Системы счисления и действия в них

Лекция №2

План

1. Системы счисления. Классификация
2. Арифметика в двоичной системе счисления
3. Представление чисел в памяти компьютера

Система счисления

Алфавит *X* из *p* символов и правила записи и обработки чисел с помощью символов этого алфавита называются **системой счисления** (нумерацией) с основанием **p**.

Число *x* в системе счисления с основанием **p** обозначается как $(x)_p$ или x_p.

Система счисления и кодирование

Любая система счисления – это система кодирования числовых величин, позволяющая выполнять операции кодирования и декодирования.

По любой количественной величине можно однозначно найти ее кодовое представление и по любой кодовой записи – восстановить соответствующую ей числовую величину.

Классификация СС

Системы счисления

Непозиционные

Вес цифры (или символа алфавита) не зависит от ее места в записи числа или слова.

Позиционные

Вес цифры (или символа алфавита) зависит от ее места в записи числа или слова.

Непозиционные СС

Непозиционная система счисления – древняя Римская система записи чисел.

Алфавит системы:

- I = 1
- V = 5
- X = 10
- L = 50
- C = 100
- D = 500
- M = 1000

Непозиционные СС

Примеры римских чисел:

III = 3, IV = 4, V = 5, VI = 6, IX = 9, XI = 11, DCL = 650.

Запись числа в этой системе получается **двусторонней конкатенацией**, причем правая конкатенация ассоциируется с добавлением, а левая конкатенация – с убавлением (например, IV и VI).

Позиционные СС

Все позиционные системы счисления строятся по общему принципу: определяется величина q – основание системы, а любое число «a» записывается в виде комбинации степеней веса p от 0-й степени до степени s.

Позиционные СС

Пусть q - натуральное число большее 1 и M={0, 1, …, q-1}.

Говорят, что натуральное число “a” записано в позиционной системе с основанием q, если

$$a = a_s q^s + a_{s-1} q^{s-1} + \ldots + a_1 q + a_0$$

где s - целое неотрицательное, a_0, …, $a_s \in M$ и $a_s \neq 0$.

Позиционные СС

Если каждое число множества M={0, 1, …, q-1} обозначено специальным символом, то эти символы называются цифрами q-ичной позиционной системы.

Запись числа в q-ичной позиционной системе счисления выглядит так:

$$a=(a_s a_{s-1} a_{s-2} \ldots a_1)_q$$

Позиционные СС

Принятая система записи числа основана на том, что q единиц каждого разряда объединяются в одну единицу соседнего, более старшего разряда.

Это дает возможность проводить арифметические действия в любой позиционной системе счисления по тем же правилам, что в десятичной системе счисления.

Позиционные СС

Наиболее используемые в информатике системы счисления:

- двоичная, над алфавитом X = {0,1};
- восьмеричная, над X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7};
- шестнадцатеричная, над X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}, где символы A, B, C, D, E, F имеют десятичные веса 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Примеры:

- $1101_2 =$
- $157_8 =$
- $A6F_{16} =$
- $110{,}01_2 =$
- $A{,}B_{16} =$

Перевод чисел

Общая задача перевода чисел из одной системы счисления в другую:

<u>Дано:</u>

$x=(p_n p_{n-1} \ldots p_0 p_{-1} p_{-2} \ldots)_P$

p_i – цифры p-ичной системы.

<u>Найти:</u>

$x=(q_s q_{s-1} \ldots q_0 q_{-1} q_{-2} \ldots)_q$

q_j – искомые цифры q-ичной системы.

Перевод Q->P

Запись и вычисление значения полинома

$$X=x_nq^n+x_{n-1}q^{n-1}+\ldots+x_1q^1+x_0q^0+x_{-1}q^{-1}+\ldots+x_{-m}q^{-m}$$

где все цифры x_i и число q заменяются их p-ичными изображениями и все требуемые операции выполняются в p-ичной системе счисления.

Пример:

- Перевести $(371)_8$ в X_{10}
- Перевести $(AF,4)_{16}$ в X_{10}

<u>Решение:</u>

$$(371)_8 = (3\cdot 8^2+7\cdot 8^1+1\cdot 8^0)_{10} = (3\cdot 64+7\cdot 8+1)_{10} = (249)_{10}$$

$$(AF,4)_{16} = (10\cdot 16^1+15\cdot 16^0+4\cdot 16^{-1})_{10} = (160+15+0,25)_{10}$$

$$=175,25_{10}$$

Перевод P->Q

- Перевод целой части числа
- Перевод дробной части числа (его мантиссы)

Перевод P->Q (целая часть)

N – целое число в p-ичной системе счисления.

$N=(q_s q_{s-1} \ldots q_1 q_0)_Q$, где искомые цифры определяются по следующим рекуррентным формулам:

$q_i = Q\left\{\frac{N_i}{Q}\right\}$ - остаток от деления N на Q

$N_{i+1} = \left[\frac{N_i}{Q}\right]$ - целая часть от деления N на Q

$i=0,1,2,\ldots$; $N_0=N$ и процесс продолжается до тех пор, пока не станет $N_{i+1}=0$.

Пример:

- Перевести $N=(3060)_{10}$ в X_{16}

Решение:

```
3060 | 16
3056  191   | 16
   4  176   11 | 16
        15      0
```

Таким образом, $q_0=(4)_{16}$, $q_1=(15)_{16}$, $q_2=(11)_{16}$

$N=(BF4)_{16}$

Перевод P->Q (дробная часть)

Пусть x - правильная дробь ($0<x<1$), заданная в p-ичной системе счисления.

Тогда $x=(0,q_{-1}q_{-2}\ldots q_{-m})_Q$, где искомые цифры определяются по следующим рекурентным формулам:

$$q_{-(i+1)}=[x_i\cdot Q],\ x_{i+1}=\{x_i\cdot Q\},\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ x_0=x$$

и процесс продолжается до тех пор, пока не будет получено $x_{i+1}=0$ либо не будет достигнута требуемая точность изображения числа.

Пример:

- Перевести $N=(0,2)_{10}$ в X_2

Решение:

0	2
	2
0	4
	2
0	8
	2
1	6
	2
1	2

$X=0,00110011\ldots$

Перевод произвольных чисел

Пусть $x>1$ – произвольное число, заданное своим изображением в системе счисления с основанием P.

Подберем число $M=Q^k$, чтобы число $X/M<1$.

Полученную правильную дробь можно перевести в Q-ичную систему с использованием только операций умножения.

Для получения Q-ичного изображения исходного числа x достаточно результат умножить на Q^k, что равносильно перенесению запятой в Q-ичном изображении числа на k разрядов вправо.

Пример:

❖ Перевести $502{,}5_{10}$ в X_8

Решение:

- $X=502{,}5$
- $Q=8$.
- $k=3$, тогда $M=8_3=512$.
- $502{,}5/512=0{,}9814453125$
- После перевода умножением полученной дроби получаем: $0{,}7664_8$.
- Выполним умножение на 8^3, т.е. перенесем запятую на 3 разряда вправо и получим результат: $766{,}4_8$.

Смешанные СС

Системы счисления, в которых каждый коэффициент p-ичного разложения числа записывается в q-ичной системе, q<p называются **смешанными**.

В такой системе p называется старшим основанием , q –младшим основанием, а сама смешанная система называется q-p - ичной.

Смешанные СС

925_{10} в двоично-десятичной системе записывается в виде 1001 0010 0101

Эта запись отличается от двоичного изображения данного числа.

В двоичной системе счисления это десятичное число 2341, а не исходное 925.

Смешанные СС

Пусть $p=q^L$, (L – целое положительное число).

Тогда запись какого либо числа в p-q-ичной системе счисления тождественно совпадает с изображением этого числа в системе счисления с основанием q.

Системы счисления с основанием 2

8СС	2СС		
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

16СС	2СС			
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A	1	0	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	1
E	1	1	1	0
F	1	1	1	1

Примеры:

$$101,10111_2 = \underbrace{101}_{5_8},\underbrace{101}_{5_8}\ \underbrace{110_2}_{6_8} = 5,56_8;$$

$$6,24_8 = \underbrace{6}_{110_2},\ \underbrace{2}_{010_2}\ \underbrace{4_8}_{100_2} = 110,0101_2;$$

Примеры:

$$101{,}10111_2 = \underline{0101}\,,\,\underline{1011}\ \ \underline{1000}_2 = 5{,}B8_{16};$$

$$5_{16}\,,\ 11(B)_{16}\ \ 8_{16}$$

$$1A{,}F3_{16} = \underline{\ 1\ }\ \underline{\ A\ }\,,\,\underline{\ F\ }\ \underline{3_{16}} = 11010{,}11110011_2.$$

$$0001_2\ 1010_2,\ 1111_2\ \ 0011_2$$

Арифметика в 2 СС

+	*	-	/
0 + 0 = 0	0 * 0 = 0	0 - 0 = 0	0 / 0 = --
0 + 1 = 1	0 * 1 = 0	10 - 1 = 1	0 / 1 = 0
1 + 0 = 1	1 * 0 = 0	1 - 0 = 1	1 / 0 = --
1 + 1 = 10	1 * 1 = 1	1 - 1 = 0	1 / 1 = 1

Обратный код числа

Обратным кодом числа в системе с основанием p называется число в этой системе, получаемое заменой цифры, символа в каждом разряде числа на его дополнение до максимальной цифры в системе (то есть до $p - 1$).

Пример:

Двоичное число:

10011

Обратный код:

01100

Дополнительный код числа

Дополнительный код

=

обратный код

+

единица в младшем разряде

Пример:

Двоичное число:

10011

Обратный код:

01100

Дополнительный код:

01100

+ 1

01101

Вычитание с дополнительным кодом

А-В, если А>В:

1. Найти **дополнительный код** вычитаемого такой же разрядности, как и уменьшаемое
2. Сложить этот код с уменьшаемым.
3. Результатом вычитания будет полученная сумма без учета старшего разряда (отбрасывается).

Пример:

$$
\begin{array}{r l}
+\;110110_2 & \\
1011_2 & \rightarrow \text{дополнительный код} \\
\hline
1100001_2 & \rightarrow \text{сумма}
\end{array}
$$

$\rightarrow$ отбрасываемая единица

Вычитание с дополнительным кодом

А-В, если А<В:

1. Найти **дополнительный код** вычитаемого такой же разрядности, как и уменьшаемое
2. Сложить этот код с уменьшаемым.
3. Результатом вычитания будет дополнительный код к полученной сумме (лишнего разряда при сложении не появится) с отрицательным знаком.

Пример:

$5 - 10$

$0101_2 - 1010_2$

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 0101_2 \\ 0110_2 \end{array} \\
\hline
1011_2
\end{array}
$$

0110_2 → дополнительный код

1011_2 → сумма

0101_2 → дополнительный код к сумме

Представление чисел

При проектировании ЭВМ, создании инструментального и прикладного программного обеспечения разработчикам приходится решать вопрос о представлении в ЭВМ числовых данных. Для решения большинства прикладных задач обычно достаточно использовать целые и вещественные числа.

Представление чисел

Запись целочисленных данных в запоминающем устройстве ЭВМ не представляет затруднений: число переводится в двоичную систему и записывается в прямом коде.

Диапазон представляемых чисел в этом случае ограничивается количеством выделенных для записи разрядов.

Представление чисел

Для вещественных данных обычно используются две формы записи:

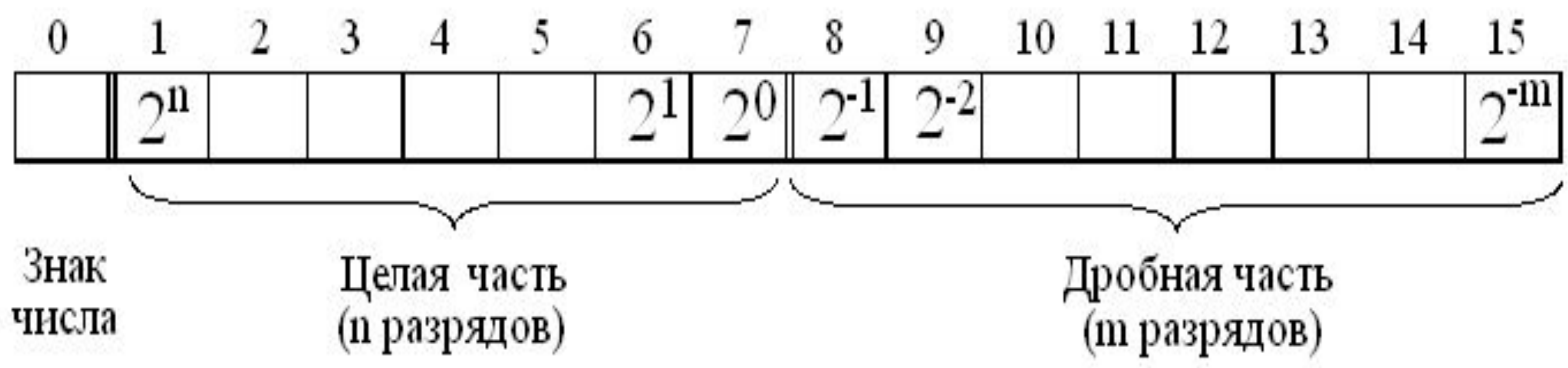
1. число с фиксированной точкой
2. число с плавающей точкой

Фиксированная точка

Форма записи числа с фиксированной точкой использовалась в основном на ранних этапах развития вычислительной техники. Запись числа с фиксированной точкой обычно имеет знаковый и цифровой разряды.

Фиксированная точка означает, что на этапе конструирования ЭВМ было определено, **сколько и какие разряды машинного слова отведены под изображение целой и дробной частей числа.**

Фиксированная точка



Фиксированная точка

Достоинства

Недостатки

Простота выполнения арифметических операций, высокая точность изображения чисел.

небольшой диапазон представления чисел.

Плавающая точка

Представление чисел с плавающей точкой – полулогарифмическая форма записи числа:

$$N = \pm mq \hat{}\pm p$$

где q- основание системы счисления, p - порядок числа, m - мантисса числа N.

Плавающая точка

Положение точки определяется значением порядка p.

С изменением порядка точка перемещается (плавает) влево или вправо.

Пример:

Влево:

$125_{10} =$

$=12.5*10^{1}$

$=1.25*10^{2}$

$=0.125*10^{3}$

$=0.0125*10^{4}$

…

Вправо:

$125_{10} =$

$=1250*10^{-1}$

$=12500*10^{-2}$

$=125000*10^{-3}$

$=1250000*10^{-4}$

…

Плавающая точка

Для установления однозначности при записи чисел принята нормализованная форма записи числа.

Мантисса нормализованного числа может изменяться в диапазоне: $1/q \leq |m| < 1$.

В нормализованных числах цифра после точки должна быть **значащей**.

Плавающая точка

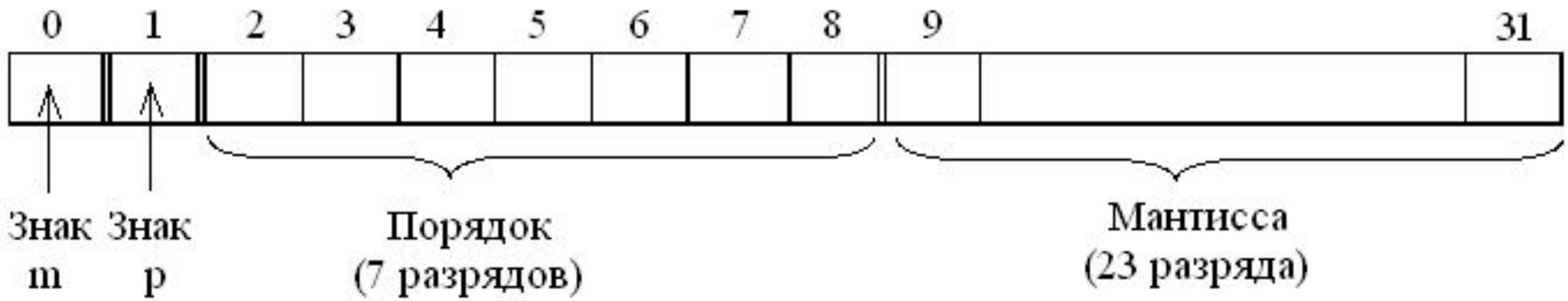
$$\underbrace{0.0832 \cdot 10^{3}}_{\text{ненормализованное число}} = \underbrace{0832 \cdot 10^{2}}_{\text{нормализованное число}}$$

Плавающая точка

Для представления чисел в машинном слове выделяют группы разрядов для изображения:

1. мантиссы,
2. порядка,
3. знака числа,
4. знака порядка.

Плавающая точка



Пример:

Число $A=-11.12=-0.111\cdot 10^{10}$

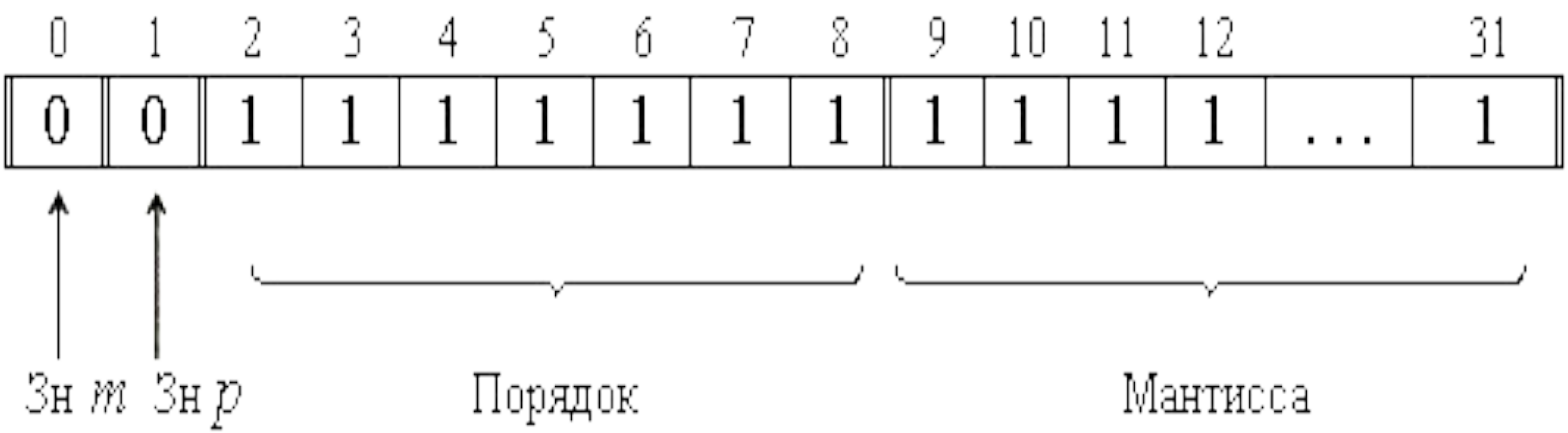
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		31
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	. . .	0

Знак m — Знак p — Порядок (7 разрядов) — Мантисса (23 разряда)

Плавающая точка

Максимальным числом представимым в формате слова будет

$$A=(0.1111...1\cdot 10^{1111111})2=(1\cdot 2^{127})_{10}$$



Плавающая точка

Числа с плавающей точкой позволяют увеличить диапазон обрабатываемых чисел, но при этом точность изображения чисел определяется только разрядами мантиссы и уменьшается по сравнению с числами с фиксированной точкой.

Вопросы для самостоятельного изучения

1. Чем отличается нормальная форма представления числа от нормализованной формы?
2. С какой целью отрицательные числа записываются в дополнительном коде в памяти ЭВМ?
3. Что такое машинный порядок и для чего он нужен?