Решение задач С-2 методом объемов

Составила : учитель математики Воробьева Г.В.
МБОУСОШ № 150 г. Красноярск.

Данный метод применим для задач :

-нахождение расстояния между двумя скрещивающими прямыми.

-нахождение расстояния от точки до плоскости.

Алгоритм метода объемов.

- построить пирамиду, в которой высота, опущенная из вершины этой пирамиды на плоскость основания, является искомым расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми;
- доказать, что эта высота и есть искомое расстояние;
- найти объём этой пирамиды двумя способами;
- и выразить эту высоту;

При решении задач данного типа используется следующие утверждение:

1.Если объем пирамиды ABCD равен V, то расстояние от точки D до плоскости α, содержащей треугольник ABC, вычисляется по формуле

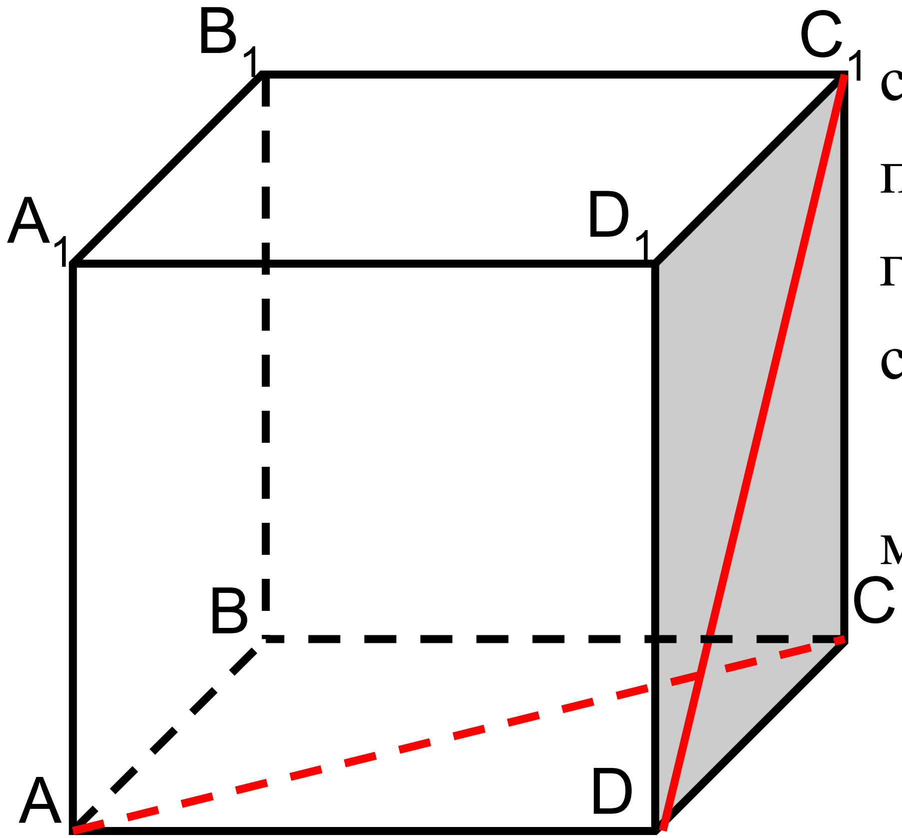
$$d=\frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}=\frac{6V_{ABCD}}{AB\cdot BC\cdot \sin ABC}$$

2.Расстояние м/у скрещивающими прямыми , содержащими отрезки
АВ и C D соответственно , можно вычислить по формуле

$$\frac{6V}{AB \cdot CD \cdot \sin\alpha}$$

Где α угол м/у прямыми АВ и C D,

V- объем тетраэдра ABCD



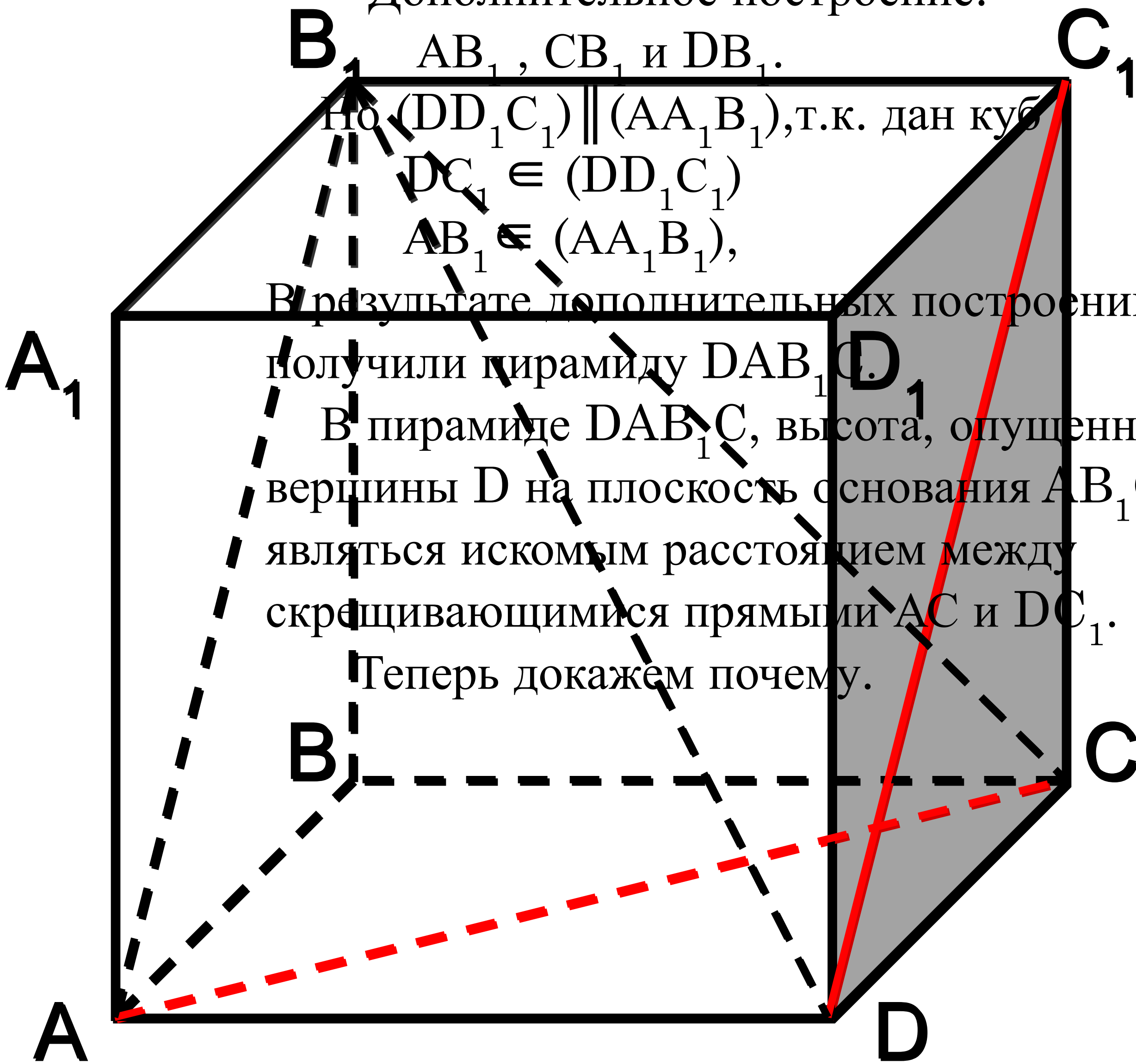
Пусть AC и DC_1 – скрещивающиеся прямые, принадлежащие смежным граням ABCD и DD_1C_1C соответственно.

Найдём расстояние между ними.

Дополнительное построение:

AB_1, CB_1 и DB_1.

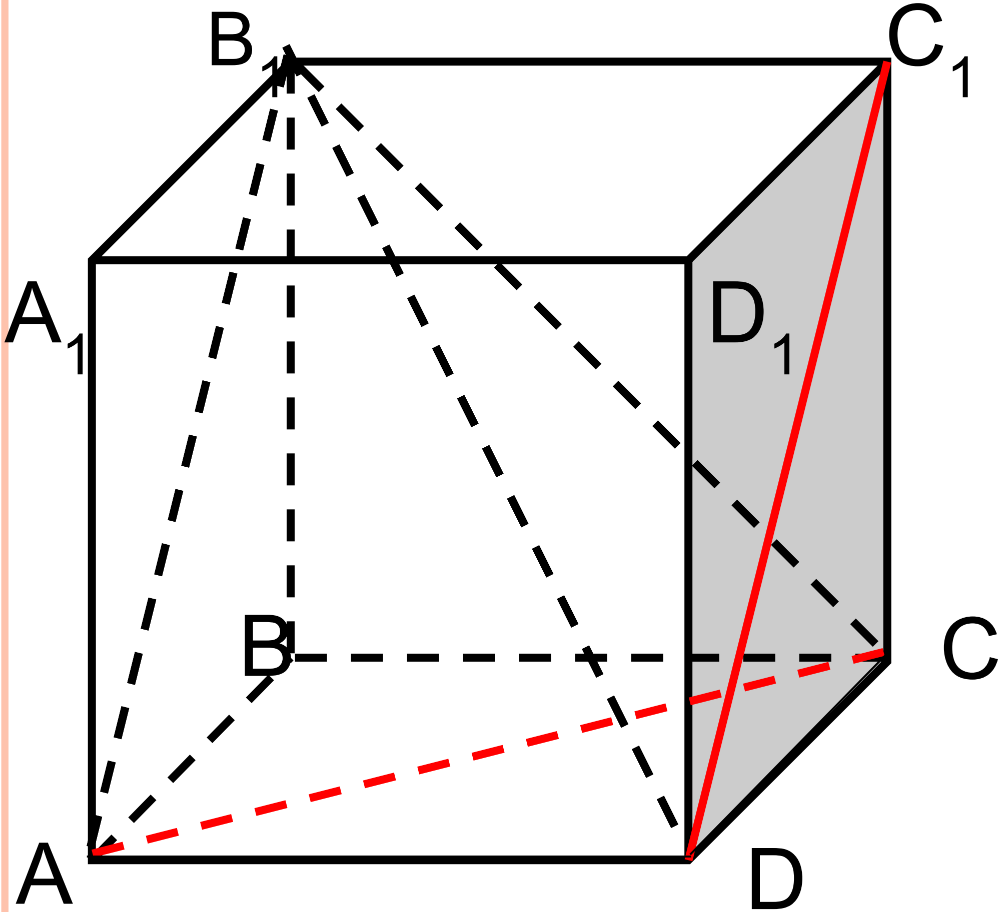
$$\left.\begin{array}{l} \text{Но } (DD_1C_1) \parallel (AA_1B_1), \text{т.к. дан куб} \\ DC_1 \in (DD_1C_1) \\ AB_1 \in (AA_1B_1), \end{array}\right\} DC_1 \parallel AB_1$$



В результате дополнительных построений мы получили пирамиду DAB_1C.

В пирамиде DAB_1C, высота, опущенная из вершины D на плоскость основания AB_1C будет являться искомым расстоянием между скрещивающимися прямыми AC и DC_1.

Теперь докажем почему.



Высота, опущенная из вершины D на плоскость основания AB_1C, перпендикулярна плоскости этого основания. Значит, она перпендикулярна любой прямой принадлежащей этой плоскости (по определению).

Но $AC \in (AB_1C)$

$AB_1 \in (AB_1C)$ $\quad h \perp AB_1$

$h \perp (AB_1C)$ $\quad h \perp AC$

Но, с другой стороны $AB_1 \parallel DC_1$

$AB_1 \perp h$

Значит, $h \perp DC_1$.

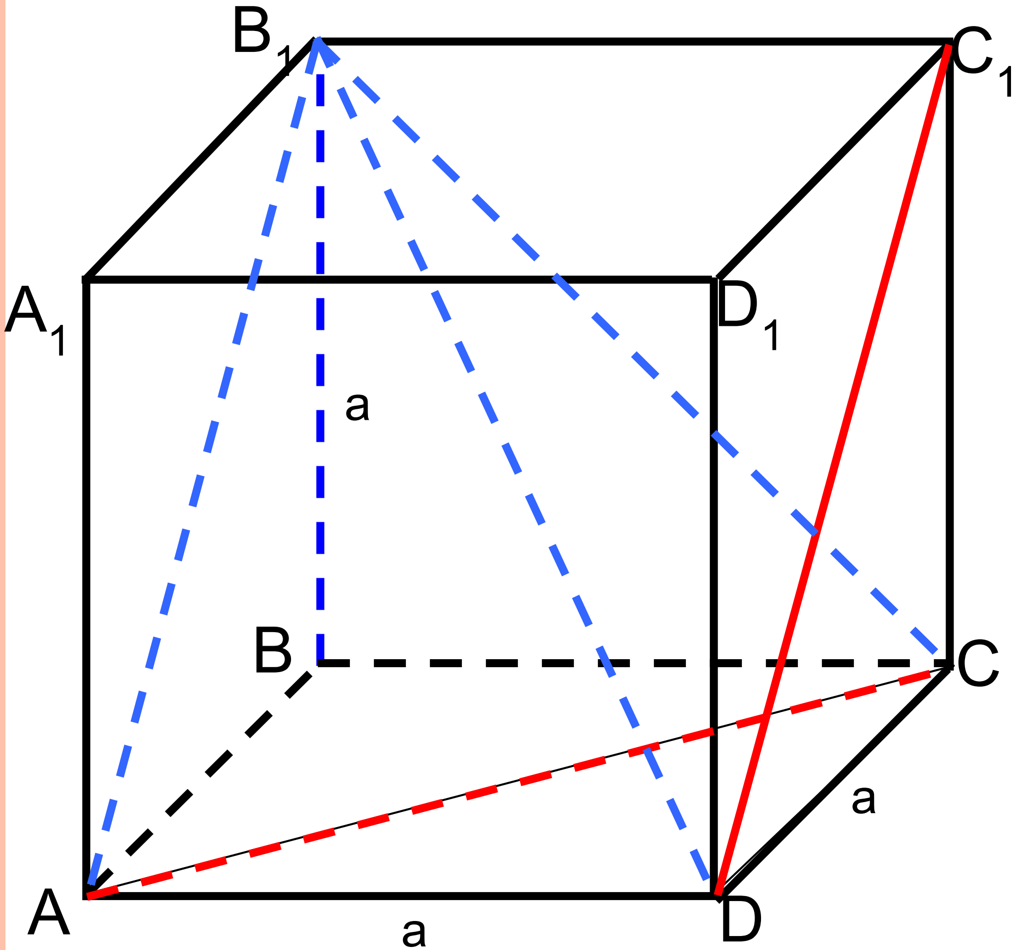
Имеем: $h \perp DC_1$

$h \perp AC$

Следовательно, h – общий перпендикуляр для скрещивающихся прямых AC и DC_1.

Что и требовалось доказать.

Найдём эту высоту.



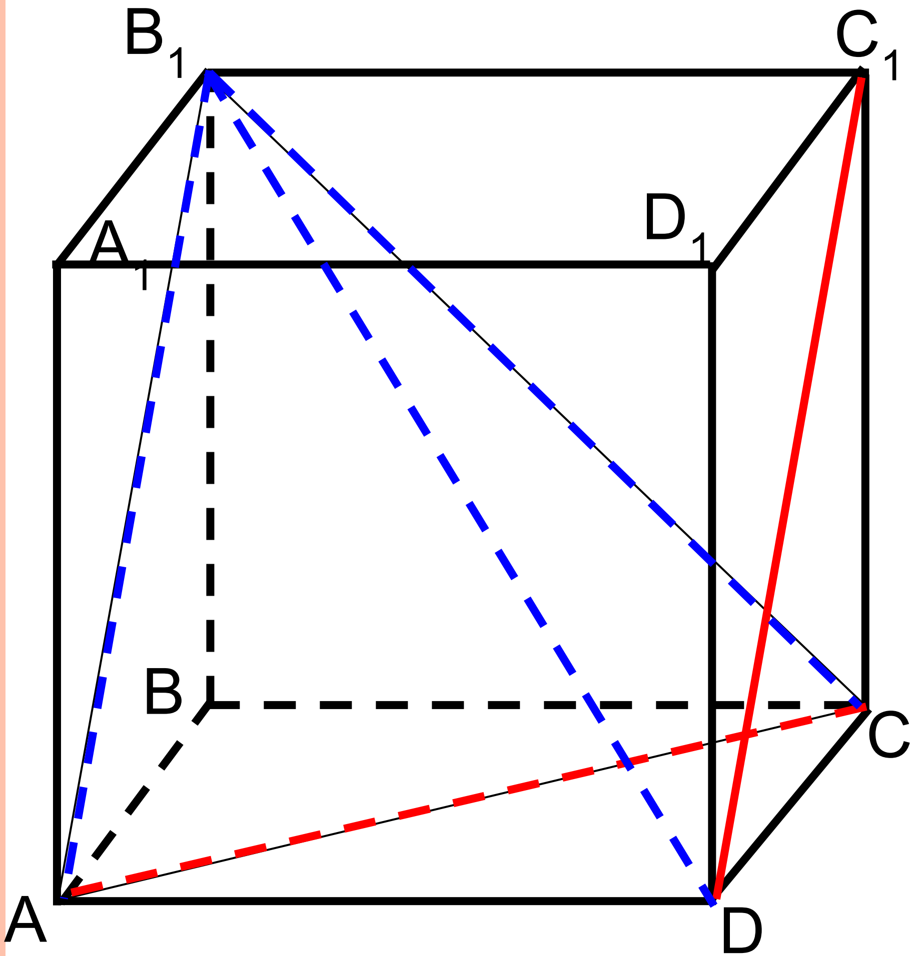
Рассмотрим пирамиду B_1ACD:

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ACD}$.

$h = B_1B = a$

$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot a^2$

Вывод: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^3$



Рассмотрим эту же пирамиду, но уже с вершиной в точке D:

$$V_2 = \frac{1}{3} d \cdot S_{AB_1C}$$

$$S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AB_1 \cdot B_1C \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$V_2 = \frac{1}{3} d \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

Учитывая, что $V_1 = V_2$, получим d= $\frac{a}{\sqrt{3}}$ искомое расстояние.

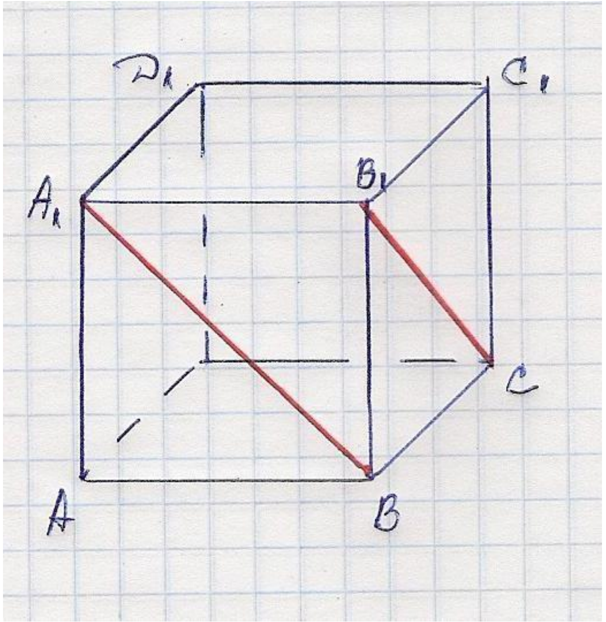
2.Расстояние м/у скрещивающими прямыми , содержащими отрезки
AB и C D соответственно , можно вычислить по формуле $\frac{6V}{AB \cdot CD \cdot \sin\alpha}$

Где α угол м/у прямыми AB и C D,

V- объем тетраэдра ABCD

Задача № 1

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно **1** .Найти расстояние между скрещивающими диагоналями двух соседних граней куба



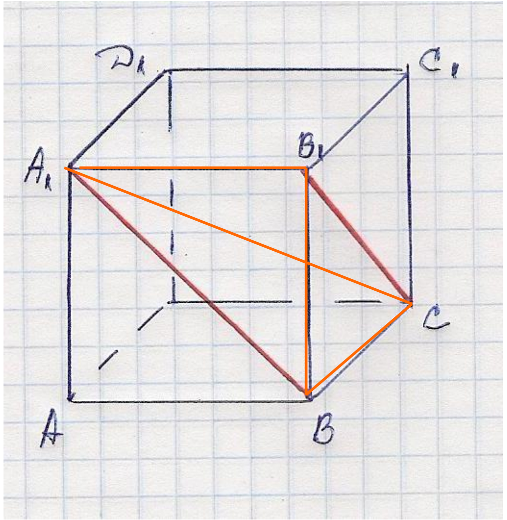
РЕШЕНИЕ: Рассмотрим как соседние диагонали куба Скрещивающие прямые A_1B и B_1C.
Найдем расстояние между ними по формуле

$$\frac{6V_{CBB_1A_1}}{BA_1 \cdot CB_1 \cdot \sin a}$$

, где $V_{CBB_1A_1}$ **объем тетраэдра**

а – **угол м/у прямыми A_1B и B_1C. Для вычисления угла заменим прямую B_1C прямой A_1D и найдем его из треугольника A_1DB, т.к. треугольник равносторонний угол 60^0. Тогда**

$$\mathbf{d} = \frac{6V}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 60}$$

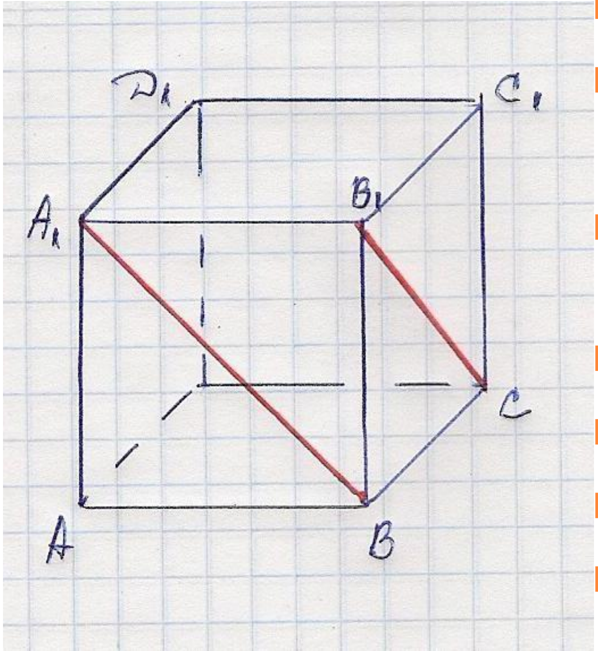


$$d = \frac{6V}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 60}$$

$$\frac{1}{3}S_{\Delta BB_1C}\cdot A_1B_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$d = \frac{6\cdot\frac{1}{6}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{3}S_{\Delta BB_1C}\cdot A_1B_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$$



- **<u>способ 2(метод координат)</u>**
- **искомое расстояние –это расстояние от точки С до плоскости (A_1DB)**
- **вычисляется d =** $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
- **пусть уравнение плоскости (A_1DB) :**

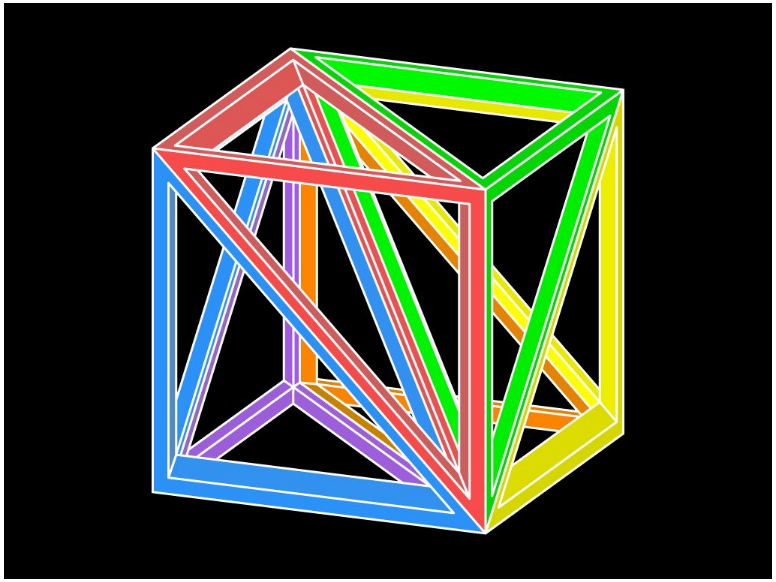
Ax + By + Cz+ D =0

- **введем систему координат с центром в точке D(0,0,0) тогда**
- **A_1(1,0,1), B(1,1,0) D(0,0.0)**
- **т.к. точка D принадлежит плоскости**
- **(A_1DB), то D = 0**
- **A_1 принадлежит плоскости (A_1DB), то A+C =0, C= - A**
- **В принадлежит плоскости (A_1DB),**

то A+B =0, B= -A

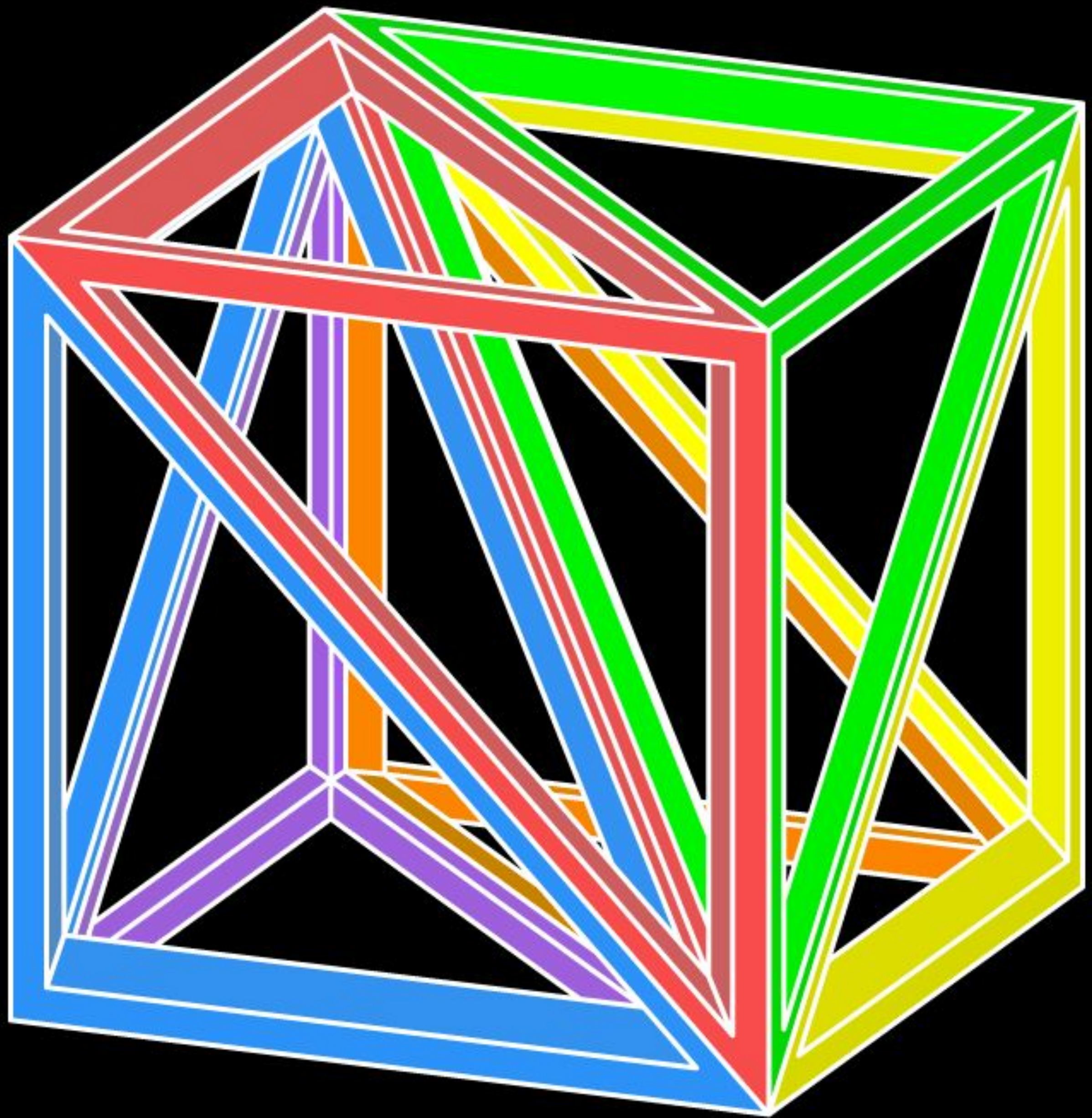
- **Значит Ax -Ay –Az =0 , x-y –z =0**
- **C(0,1,0) тогда**
- **Ответ :** $$d= \frac{|0 - 1 - 0|}{\sqrt{1 + 1 + 1}}$$

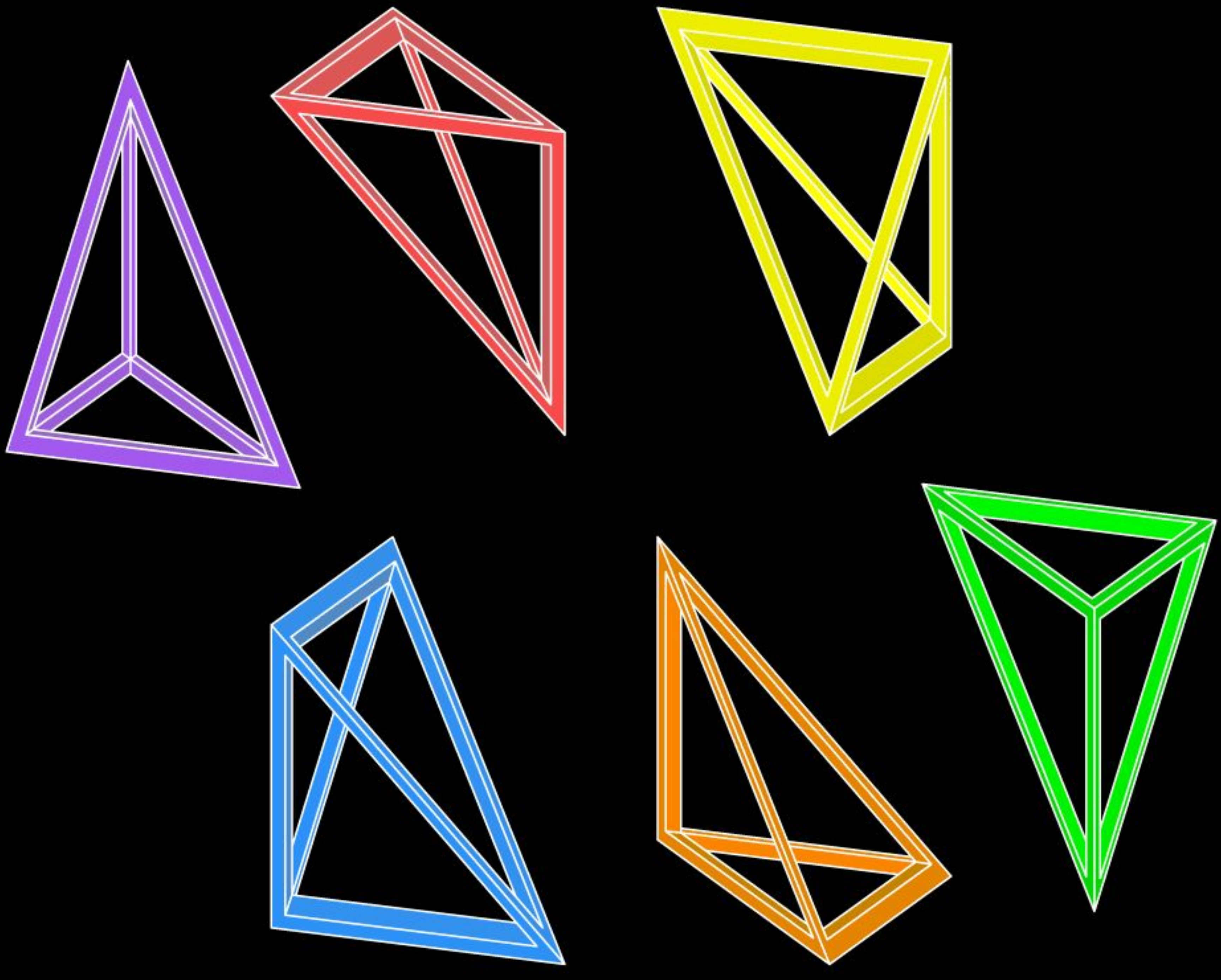
Для решения задач методом объемов используют опорные задачи:



- 1.Если вершины $ABDA_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются вершинами тетраэдра, то имеет место равенство
- $V_{ABCA1} = 1/6\, V\text{-}ABCDA_1B_1C_1D_1$
- 2.Пусть **p** и **g** – площади двух граней тетраэдра, **a** – длина общего ребра,
- ***α***- величина двугранного угла между этими гранями. Тогда объем тетраэдра может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{2pg\sin\alpha}{3a}$$

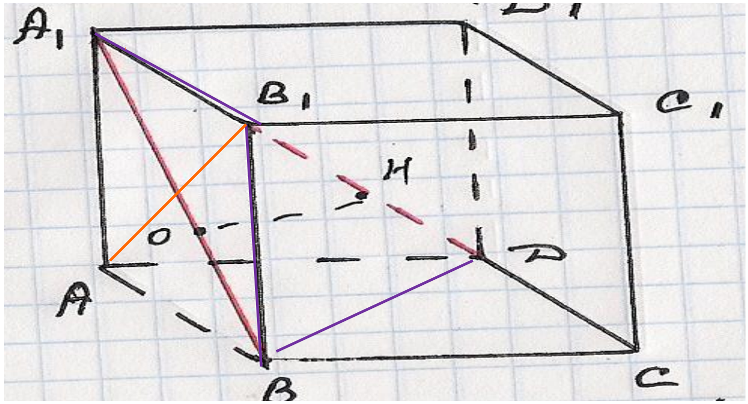




<u>Задача № 2</u>

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти расстояние между скрещивающими прямыми BA_1 и B_1D.

(2 способа)



<u>Способ №1: метод объемов</u>

Найдем расстояние м/у прямыми BA_1 и B_1D.

По формуле

$$\frac{6 \cdot V_{BA_1B_1D}}{BA_1 \cdot B_1D \cdot \sin\alpha}$$

Объем пирамиды 1/6 , угол м/у прямыми 90.

Тогда $BA_1 = \sqrt{2}$, $B_1D = \sqrt{3}$

$$d = \frac{6 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Способ №2

$B_1D \in (AB_1D)$ $\quad A_1B \perp AB$ т.к. диаг. кв. $\Big| \Rightarrow$

$AD \perp (A_1AB)$

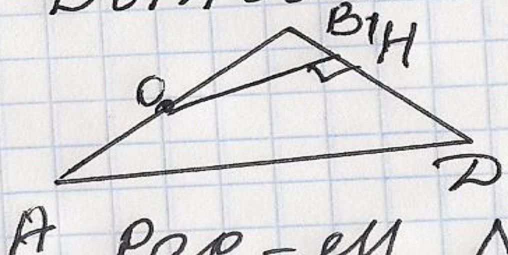
$AD \perp A_1B \Rightarrow A_1B \perp (AB_1D)$

Пусть OH - рас-е м/у прямыми

$OH \perp B_1D$ $\quad OH \in (AB_1D)$

значит $OH \perp A_1B$ т.е. OH - неком перпенд.

Вынесем $\triangle AB_1D$



$AB_1 = \sqrt{2}$ $\quad OB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

найдем $\angle B_1$ по т. cos

$$\cos B_1 = \frac{2+3-1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Рас-ем $\triangle OB_1H$ $\quad \cos B_1 = \frac{B_1H}{OB_1}$

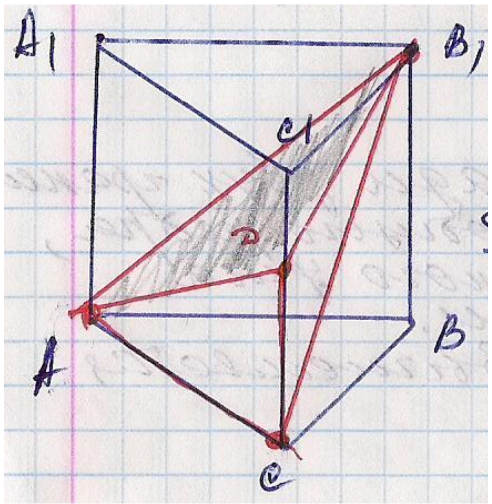
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{B_1H}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad B_1H = OB_1 \cdot \cos B_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$OH = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

<u>Задача №3</u> (ЕГЭ-2012 г.)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра 3, точка D- середина ребра CC_1. Найти расстояние от вершины C до плоскости (ADB_1). (два способа решения)

$$V = \frac{2pg\sin\alpha}{3a}$$



Расстоянием от точки C до плоскости будет высота пирамиды т.е. перпендикуляр на плоскость (ADB_1). Найдем V пирамиды.

Пусть $S_{\Delta ADC} = \rho, S_{\Delta B1DC} = g$

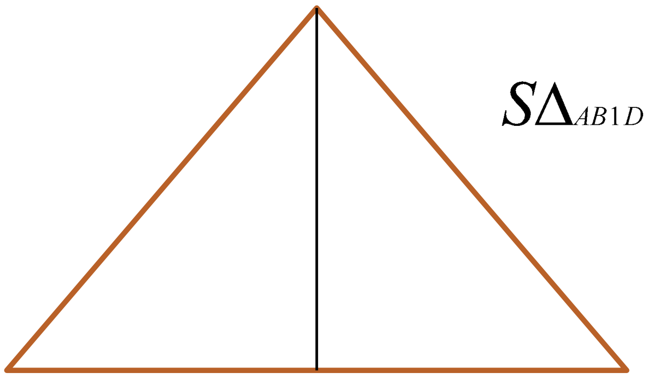
Вычислим площади треугольников по 1,5.
Угол 60 градусов т.к. в основании правильный треугольник. Тогда объем равен

$$V = \frac{2 \cdot 1.5 \cdot 1.5 \cdot \sin 60}{3 \cdot 1.5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

С другой стороны $V = \frac{1}{3} S_{OCH.} \cdot H$

Найдем площадь основания – площадь треугольника ADB₁

- Треугольник ADB_1 равнобедренный. Сторона $AD=DB_1$
-

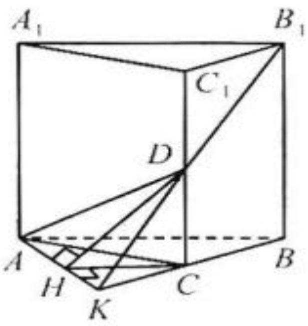


$$S\Delta_{AB1D}=\frac{1}{2}AB_1\cdot h=\frac{1}{2}\sqrt{13}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$h=\frac{3\cdot V}{S_{осн.}}=\frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{39}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{39}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{39}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

Решение.



Прямая B_1D пересекает прямую BC в точке K. Плоскости ABC и ADB_1 пересекаются по прямой AK.

Из точки D опустим перпендикуляр DH на прямую AK, тогда отрезок CH (проекция DH) перпендикулярен прямой AK. Прямая AK перпендикулярна плоскости CDH, следовательно, плоскости ADB_1 и CDH перпендикулярны. Высота CM треугольника CDH перпендикулярна плоскости ADB_1, следовательно, CM — расстояние от точки C до плоскости ADB_1.

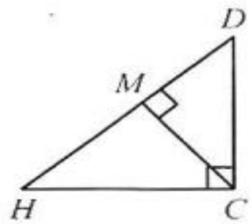
Точка D — середина ребра CC_1, поэтому $CD = DC_1 = \frac{3}{2}$.

Из равенства треугольников B_1C_1D и KCD получаем:

$$CK = B_1C_1 = 2.$$

В равнобедренном треугольнике ACK угол C равен $120°$, $AC = CK = 2$ высота CH является биссектрисой, откуда

$$CH = AC \cdot \cos 60° = 1.$$



В прямоугольном треугольнике CDH с прямым углом C: $CD = \frac{3}{2}$; $CH = 1$; $DH = \sqrt{CD^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, откуда высота

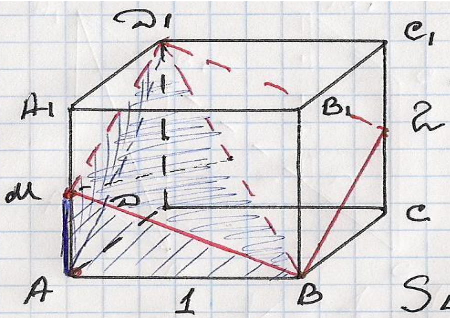
$$CM = \frac{CD \cdot CH}{DH} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача №4 (ЕГЭ-2012 г.)

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковое ребро равно 2. Точка M- середина ребра AA_1. Найти расстояние от точка A до плоскости (BMD_1).



Пусть $p = S_{\triangle AMD_1}$,

$g = S_{\triangle AMB}$

$AM = 1$ длина общего ребра

тогда Vтетр. AMD_1B

$V = \frac{2 \cdot p \cdot g \cdot \sin\alpha}{3a}$, $\alpha = 90$

$S_{\triangle AMD_1} = 0{,}5$; $S_{\triangle AMB} = 0{,}5$

$V = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$V_{AMBD_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle MD_1B} \cdot H$

$S_{\triangle MB_1D} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$MD_1 = \sqrt{2}$, $MB = \sqrt{2}$, $\triangle MB_1D$ - равноб

$D_1B = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ - диагональ

$h_{\triangle MB_1D_1} = \sqrt{MD_1^2 - \left(\frac{D_1B}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{2 - 1{,}5} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$H = V : \left(\frac{1}{3} S_{\triangle MD_1B}\right)$

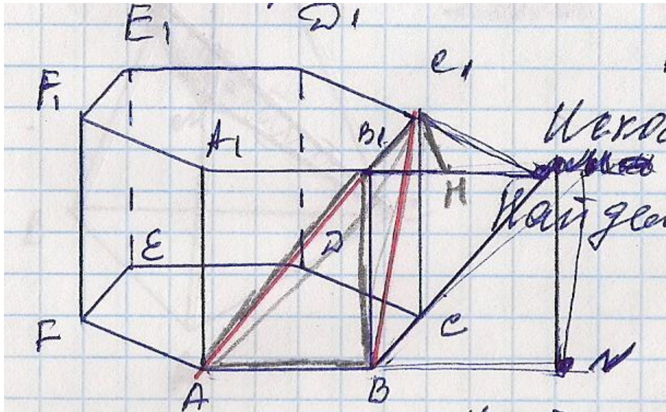
$H = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: иском. рас-е $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$V = \frac{2pg\sin a}{3a}$$

Задача №5

В правильной шестиугольной призме $A - F_1$ все ребра которой равны 1. Найти расстояние между прямыми AB_1 и BC_1



Решение.

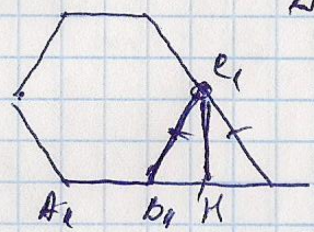
Искомое рас-е $d = \dfrac{6V}{AB_1 \cdot BC_1 \cdot \sin\alpha}$

Найдем $\sin\alpha$ м/у прямыми выполним доп. построение (продлим грань AA_1B_1B) и построим $BM \parallel AC_1$

Найдем $\cos\alpha$ из $\triangle C_1BM$

$\triangle C_1BM$ – равноб. $C_1B = BM = \sqrt{2}$, $C_1M = 1$

$$\cos\alpha = \frac{BM^2 + BC_1^2 - C_1M^2}{2BM \cdot BC_1} = \frac{2+2-1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$



тогда $\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Рас-е от C_1 до $A_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = C_1H$

значит это высота пирамиды с основанием ABB_1 и вер. C_1

Тогда $V_{пир\ ABB_1C_1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

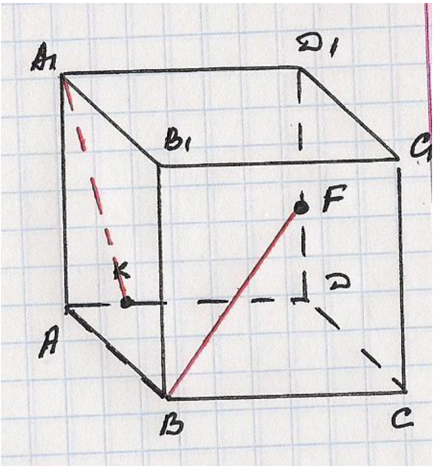
Найдем рас-е м/у прямыми

$$d = \frac{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

2014г. В-9 Лысенко

С-2 в прямоугольном параллелепипеде точка F- середина DD1 , точка К- лежит на ребре AD так, что АК:КD=1:3.

НАЙТИ РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ BF и A_1K, если AB= 3,AD = 4, AA_1 =2



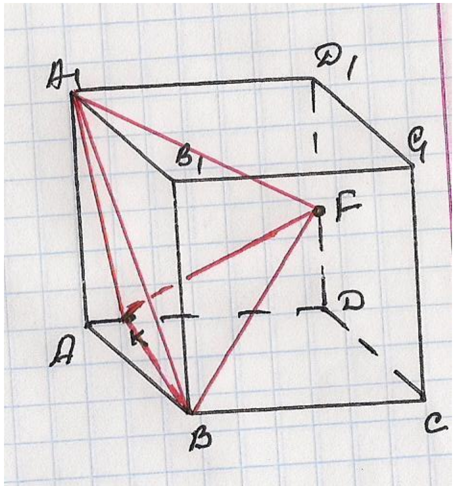
РЕШЕНИЕ:

найдем расстояние м/у прямыми BF и A_1 K по формуле

$$d = \frac{6V}{A_1K \cdot BF \cdot \sin\alpha}$$

Найдем объем пирамиды построенной на прямых BF и A_1K .

$$V_{ÏÈÐ\ .} = \frac{1}{3} S_{KA_1F} \cdot AB$$

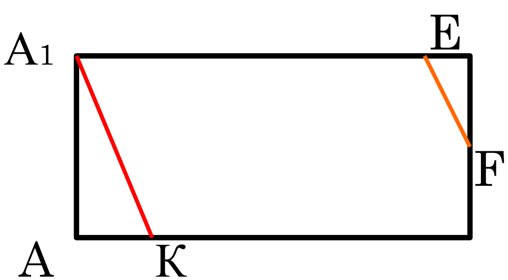


- **Найдем площадь треугольника KA1F .**
- **8-1-1,5 -2=3,5 тогда объем V=1/3·3,5·3=3,5**
- **Найдем угол м/у прямыми: для этого прямую KA1**

заменим параллельной прямой FE.рассмотрим треугольник BEF

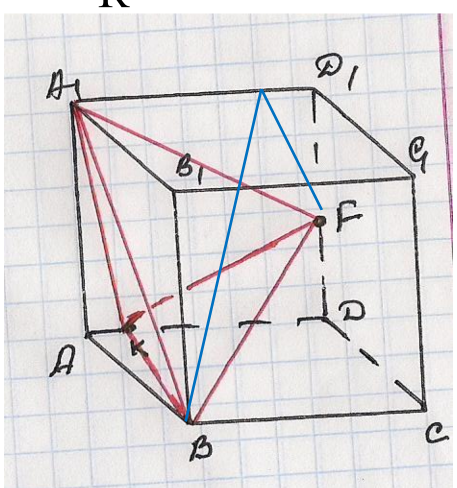
KA1 = $\sqrt{5}$ **BF =** $\sqrt{26}$ **BE =** $\sqrt{2^2+3^2+3{,}5^2}=\sqrt{25{,}25}$

FE = $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **, найдем косинус угла BFE**



$$cos\alpha=\frac{1{,}25+26-25{,}25}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{26}}=\frac{2}{\sqrt{130}}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{4}{130}}=\sqrt{\frac{126}{130}}=\frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{130}}$$

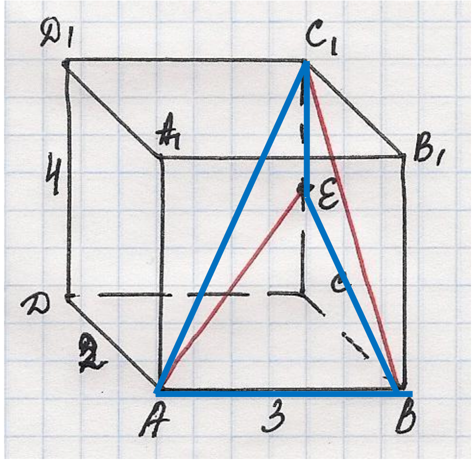


Тогда расстояние

$$d=\frac{6\cdot 3{,}5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{130}}}=\frac{21}{3\cdot\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

2014 В-10 Лысенко

С-2 В прямоугольном параллелепипеде точка Е – середина ребра СС1. Найти расстояние между АЕ и ВС1, если АВ=3, АD=2, СС1= 4.



- РЕШЕНИЕ:

Найдем расстояние м/у данными прямыми по формуле

$$d = \frac{6V}{AE \cdot BC_1 \cdot \sin\alpha}$$

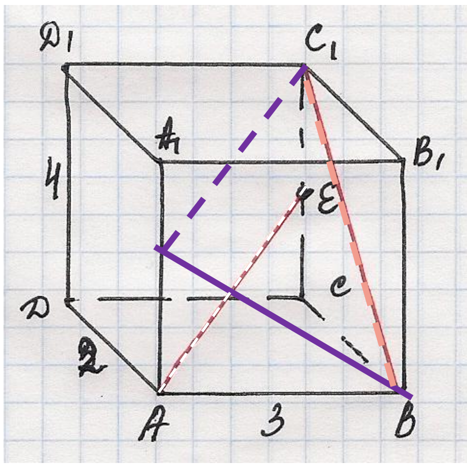
Найдем объем пирамиды построенной на данных прямых

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta C_1BE} \cdot H, где\ H = AB = 3,\ тогда\ V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 2$$

$$S_{\Delta C_1BE} = \left(\frac{1}{2} CC_1 \cdot BC\right) : 2 = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 2 = 2$$

Найдем длины прямых АЕ и ВС1,

$$AE = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17}\ \ и\ \ BC_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$



- Для нахождения синуса угла перенесем AE на параллельную ей прямую A_2C_1.
- Рассмотрим треугольник A_2C_1B:

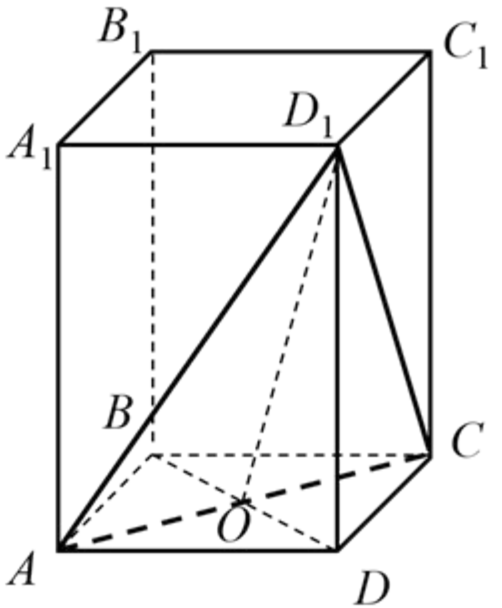
$$A_2C_1 = AE = \sqrt{17},\ \ A_2B = \sqrt{13},\ \ BC_1 = \sqrt{20}$$

$$\cos\alpha = \frac{17+20-13}{2\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{20}} = \frac{24}{2\cdot 2\sqrt{85}} = \frac{6}{\sqrt{85}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{36}{85}} = \sqrt{\frac{49}{85}} = \frac{7}{\sqrt{85}}$$

$$d = \frac{6\cdot 2}{\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{7}{\sqrt{85}}} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

Задача. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами $AB=2$, $BC=4$, $AA_1=6$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ACD_1.



Прямоугольный параллелепипед — параллелепипед, все грани которого являются прямоугольниками.

$AB=CD=2$, $BC=AD=4$, $AA_1=6$.

Искомым расстоянием будет высота h пирамиды ACD_1D, опущенной из вершины D на основание ACD_1 (см. Рис.3).

Вычислим объем пирамиды ACD_1D двумя способами.

Вычисляя, первым способом за основание примем $\Delta\ ACD_1$, тогда

$$V_{ACD_1D} = \frac{1}{3} S_{ACD_1} \cdot h$$

Вычисляя, вторым способом за основание примем $\Delta\ ACD$, тогда $V_{ACD_1D} = \frac{1}{3} S_{ACD} \cdot DD_1$

Приравняем правые части последних двух равенств, получим

$$h = \frac{S_{ACD} \cdot DD_1}{S_{ACD_1}}$$

Из прямоугольных треугольников ACD, ADD_1, CDD_1 найдем гипотенузы, используя теорему Пифагора

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$CD_1 = \sqrt{CD^2 + DD_1^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Вычислим площадь треугольника ACD:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

Вычислим площадь треугольника ACD_1, используя формулу Герона

$$p = p_{ACD_1} = \frac{1}{2}(AC + AD_1 + CD_1) = \sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{10}$$

$$S_{ACD_1} = p(p - AC)(p - AD_1)(p - CD_1) =$$

$$= (\sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{10})(\sqrt{13} + \sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{10} - \sqrt{13})(\sqrt{5} + \sqrt{13} - \sqrt{10}) =$$

$$= (2\sqrt{130} - 18)(2\sqrt{130} + 18) = 14$$

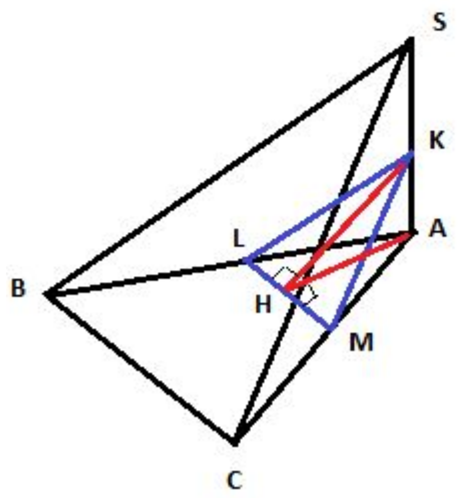
$$h = \frac{S_{ACD} \cdot DD_1}{S_{ACD_1}} = \frac{4 \cdot 6}{14} = \frac{12}{7}$$

Задача.

Ребро SA пирамиды SABC перпендикулярно плоскости основания ABC.

А) Постройте прямую пересечения плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и SA, и плоскости, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.

Б)Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA=\sqrt{5}$, AB=AC=5, $BC=2\sqrt{5}$



Решение: метод объемов.

Решение: Пусть AA1=d - расстояние от т. A до плоскости KLM;

В пирамиде KALM, $AK=\frac{\sqrt{5}}{2}$; $AM=AL=\frac{5}{2}$; $LM=\sqrt{5}$.

$KM=\frac{\sqrt{30}}{2}$; $KH=\frac{5}{2}$; $AH=\sqrt{5}$;

$V_{KALM}=\frac{1}{3}S_{ALM} * AK=\frac{1}{3}S_{KLM} * AA1$; $AA1=\frac{AH*AK}{KH}=1$

Ответ:1

Другое решение:2) координатный метод.

Найдем координаты точек A, L, M, K (см. Рис.13).