

Системы счисления и действия в них





План

1. Системы счисления. Классификация
2. Арифметика в двоичной системе счисления
3. Представление чисел в памяти компьютера



Система счисления

Алфавит X из p символов и правила записи и обработки чисел с помощью символов этого алфавита называются **системой счисления** (нумерацией) с основанием p .

Число x в системе счисления с основанием p обозначается как $(x)_p$ или x_p .



Система счисления и кодирование

Любая система счисления – это система кодирования числовых величин, позволяющая выполнять операции кодирования и декодирования.

По любой количественной величине можно однозначно найти ее кодовое представление и по любой кодовой записи – восстановить соответствующую ей числовую величину.



Классификация СС

Системы счисления

Непозиционные

Вес цифры (или символа алфавита) не зависит от ее места в записи числа или слова.

Позиционные

Вес цифры (или символа алфавита) зависит от ее места в записи числа или слова.



Непозиционные СС

Непозиционная система счисления – древняя Римская система записи чисел.

Алфавит системы:

- | | |
|----------|------------|
| ❖ I = 1 | ❖ C = 100 |
| ❖ V = 5 | ❖ D = 500 |
| ❖ X = 10 | ❖ M = 1000 |
| ❖ L = 50 | |



Непозиционные СС

Примеры римских чисел:

$III = 3$, $IV = 4$, $V = 5$, $VI = 6$, $IX = 9$, $XI = 11$,
 $DCL = 650$.

Запись числа в этой системе получается **двусторонней конкатенацией**, причем правая конкатенация ассоциируется с добавлением, а левая конкатенация — с убавлением (например, IV и VI).



Позиционные СС

Все позиционные системы счисления строятся по общему принципу: определяется величина q – основание системы, а любое число «а» записывается в виде комбинации степеней веса p от 0-й степени до степени s .



Позиционные СС

Пусть q - натуральное число больше 1 и $M = \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Говорят, что натуральное число “ a ” записано в позиционной системе с основанием q , если

$$a = a_s q^s + a_{s-1} q^{s-1} + \dots + a_1 q + a_0$$

где s - целое неотрицательное, $a_0, \dots, a_s \in M$ и $a_s \neq 0$.



Позиционные СС

Если каждое число множества $M = \{0, 1, \dots, q-1\}$ обозначено специальным символом, то эти символы называются цифрами q -ичной позиционной системы.

Запись числа в q -ичной позиционной системе счисления выглядит так:

$$a = (a_s a_{s-1} a_{s-2} \dots a_1)_q$$



Позиционные СС

Принятая система записи числа основана на том, что q единиц каждого разряда объединяются в одну единицу соседнего, более старшего разряда.

Это дает возможность проводить арифметические действия в любой позиционной системе счисления по тем же правилам, что в десятичной системе счисления.



Позиционные СС

Наиболее используемые в информатике системы счисления:

- двоичная, над алфавитом $X = \{0,1\}$;
- восьмеричная, над $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
- шестнадцатеричная, над $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$, где символы A, B, C, D, E, F имеют десятичные веса 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Примеры:

$$\blacklozenge 1101_2 =$$

$$\blacklozenge 157_8 =$$

$$\blacklozenge A6F_{16} =$$

$$\blacklozenge 110,01_2 =$$

$$\blacklozenge A,B_{16} =$$



Перевод чисел

Общая задача перевода чисел из одной системы счисления в другую:

Дано:

$$x = (p_n p_{n-1} \dots p_0 p_{-1} p_{-2} \dots)_p$$

p_i – цифры p -ичной системы.

Найти:

$$x = (q_s q_{s-1} \dots q_0 q_{-1} q_{-2} \dots)_q$$

q_j – искомые цифры q -ичной системы.



Перевод $Q \rightarrow R$

Запись и вычисление значения полинома

$$X = x_n q^n + x_{n-1} q^{n-1} + \dots + x_1 q^1 + x_0 q^0 + x_{-1} q^{-1} + \dots + x_{-m} q^{-m}$$

где все цифры x_i и число q заменяются их r -ичными изображениями и все требуемые операции выполняются в r -ичной системе счисления.



Пример:

- ❖ Перевести $(371)_8$ в X_{10}
- ❖ Перевести $(AF,4)_{16}$ в X_{10}

Решение:

$$(371)_8 = (3 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0)_{10} = (3 \cdot 64 + 7 \cdot 8 + 1)_{10} = (249)_{10}$$

$$\begin{aligned}(AF,4)_{16} &= (10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1})_{10} = (160 + 15 + 0,25)_{10} \\ &= 175,25_{10}\end{aligned}$$



Перевод $R \rightarrow Q$

- ❖ Перевод целой части числа
- ❖ Перевод дробной части числа (его мантиссы)



Перевод $P \rightarrow Q$ (целая часть)

N – целое число в p -ичной системе счисления.

$N = (q_s q_{s-1} \dots q_1 q_0)_Q$, где искомые цифры определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$q_i = Q \left\{ \frac{N_i}{Q} \right\} \text{остаток от деления } N \text{ на } Q$$

$$N_{i+1} = \left[\frac{N_i}{Q} \right] \text{целая часть от деления } N \text{ на } Q$$

$i = 0, 1, 2, \dots$; $N_0 = N$ и процесс продолжается до тех пор, пока не станет $N_{i+1} = 0$.



Пример:

❖ Перевести $N=(3060)_{10}$ в X_{16}

Решение:

$$3060 \mid \underline{16}$$

$$\underline{3056} \quad 191 \quad \mid \underline{16}$$

$$4 \quad \underline{176} \quad 11 \mid \underline{16}$$

$$15 \quad 0$$

Таким образом, $q_0=(4)_{16}$, $q_1=(15)_{16}$, $q_2=(11)_{16}$

$$N=(BF4)_{16}$$



Перевод $P \rightarrow Q$ (дробная часть)

Пусть x - правильная дробь ($0 < x < 1$), заданная в p -ичной системе счисления.

Тогда $x = (0, q_{-1}q_{-2}\dots q_{-m})_Q$, где искомые цифры определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$q_{-(i+1)} = [x_i \cdot Q], \quad x_{i+1} = \{x_i \cdot Q\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad x_0 = x$$

и процесс продолжается до тех пор, пока не будет получено $x_{i+1} = 0$ либо не будет достигнута требуемая точность изображения числа.



Пример:

❖ Перевести $N=(0,2)_{10}$ в X_2

Решение:

$$\begin{array}{r|l} 0 & 2 \\ \hline & 2 \\ \hline 0 & 4 \\ \hline & 2 \\ \hline 0 & 8 \\ \hline & 2 \\ \hline 1 & 6 \\ \hline & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline & \end{array}$$

$$X=0,00110011\dots$$



Перевод произвольных чисел

Пусть $x > 1$ – произвольное число, заданное своим изображением в системе счисления с основанием P .

Подберем число $M = Q^k$, чтобы число $X/M < 1$.

Полученную правильную дробь можно перевести в Q -ичную систему с использованием только операций умножения.

Для получения Q -ичного изображения исходного числа x достаточно результат умножить на Q^k , что равносильно перенесению запятой в Q -ичном изображении числа на k разрядов вправо.



Пример:

❖ Перевести $502,5_{10}$ в X_8

Решение:

- ❖ $X=502,5$
- ❖ $Q=8$.
- ❖ $k=3$, тогда $M=8_3=512$.
- ❖ $502,5/512=0,9814453125$
- ❖ После перевода умножением полученной дроби получаем: $0,7664_8$.
- ❖ Выполним умножение на 8^3 , т.е. перенесем запятую на 3 разряда вправо и получим результат: $766,4_8$.



Смешанные СС

Системы счисления, в которых каждый коэффициент p -ичного разложения числа записывается в q -ичной системе, $q < p$ называются **смешанными**.

В такой системе p называется старшим основанием, q – младшим основанием, а сама смешанная система называется **q - p -ичной**.



Смешанные СС

925_{10} в двоично-десятичной системе записывается в виде 1001 0010 0101

Эта запись отличается от двоичного изображения данного числа.

В двоичной системе счисления это десятичное число 2341, а не исходное 925.



Смешанные СС

Пусть $p=q^L$, (L – целое положительное число).

Тогда запись какого либо числа в p - q -ичной системе счисления тождественно совпадает с изображением этого числа в системе счисления с основанием q .



Системы счисления с основанием 2

8СС	2СС		
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

16СС	2СС			
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A	1	0	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	1
E	1	1	1	0
F	1	1	1	1



Примеры:

$$101,10111_2 = \frac{101}{5_8}, \frac{101}{5_8} \frac{110_2}{6_8} = 5,56_8;$$

$$6,24_8 = \frac{6}{110_2}, \frac{2}{010_2} \frac{4_8}{100_2} = 110,0101_2;$$



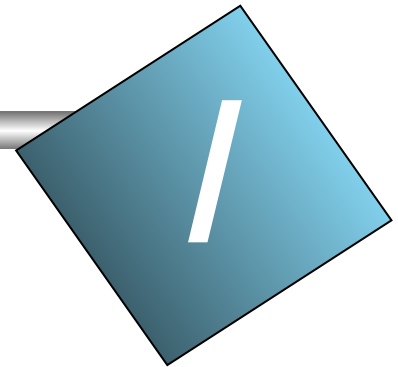
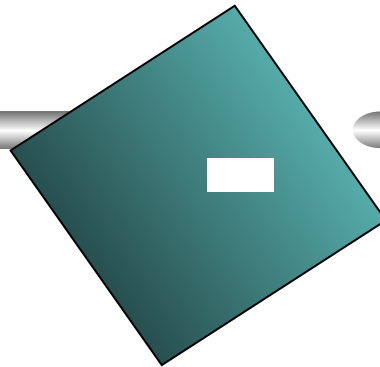
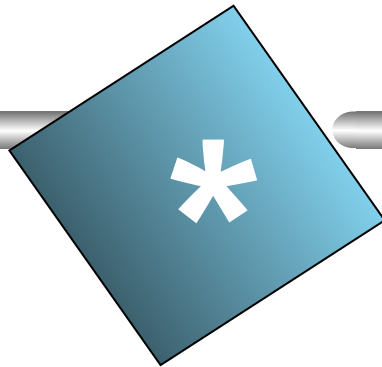
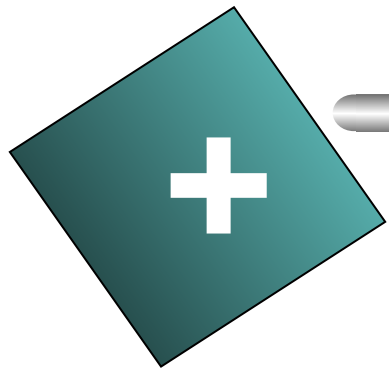
Примеры:

$$101,10111_2 = \underbrace{0101}_{5_{16}}, \underbrace{1011}_{11(B)_{16}} \underbrace{1000_2}_{8_{16}} = 5, B8_{16};$$

$$1A, F3_{16} = \underbrace{1}_{0001_2} \underbrace{A}_{1010_2}, \underbrace{F}_{1111_2} \underbrace{3_{16}}_{0011_2} = 11010, 11110011_2.$$



Арифметика в 2 СС



$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 10$$

$$0 * 0 = 0$$

$$0 * 1 = 0$$

$$1 * 0 = 0$$

$$1 * 1 = 1$$

$$0 - 0 = 0$$

$$10 - 1 = 1$$

$$1 - 0 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 / 0 = \text{--}$$

$$0 / 1 = 0$$

$$1 / 0 = \text{--}$$

$$1 / 1 = 1$$



Обратный код числа

Обратным кодом числа в системе с основанием p называется число в этой системе, получаемое заменой цифры, символа в каждом разряде числа на его дополнение до максимальной цифры в системе (то есть до $p - 1$).



Пример:

Двоичное число:

10011

Обратный код:

01100



Дополнительный код числа

Дополнительный код

=

обратный код

+

единица в младшем разряде

Пример:

Двоичное число:

10011

Обратный код:

01100

Дополнительный код:

01100

+ 1

01101



Вычитание с дополнительным кодом

A-B, если $A > B$:

1. Найти **дополнительный код** вычитаемого такой же разрядности, как и уменьшаемое
2. Сложить этот код с уменьшаемым.
3. Результатом вычитания будет полученная сумма без учета старшего разряда (отбрасывается).



Пример:

$$\begin{array}{r} + 110110_2 \\ \quad 1011_2 \\ \hline 1100001_2 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{дополнительный код} \\ \Rightarrow \text{сумма} \end{array}$$

\rightarrow отбрасываемая единица



Вычитание с дополнительным кодом

A-B, если $A < B$:

1. Найти **дополнительный код** вычитаемого такой же разрядности, как и уменьшаемое
2. Сложить этот код с уменьшаемым.
3. Результатом вычитания будет дополнительный код к полученной сумме (лишнего разряда при сложении не появится) с отрицательным знаком.



Пример:

5 - 10

$0101_2 - 1010_2$

$$\begin{array}{r} + 0101_2 \\ 0110_2 \Rightarrow \text{дополнительный код} \\ \hline 1011_2 \Rightarrow \text{сумма} \end{array}$$

$\rightarrow 0101_2 \Rightarrow \text{дополнительный код к сумме}$



Представление чисел

При проектировании ЭВМ, создании инструментального и прикладного программного обеспечения разработчикам приходится решать вопрос о представлении в ЭВМ числовых данных. Для решения большинства прикладных задач обычно достаточно использовать целые и вещественные числа.



Представление чисел

Запись целочисленных данных в запоминающем устройстве ЭВМ не представляет затруднений: число переводится в двоичную систему и записывается в прямом коде.

Диапазон представляемых чисел в этом случае ограничивается количеством выделенных для записи разрядов.



Представление чисел

Для вещественных данных обычно используются две формы записи:

1. число с фиксированной точкой
2. число с плавающей точкой



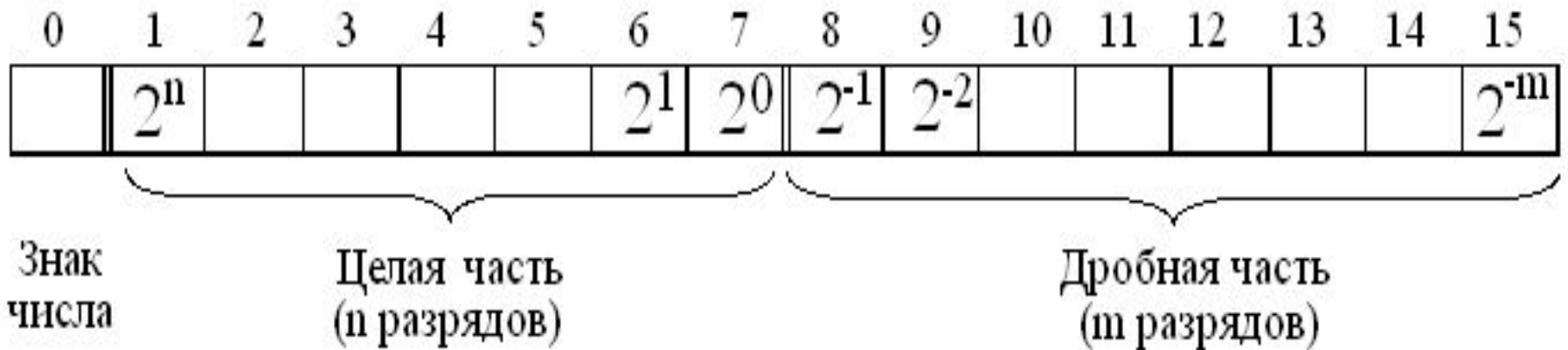
Фиксированная точка

Форма записи числа с фиксированной точкой использовалась в основном на ранних этапах развития вычислительной техники. Запись числа с фиксированной точкой обычно имеет знаковый и цифровой разряды.

Фиксированная точка означает, что на этапе конструирования ЭВМ было определено, **сколько и какие разряды машинного слова отведены под изображение целой и дробной частей числа.**



Фиксированная точка





Фиксированная точка

Достоинства

**Простота выполнения
арифметических операций,
высокая точность
изображения чисел.**

Недостатки

**небольшой
диапазон
представления
чисел.**



Плавающая точка

Представление чисел с плавающей точкой –
полулогарифмическая форма записи числа:

$$N = \pm m q^{\pm p}$$

где q - основание системы счисления, p -
порядок числа, m - мантисса числа N .



Плавающая точка

Положение точки определяется значением порядка p .

С изменением порядка точка перемещается (плавает) влево или вправо.



Пример:

Влево:

$$125_{10} =$$

$$= 12.5 * 10^1$$

$$= 1.25 * 10^2$$

$$= 0.125 * 10^3$$

$$= 0.0125 * 10^4$$

...

Вправо:

$$125_{10} =$$

$$= 1250 * 10^{-1}$$

$$= 12500 * 10^{-2}$$

$$= 125000 * 10^{-3}$$

$$= 1250000 * 10^{-4}$$

...



Плавающая точка

Для установления однозначности при записи чисел принята нормализованная форма записи числа.

Мантисса нормализованного числа может изменяться в диапазоне: $1/q \leq |m| < 1$.

В нормализованных числах цифра после точки должна быть значащей.



Плавающая точка

$$\underbrace{0.0832 \cdot 10^3}_{\text{ненормализованное}} = \underbrace{0832 \cdot 10^2}_{\text{нормализованное}}$$

ненормализованное
число

нормализованное
число



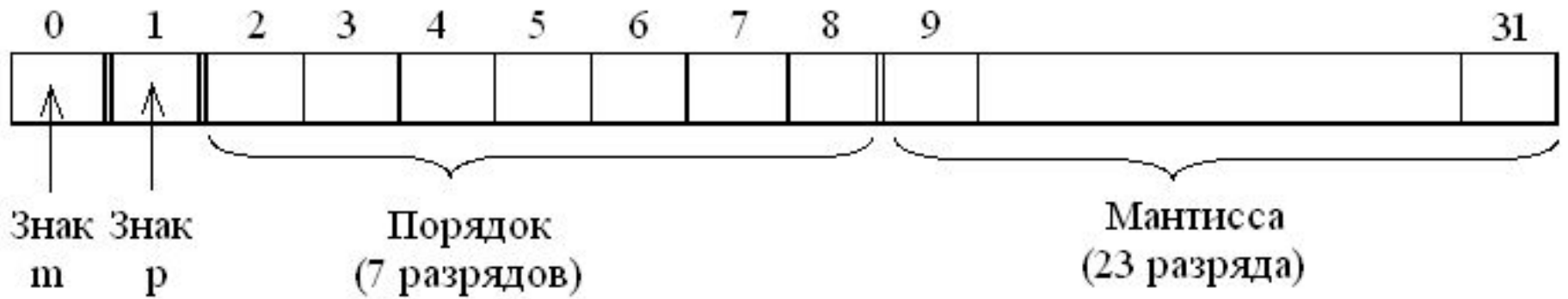
Плавающая точка

Для представления чисел в машинном слове выделяют группы разрядов для изображения:

1. мантиссы,
2. порядка,
3. знака числа,
4. знака порядка.

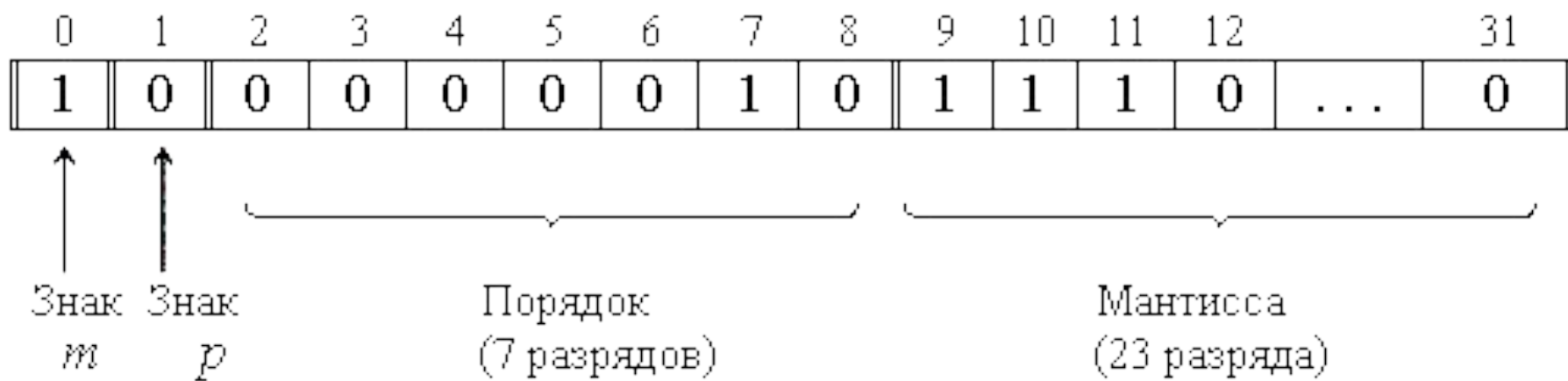


Плавающая точка



Пример:

Число $A = -11.12 = -0.111 \cdot 10^{10}$





Плавающая точка

Числа с плавающей точкой позволяют увеличить диапазон обрабатываемых чисел, но при этом точность изображения чисел определяется только разрядами мантиссы и уменьшается по сравнению с числами с фиксированной точкой.



Вопросы для самостоятельного изучения

1. Чем отличается нормальная форма представления числа от нормализованной формы?
2. С какой целью отрицательные числа записываются в дополнительном коде в памяти ЭВМ?
3. Что такое машинный порядок и для чего он нужен?