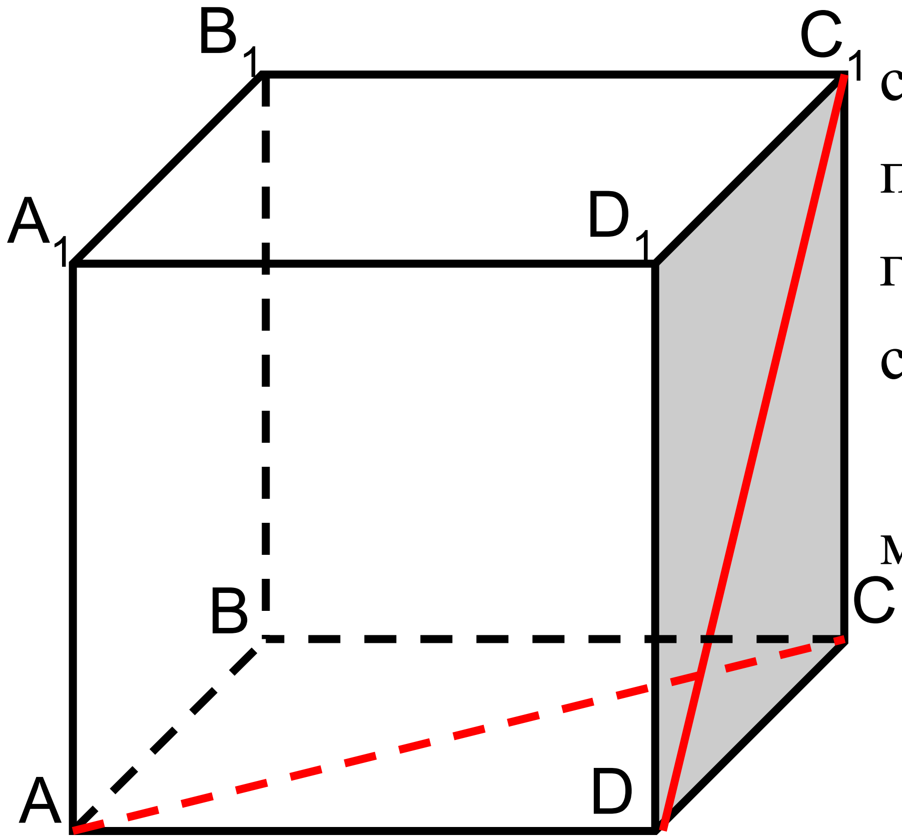
1.Если объем пирамиды ABCD равен V, то расстояние от точки D до плоскости α, содержащей треугольник ABC, вычисляется по формуле

**d=** $\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \dfrac{6V_{ABCD}}{AB \cdot BC \cdot \sin ABC}$

2.Расстояние м/у скрещивающими прямыми , содержащими отрезки
AB и C D соответственно , можно вычислить по формуле $\frac{6V}{AB \cdot CD \cdot \sin\alpha}$

Где $\alpha$ угол м/у прямыми AB и C D,

V- объем тетраэдра ABCD




Пусть AC и $DC_1$ – скрещивающиеся прямые, принадлежащие смежным граням ABCD и $DD_1C_1C$ соответственно.

Найдём расстояние между ними.

Дополнительное построение:

$AB_1$, $CB_1$ и $DB_1$.

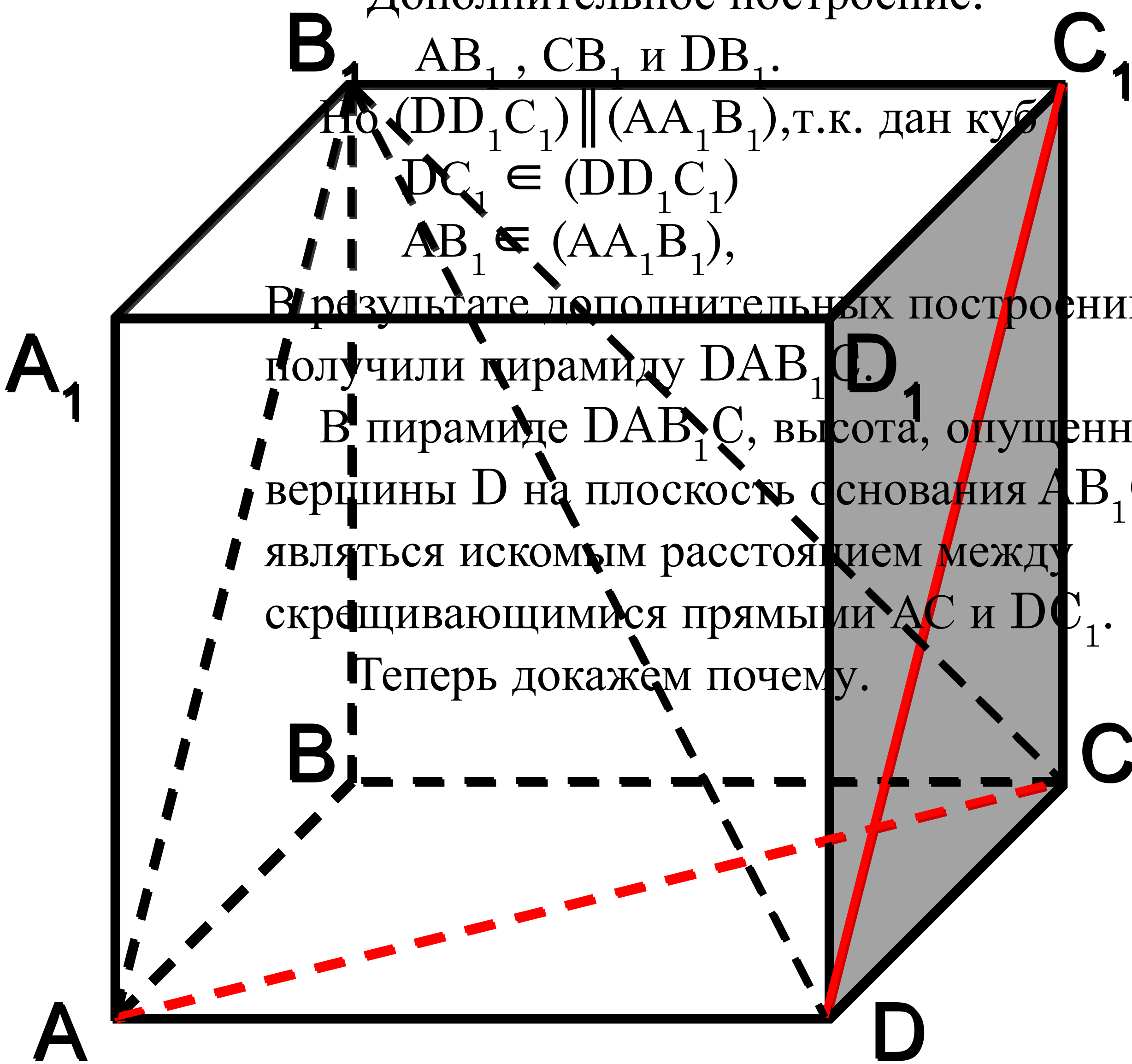
Но $(DD_1C_1) \parallel (AA_1B_1)$, т.к. дан куб

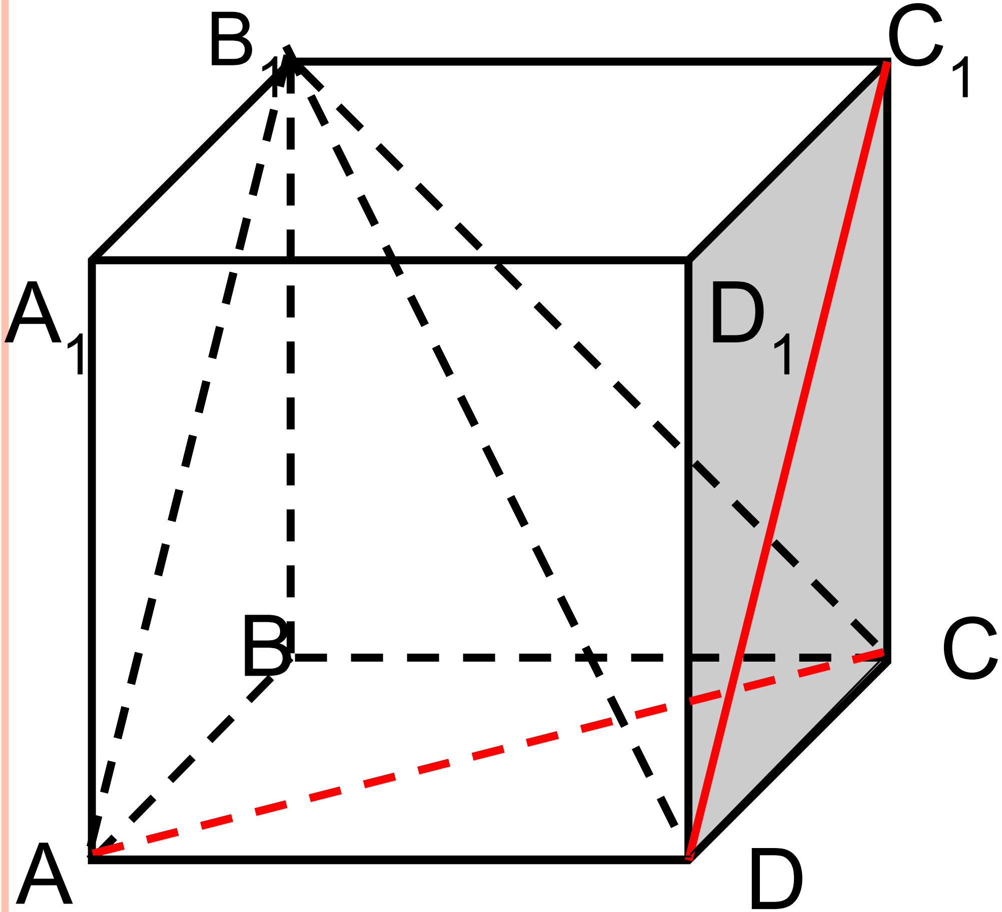
$$\left.\begin{aligned} DC_1 &\in (DD_1C_1) \\ AB_1 &\in (AA_1B_1), \end{aligned}\right\} DC_1 \parallel AB_1$$

В результате дополнительных построений мы получили пирамиду $DAB_1C$.

В пирамиде $DAB_1C$, высота, опущенная из вершины D на плоскость основания $AB_1C$ будет являться искомым расстоянием между скрещивающимися прямыми AC и $DC_1$.

Теперь докажем почему.






Высота, опущенная из вершины D на плоскость основания $AB_1C$, перпендикулярна плоскости этого основания. Значит, она перпендикулярна любой прямой принадлежащей этой плоскости (по определению).

Но $AC \in (AB_1C)$

$AB_1 \in (AB_1C)$ $\quad h \perp AB_1$

$h \perp (AB_1C)$ $\quad h \perp AC$

Но, с другой стороны $AB_1 \parallel DC_1$

$AB_1 \perp h$

Значит, $h \perp DC_1$.

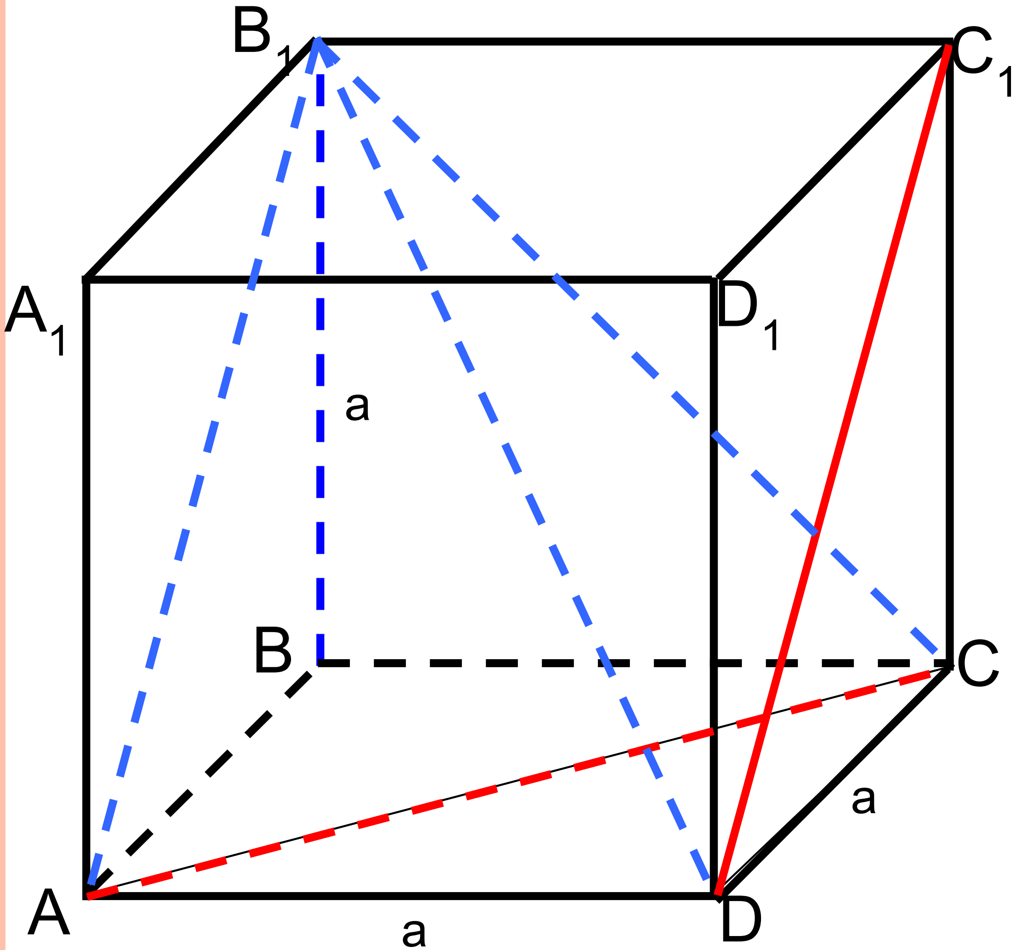
Имеем: $h \perp DC_1$

$h \perp AC$

Следовательно, h – общий перпендикуляр для скрещивающихся прямых AC и $DC_1$.

Что и требовалось доказать.

Найдём эту высоту.



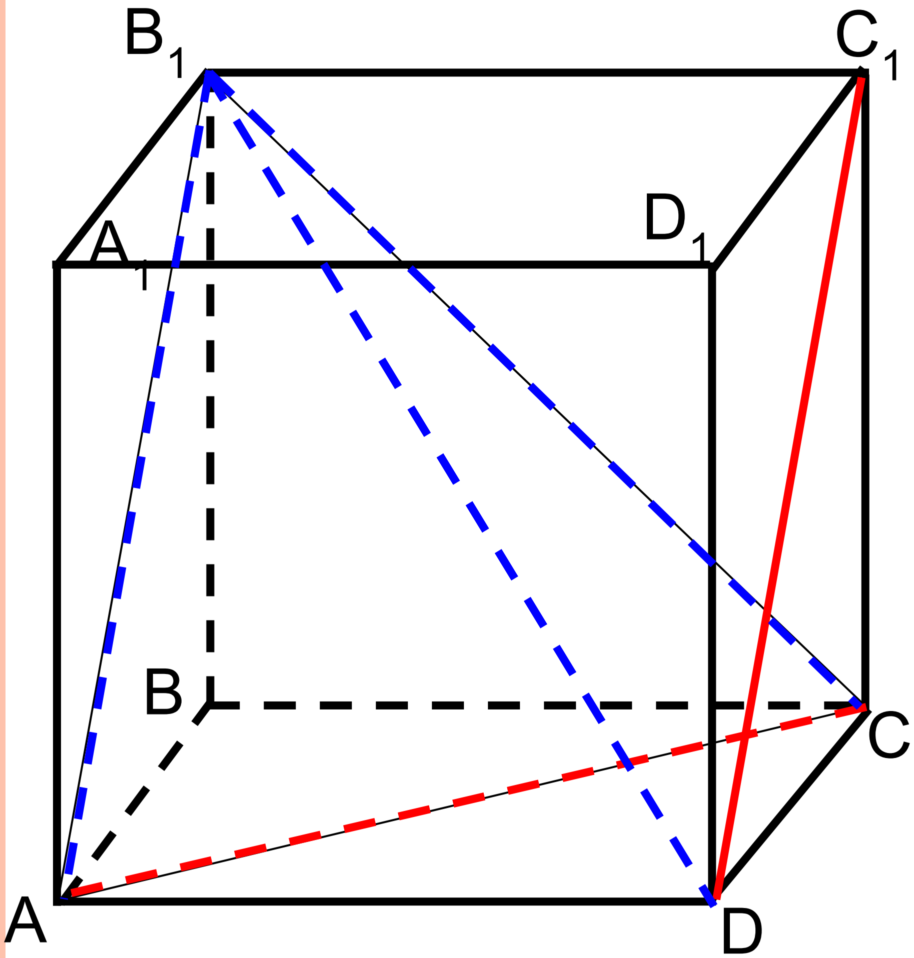

Рассмотрим пирамиду $B_1ACD$:

$V_1 = ⅓ \cdot h \cdot S_{ACD}$.

$h = B_1B = a$

$S_{ACD} = ½ \cdot CD \cdot AD = ½ \cdot a^2$

Вывод: $V_1 = ⅓ \cdot ½ \cdot a^3$




Рассмотрим эту же пирамиду, но уже с вершиной в точке D:

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{3} d \cdot S_{AB_1C} \\ S_{AB_1C} &= \frac{1}{2} AB_1 \cdot B_1C \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \end{aligned}\right\} =$$

$$V_2 = \frac{1}{3} d \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

Учитывая, что $V_1 = V_2$, получим d= $\frac{a}{\sqrt{3}}$ искомое расстояние.

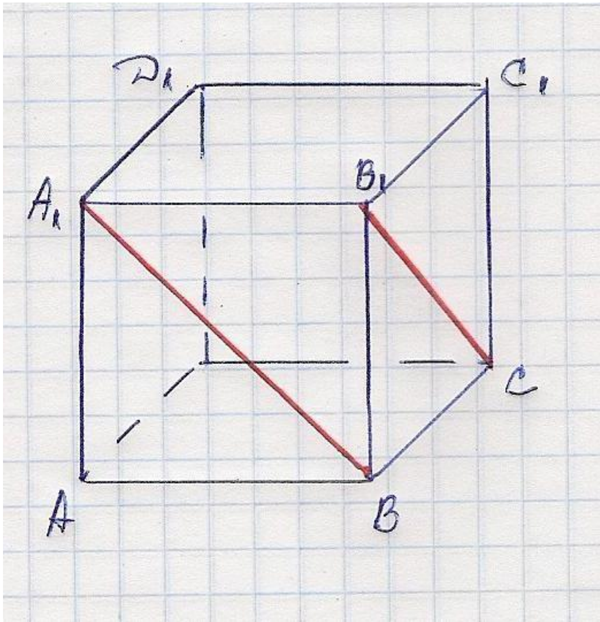
2.Расстояние м/у скрещивающими прямыми , содержащими отрезки
AB и C D соответственно , можно вычислить по формуле $\frac{6V}{AB \cdot CD \cdot sin\alpha}$

Где $\alpha$ угол м/у прямыми AB и C D,

V- объем тетраэдра ABCD

**Задача № 1**

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно **1** .Найти расстояние между скрещивающими диагоналями двух соседних граней куба



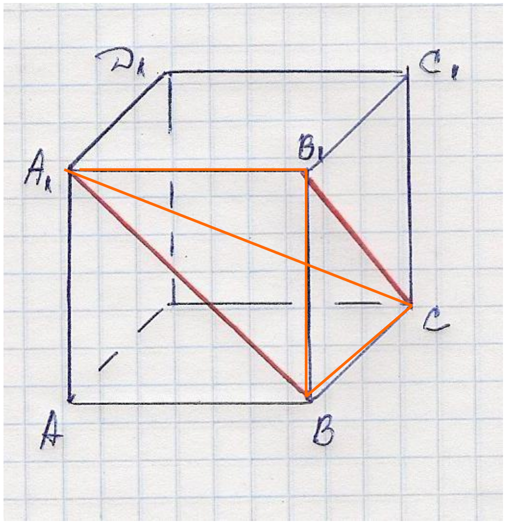

**РЕШЕНИЕ: Рассмотрим как соседние диагонали куба Скрещивающие прямые $A_1B$ и $B_1C$. Найдем расстояние между ними по формуле**

$$\frac{6V_{CBB_1A_1}}{BA_1 \cdot CB_1 \cdot \sin a}$$

, где $V_{CBB_1A_1}$ **объем тетраэдра**

a **– угол м/у прямыми $A_1B$ и $B_1C$. Для вычисления угла заменим прямую $B_1C$ прямой $A_1D$ и найдем его из треугольника $A_1DB$, т.к. треугольник равносторонний угол $60^0$. Тогда**

$$\mathbf{d=} \quad \frac{6V}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 60}$$

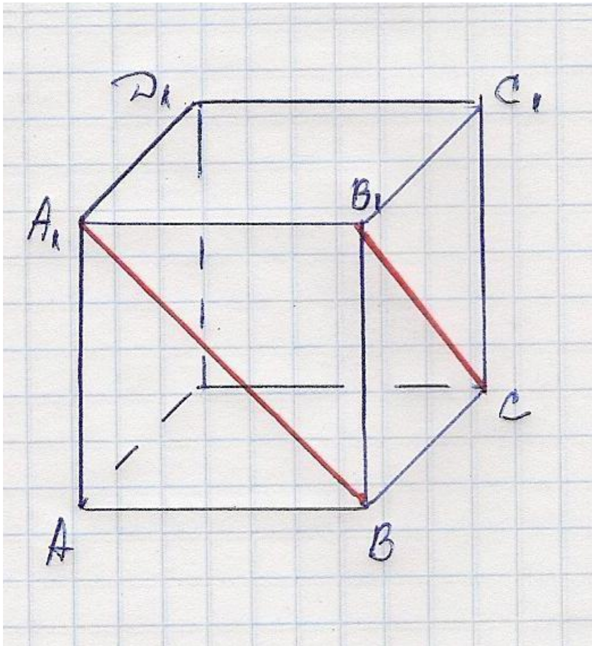



$$d = \frac{6V}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 60}$$

$$\frac{1}{3} S_{\Delta BB_1C} \cdot A_1B_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$d = \frac{6 \cdot \frac{1}{6}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{3} S_{\Delta BB_1C} \cdot A_1B_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$




- **<u>способ 2( метод координат)</u>**
- **искомое расстояние –это расстояние от точки С до плоскости ( $A_1DB$)**
- **вычисляется d =** $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
- **пусть уравнение плоскости ( $A_1DB$) :**

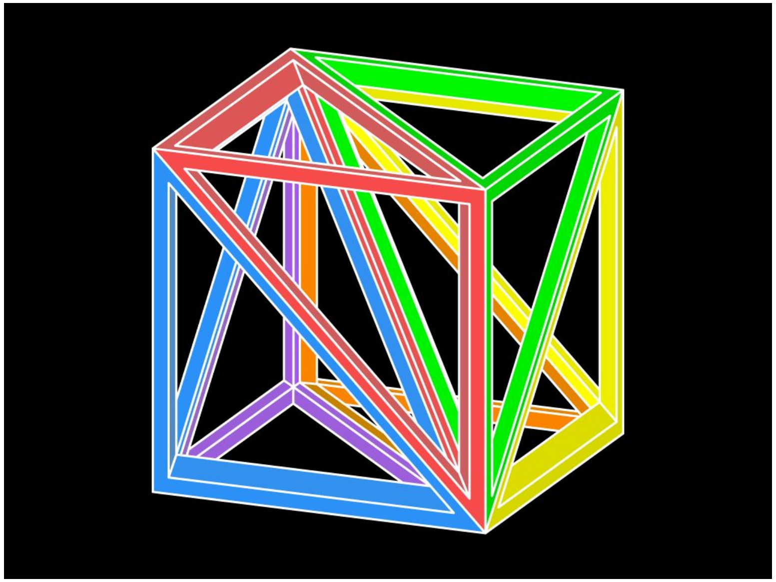
**Ax + By + Cz+ D =0**

- **введем систему координат с центром в точке D(0,0,0) тогда**
- **$A_1$(1,0,1), B(1,1,0) D(0,0.0)**
- **т.к. точка D принадлежит плоскости**
- **( $A_1DB$), то D = 0**
- **$A_1$ принадлежит плоскости ( $A_1DB$), то A+C =0, C= - A**
- **В принадлежит плоскости ( $A_1DB$),**

**то A+B =0, B= -A**

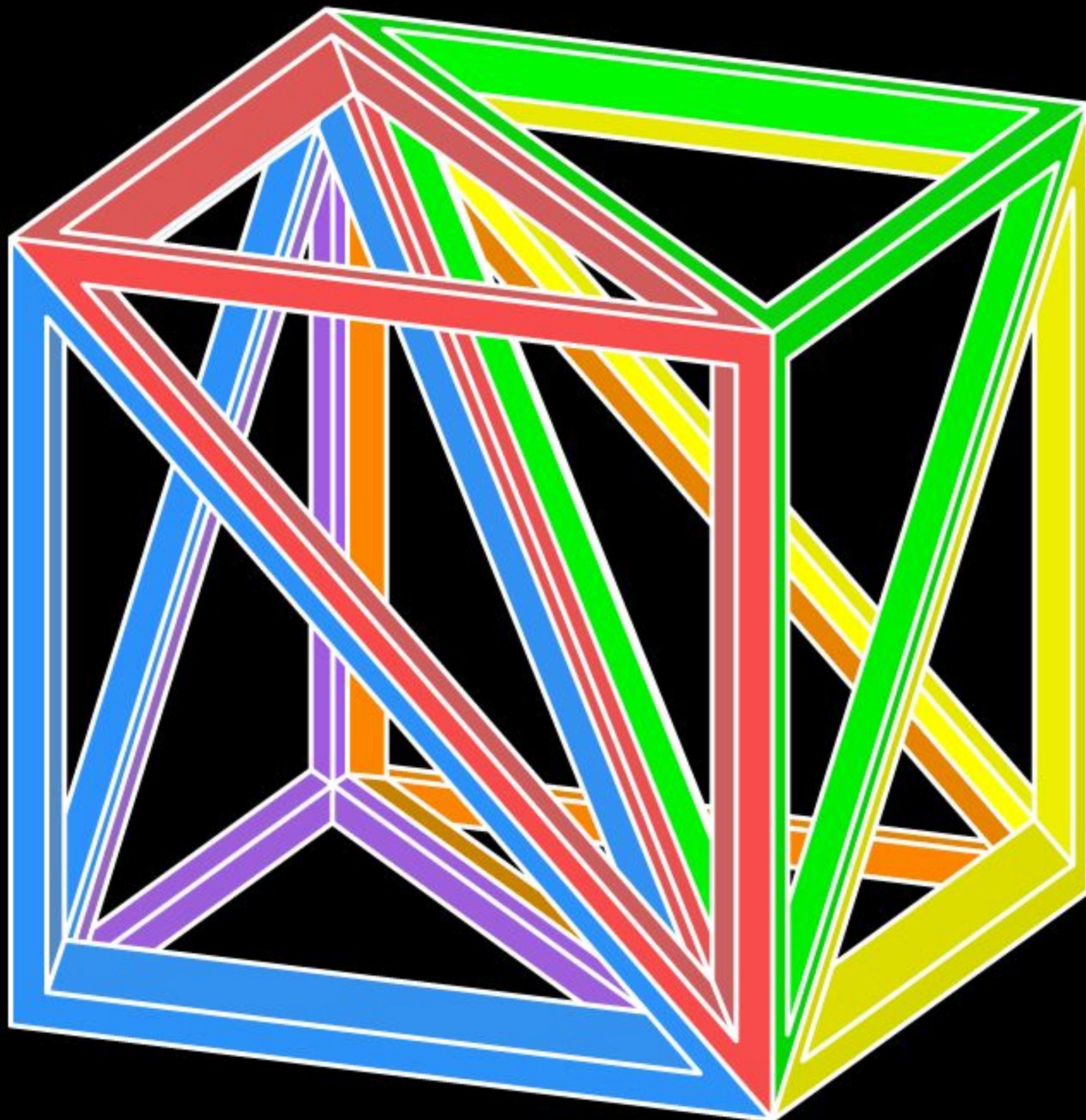
- **Значит Ax -Ay –Az =0 , x-y –z =0**
- **C(0,1,0) тогда**
- **Ответ :** d= $$\frac{|0 - 1 - 0|}{\sqrt{1 + 1 + 1}}$$

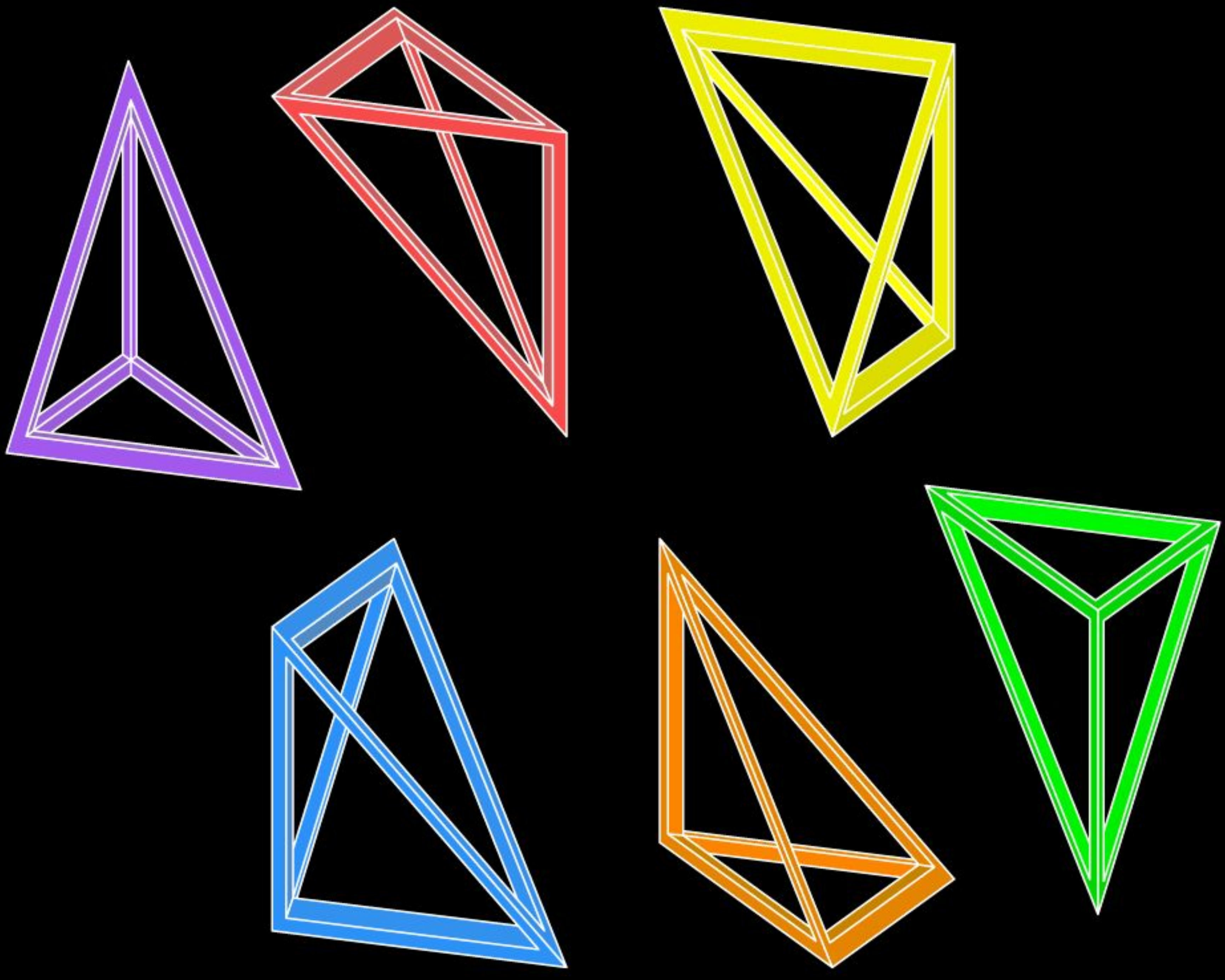
# Для решения задач методом объемов используют опорные задачи:



- 1.Если вершины $ABDA_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются вершинами тетраэдра, то имеет место равенство
- $V_{ABCA1} = 1/6 V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$
- 2.Пусть **p** и **g** – площади двух граней тетраэдра, **а** – длина общего ребра,
- ***α***- величина двугранного угла между этими гранями. Тогда объем тетраэдра может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{2pgsin\alpha}{3a}$$

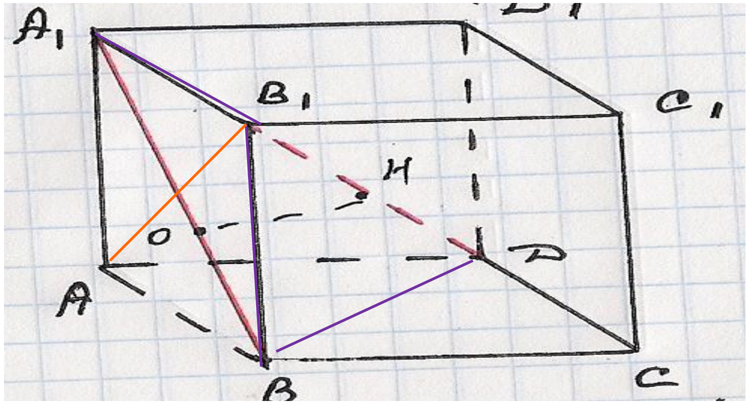




## Задача № 2

**Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1 .Найти расстояние между скрещивающими прямыми $BA_1$ и $B_1D$.**

**(2 способа)**




**Способ №1: метод объемов**

**Найдем расстояние м/у прямыми $BA_1$ и $B_1D$.**

**По формуле**
$$\frac{6 \cdot VBA_1B_1D}{BA_1 \cdot B_1D \cdot \sin\alpha}$$

**Объем пирамиды 1/6 , угол м/у прямыми 90.**

**Тогда $BA_1 = \sqrt{2}$, $B_1D = \sqrt{3}$**

$$d = \frac{6 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

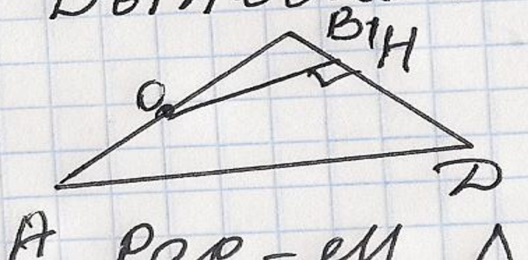
## Способ №2

$B_1D \in (AB_1D)$ $A_1B \perp AB_1$ т.к диаг. кв. $\Big| \Rightarrow$
$AD \perp (A_1AB)$

$AD \perp A_1B \Rightarrow A_1B \perp (AB_1D)$

Пусть $OH$ - рас-е м/у прямыми
$OH \perp B_1D$ $OH \in (AB_1D)$
значит $OH \perp A_1B$ т.е $OH$ - иском перпенд.

Вынесем $\triangle AB_1D$
$AB_1 = \sqrt{2}$ $OB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$




Найдем $\angle B_1$ по т. cos

$$\cos B_1 = \frac{2+3-1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Рас-ем $\triangle OB_1H$ $\cos B_1 = \frac{B_1H}{OB_1}$

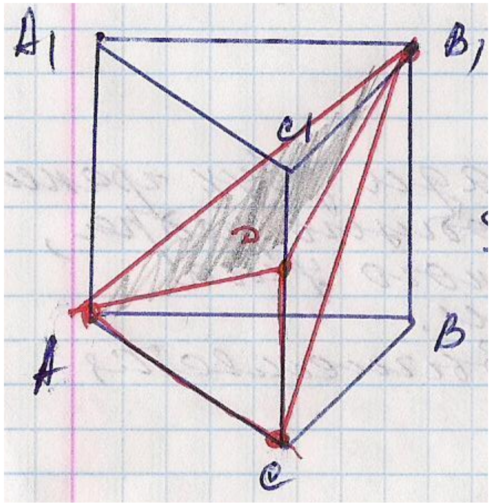
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{B_1H}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $B_1H = OB_1 \cdot \cos B_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$OH = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

**Задача №3 (ЕГЭ-2012 г.)**

**В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра 3, точка D- середина ребра $CC_1$. Найти расстояние от вершины C до плоскости $(ADB_1)$. (два способа решения)**

$$V = \frac{2pg\sin\alpha}{3a}$$




Расстоянием от точки C до плоскости будет высота пирамиды т.е. перпендикуляр на плоскость $(ADB_1)$. Найдем V пирамиды.

Пусть $S_{\Delta ADC} = \rho, S_{\Delta B1DC} = g$

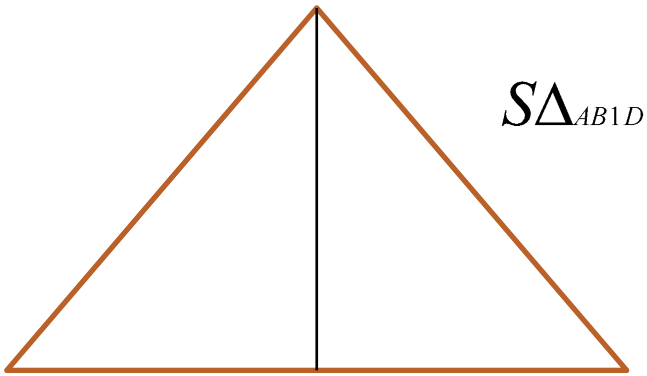
Вычислим площади треугольников по 1,5. Угол 60 градусов т.к. в основании правильный треугольник. Тогда объем равен

$$V = \frac{2 \cdot 1.5 \cdot 1.5 \cdot \sin 60}{3 \cdot 1.5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

С другой стороны $V = \frac{1}{3} S_{OCH.} \cdot H$

## Найдем площадь основания – площадь треугольника ADB1

- Треугольник $ADB_1$ равнобедренный. Сторона $AD=DB_1$
-

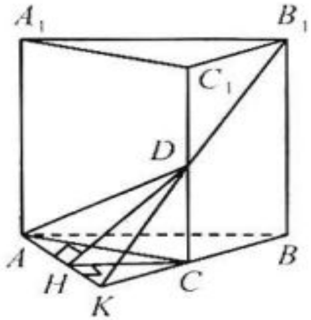


$$S\Delta_{AB1D} = \frac{1}{2} AB_1 \cdot h = \frac{1}{2}\sqrt{13}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$h = \frac{3\cdot V}{S_{осн.}} = \frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{39}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{39}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{39}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка $D$ — середина ребра $CC_1$. Найдите расстояние от вершины $C$ до плоскости $ADB_1$.

Решение.




Прямая $B_1D$ пересекает прямую $BC$ в точке $K$. Плоскости $ABC$ и $ADB_1$ пересекаются по прямой $AK$.

Из точки $D$ опустим перпендикуляр $DH$ на прямую $AK$, тогда отрезок $CH$ (проекция $DH$) перпендикулярен прямой $AK$. Прямая $AK$ перпендикулярна плоскости $CDH$, следовательно, плоскости $ADB_1$ и $CDH$ перпендикулярны. Высота $CM$ треугольника $CDH$ перпендикулярна плоскости $ADB_1$, следовательно, $CM$ — расстояние от точки $C$ до плоскости $ADB_1$.

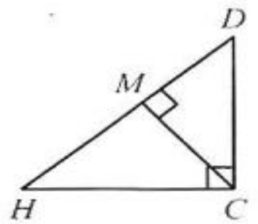
Точка $D$ — середина ребра $CC_1$, поэтому $CD = DC_1 = \frac{3}{2}$.

Из равенства треугольников $B_1C_1D$ и $KCD$ получаем:

$$CK = B_1C_1 = 2.$$

В равнобедренном треугольнике $ACK$ угол $C$ равен $120°$, $AC = CK = 2$ высота $CH$ является биссектрисой, откуда

$$CH = AC \cdot \cos 60° = 1.$$




В прямоугольном треугольнике $CDH$ с прямым углом $C$: $CD = \frac{3}{2}$; $CH = 1$; $DH = \sqrt{CD^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, откуда высота

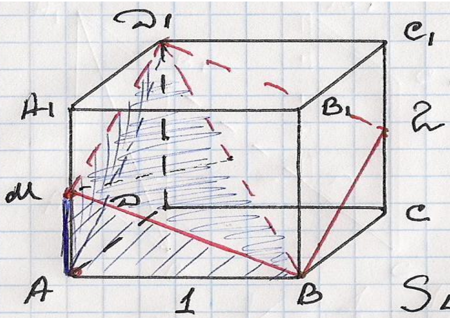
$$CM = \frac{CD \cdot CH}{DH} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

## Задача №4 (ЕГЭ-2012 г.)

**В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковое ребро равно 2. Точка M- середина ребра $AA_1$. Найти расстояние от точка A до плоскости $(BMD_1)$.**




Пусть $p = S_{\triangle AMD_1}$,

$q = S_{\triangle AMB}$

$AM = 1$ длина общего ребра

тогда $V_{тетр.}\ AMD_1B$

$V = \dfrac{2 \cdot p \cdot q \cdot \sin\alpha}{3a}$, $\alpha = 90$

$S_{\triangle AMD_1} = 0,5$; $S_{\triangle AMB} = 0,5$

$V = \dfrac{2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

$V_{AMBD_1} = \dfrac{1}{3} S_{\triangle MD_1B} \cdot H$

$S_{\triangle MB_1D} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{12}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$MD_1 = \sqrt{2}$, $MB = \sqrt{2}$, $\triangle MB_1D$ - равноб

$D_1B = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ - диагональ

$h_{\triangle MB_1D_1} = \sqrt{MD_1^2 - \left(\dfrac{D_1B}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{2 - 1,5} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$H = V : \left(\dfrac{1}{3} S_{\triangle MD_1B}\right)$

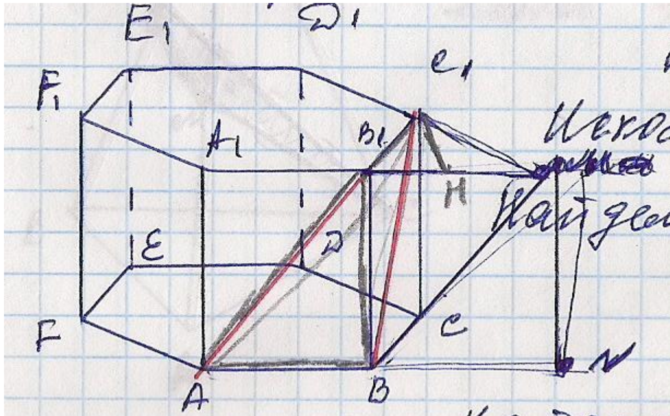
$H = \dfrac{1}{6} \cdot 3 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: иском. рас-е $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$V = \frac{2pg\sin a}{3a}$$

## Задача №5

**В правильной шестиугольной призме $A - F_1$ все ребра которой равны 1. Найти расстояние между прямыми $AB_1$ и $BC_1$**




Решение.

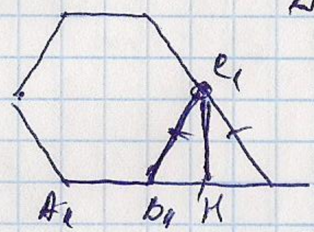
Искомое рас-е $d = \dfrac{6V}{AB_1 \cdot BC_1 \cdot \sin\alpha}$

Найдем $\sin\alpha$ м/у прямыми выполним доп. построение продолжим грань $(AA_1B_1B)$ и построим $BM \parallel AC_1$

Найдем $\cos\alpha$ из $\triangle C_1BM$

$\triangle C_1BM$ – равноб. $C_1B = BM = \sqrt{2}$, $C_1M = 1$

$\cos\alpha = \dfrac{BM^2 + BC_1^2 - C_1M^2}{2BM \cdot BC_1} = \dfrac{2+2-1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{3}{4}$




тогда $\sin\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Рас-е от $C_1$ до $A_1B_1$ $= \dfrac{\sqrt{3}}{2} = C_1H$

значит это высота пирамиды с основанием $ABB_1$ и вер. $C_1$

Тогда $V_{пир\ ABB_1C_1} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$

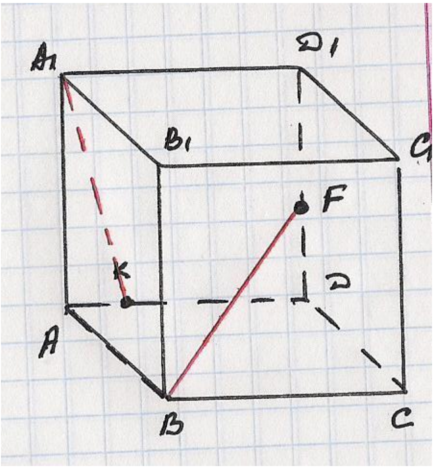
Найдем рас-е м/у прямыми

$$d = \dfrac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$$

2014г. В-9 Лысенко

**С-2 в прямоугольном параллелепипеде точка F- середина DD1 , точка К- лежит на ребре AD так, что АК:КD=1:3.**

**НАЙТИ РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ BF и $A_1K$, если AB= 3,AD = 4, $AA_1$ =2**



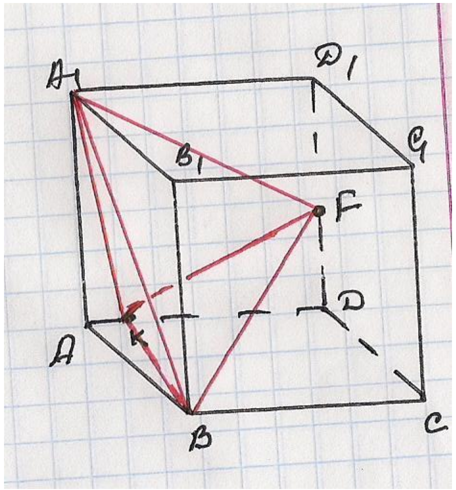

РЕШЕНИЕ:

найдем расстояние м/у прямыми BF и $A_1$ K по формуле

$$d = \frac{6V}{A_1K \cdot BF \cdot \sin\alpha}$$

Найдем объем пирамиды построенной на прямых BF и $A_1$K .

$$V_{ÏÈÐ\ .} = \frac{1}{3} S_{KA_1F} \cdot AB$$

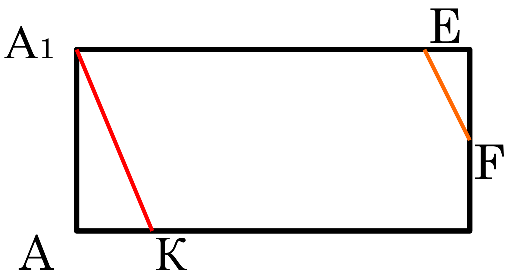



- **Найдем площадь треугольника $KA_1F$ .**
- **8-1-1,5 -2=3,5 тогда объем $V=1/3\cdot 3{,}5\cdot 3=3{,}5$**
- **Найдем угол м/у прямыми: для этого прямую $KA_1$**

**заменим параллельной прямой FE.рассмотрим треугольник BEF**

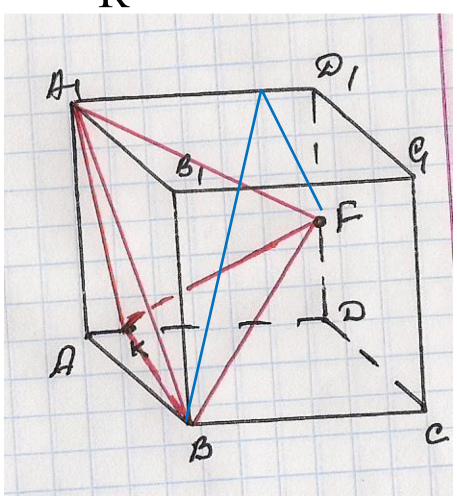
**$KA_1$ =** $\sqrt{5}$ **BF =** $\sqrt{26}$ **BE =** $\sqrt{2^2+3^2+3{,}5^2}=\sqrt{25{,}25}$

**FE =** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **, найдем косинус угла BFE**




$$cos\alpha=\frac{1{,}25+26-25{,}25}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{26}}=\frac{2}{\sqrt{130}}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{4}{130}}=\sqrt{\frac{126}{130}}=\frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{130}}$$

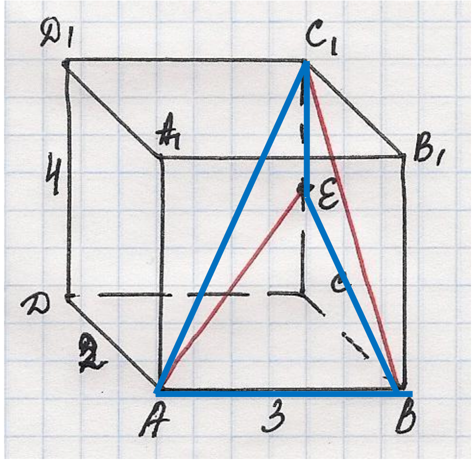



**Тогда расстояние**

$$d=\frac{6\cdot 3{,}5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{130}}}=\frac{21}{3\cdot\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

2014 В-10 Лысенко

# С-2 В прямоугольном параллелепипеде точка Е – середина ребра СС1. Найти расстояние между АЕ и ВС1, если АВ=3, AD=2, СС1= 4.




- РЕШЕНИЕ:

Найдем расстояние м/у данными прямыми по формуле

$$d = \frac{6V}{AE \cdot BC_1 \cdot \sin\alpha}$$

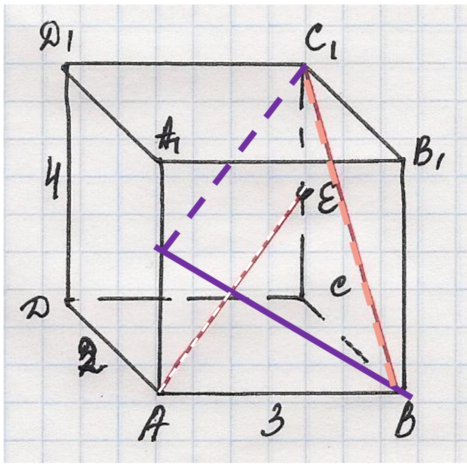
Найдем объем пирамиды построенной на данных прямых

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta C_1BE} \cdot H, \textit{где } H = AB = 3, \textit{ тогда } V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 2$$

$$S_{\Delta C_1BE} = (\frac{1}{2} CC_1 \cdot BC) : 2 = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 2 = 2$$

Найдем длины прямых АЕ и ВС1,

$$AE = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17} \textit{ и } BC_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$




- Для нахождения синуса угла перенесем AE на параллельную ей прямую A2C1.
- Рассмотрим треугольник A2C1B:

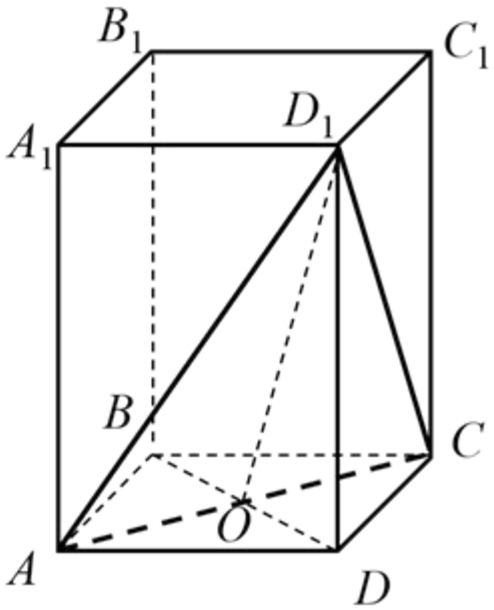
$$A_2C_1 = AE = \sqrt{17},\ \ A_2B = \sqrt{13},\ \ BC_1 = \sqrt{20}$$

$$\cos\alpha = \frac{17+20-13}{2\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{20}} = \frac{24}{2\cdot 2\sqrt{85}} = \frac{6}{\sqrt{85}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{36}{85}} = \sqrt{\frac{49}{85}} = \frac{7}{\sqrt{85}}$$

$$d = \frac{6\cdot 2}{\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{7}{\sqrt{85}}} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

**Задача.** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами $AB$=2, $BC$=4, $AA_1$=6. Найдите расстояние от точки $D$ до плоскости $ACD_1$.




Прямоугольный параллелепипед — параллелепипед, все грани которого являются прямоугольниками.

$AB$=$CD$=2, $BC$=$AD$=4, $AA_1$=6.

Искомым расстоянием будет высота $h$ пирамиды $ACD_1D$, опущенной из вершины $D$ на основание $ACD_1$ (см. Рис.3).

Вычислим объем пирамиды $ACD_1D$ двумя способами.

Вычисляя, первым способом за основание примем $\Delta\ ACD_1$, тогда

$$V_{ACD_1D}=\frac{1}{3}S_{ACD_1}\cdot h$$

Вычисляя, вторым способом за основание примем $\Delta\ ACD$, тогда $V_{ACD_1D}=\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot DD_1$

Приравняем правые части последних двух равенств, получим

$$h=\frac{S_{ACD}\cdot DD_1}{S_{ACD_1}}$$

Из прямоугольных треугольников $ACD$, $ADD_1$, $CDD_1$ найдем гипотенузы, используя теорему Пифагора

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$CD_1 = \sqrt{CD^2 + DD_1^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Вычислим площадь треугольника $ACD$:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

Вычислим площадь треугольника $ACD_1$, используя формулу Герона

$$p = p_{ACD_1} = \frac{1}{2}(AC + AD_1 + CD_1) = \sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{10}$$

$$S_{ACD_1} = p(p - AC)(p - AD_1)(p - CD_1) =$$

$$= (\sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{10})(\sqrt{13} + \sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{10} - \sqrt{13})(\sqrt{5} + \sqrt{13} - \sqrt{10}) =$$

$$= (2\sqrt{130} - 18)(2\sqrt{130} + 18) = 14$$

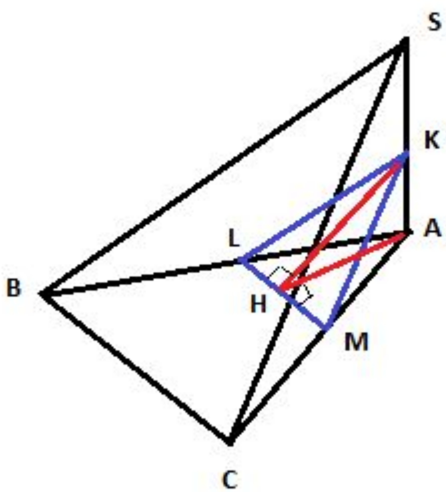
$$h = \frac{S_{ACD} \cdot DD_1}{S_{ACD_1}} = \frac{4 \cdot 6}{14} = \frac{12}{7}$$

**Задача**.

Ребро SA пирамиды SABC перпендикулярно плоскости основания ABC.

А) Постройте прямую пересечения плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и SA, и плоскости, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.

Б)Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA=\sqrt{5}$, $AB=AC=5$, $BC=2\sqrt{5}$




Решение: метод объемов.

Решение: Пусть AA1=d - расстояние от т. A до плоскости KLM;

В пирамиде KALM, $AK=\frac{\sqrt{5}}{2}$; $AM=AL=\frac{5}{2}$; $LM=\sqrt{5}$.

$KM=\frac{\sqrt{30}}{2}$; $KH=\frac{5}{2}$; $AH=\sqrt{5}$;

$V_{KALM}=\frac{1}{3}S_{ALM} * AK=\frac{1}{3}S_{KLM} * AA1$; $AA1=\frac{AH*AK}{KH}=1$

Ответ:1

Другое решение:2) координатный метод.

Найдем координаты точек A, L, M, K (см. Рис.13).