

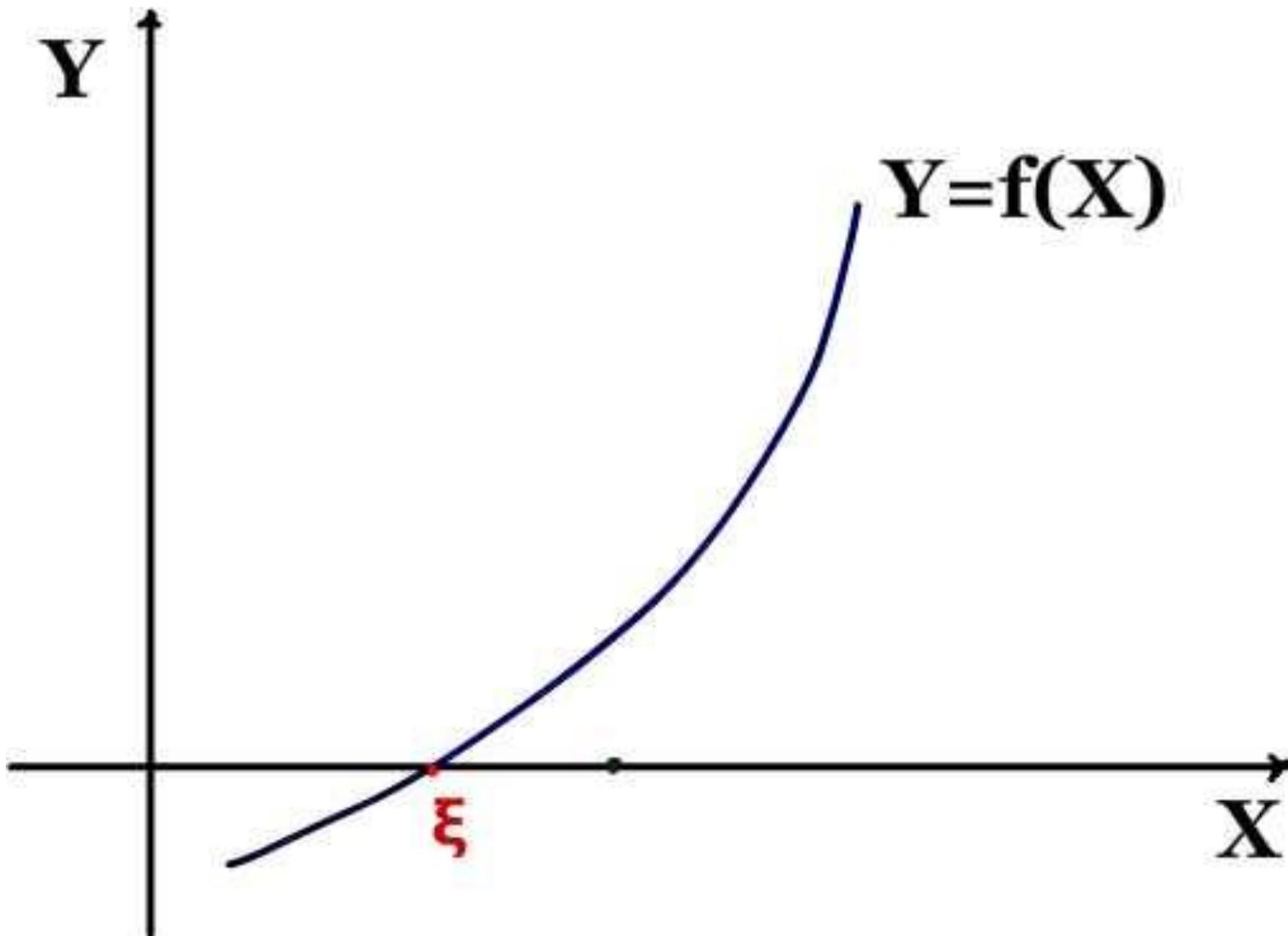
Численные методы решения уравнений

МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Кондраткова Т.А.,
учитель информатики в.к.к.
ГОО лицея № 82 Петроградского района СПб.

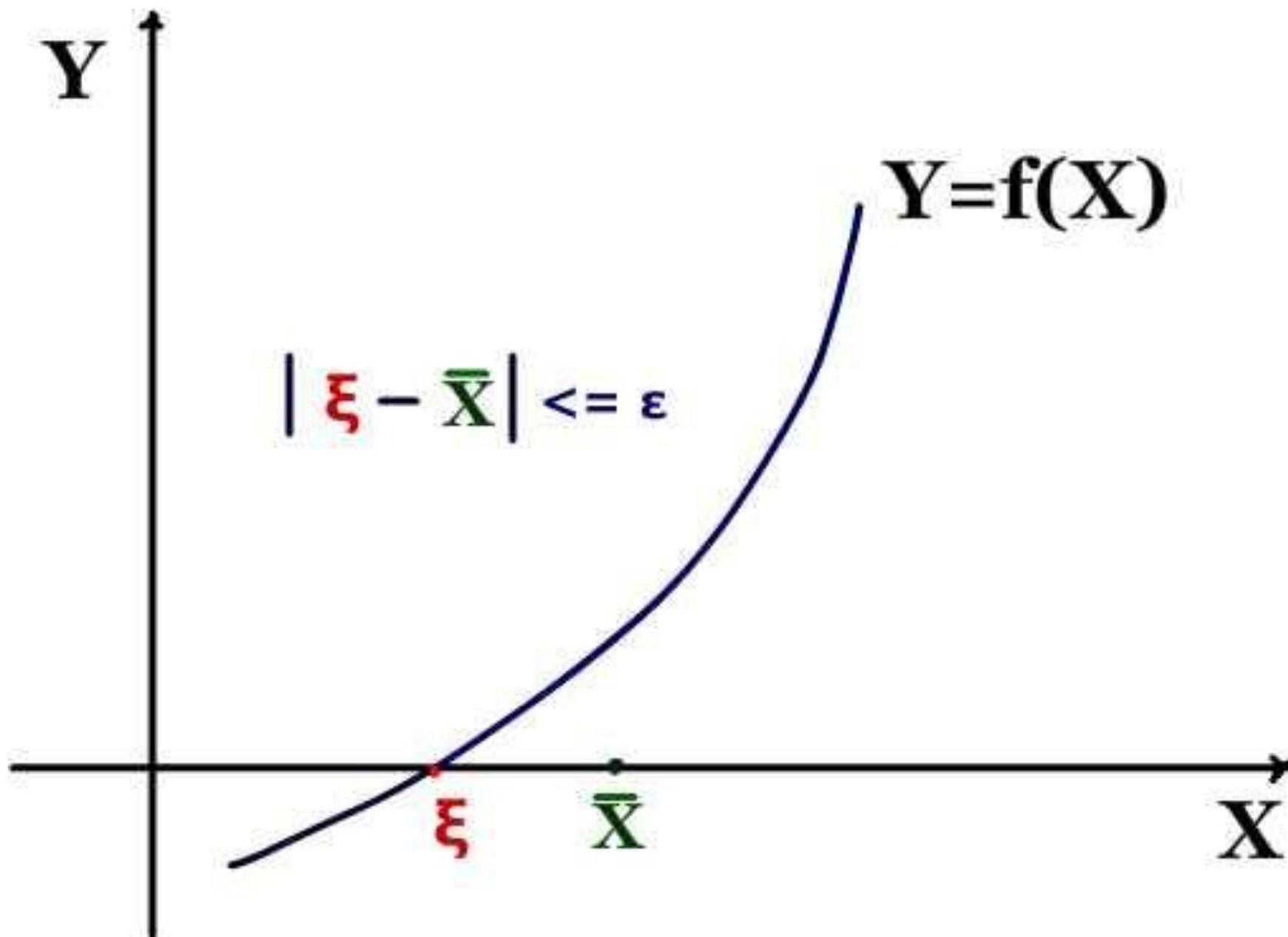
Вопросы для повторения:

- Что значит решить уравнение $f(x)=0$?
 - Дайте определение корня уравнения?
 - Объясните геометрический смысл корня?
-



Вопросы для повторения:

- В каких случаях мы прибегаем к численным методам решения уравнений?
 - Что значит корень вычислен с заданной степенью точности ϵ ?
-



Вопросы

для повторения:

- **Теорема 1** о существовании корня на отрезке? Необходимое условие существования корня.
 - **Теорема 2** о существовании корня на отрезке? Необходимое и достаточное условие существования корня.
 - **Теорема 3** о существовании корня на отрезке?
-

Вопросы для повторения:

- Из каких этапов состоит процесс нахождения корней приближенными (численными) методами?
 - Что значит отделить корни?
 - Когда корень считается отделённым на отрезке?
-

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ:

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ - непрерывная функция. Требуется определить вещественный корень этого уравнения, заключенный на отрезке $[a, b]$.

Заменяем уравнение $f(x) = 0$
равносильным ему уравнением $x = \varphi(x)$ (1)

Выберем каким-либо способом $x_0 \in [a, b]$

и подставим его в правую часть уравнения (1);
тогда получим $x_1 = \varphi(x_0)$

Затем это значение x_1 подставим снова в правую часть
уравнения (1) и получим $x_2 = \varphi(x_1)$

Повторяя этот процесс, получим последовательность чисел
 $x_n = \varphi(x_{n-1})$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ:

Возможны два случая:

- 1.** Последовательность $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ сходится, т.е. имеет предел, и тогда этот предел будет корнем уравнения

$$f(x) = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \xi$$

- 2.** Последовательность $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ расходится, т.е. не имеет предела.
-

Теорема

о сходимости итерационного процесса

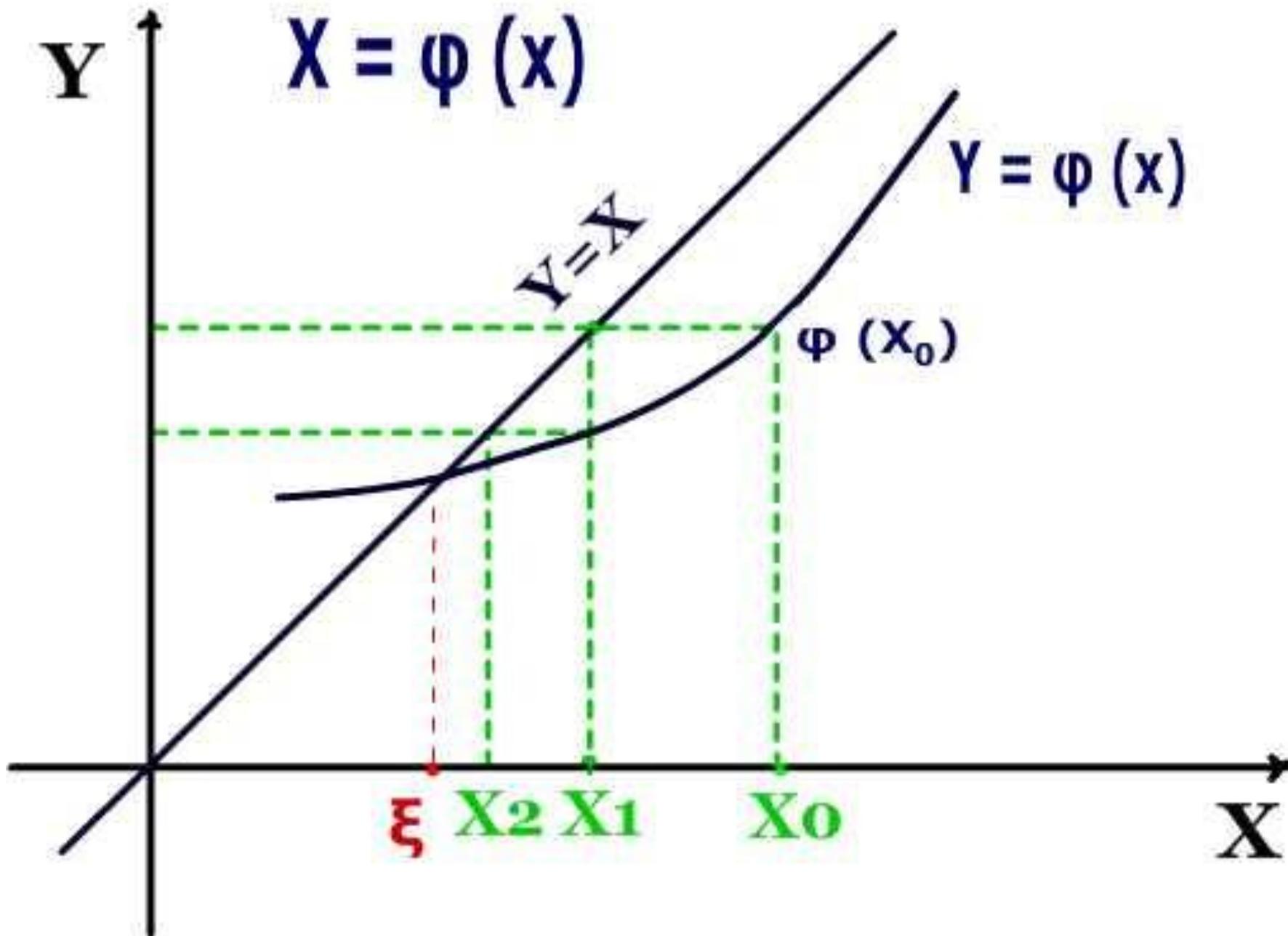
Пусть на отрезке $[a, b]$ имеется единственный корень уравнения $X = \varphi(X)$.

Если во всех точках этого отрезка производная $\varphi'(X)$ удовлетворяет неравенству $|\varphi'(X)| \leq q < 1$

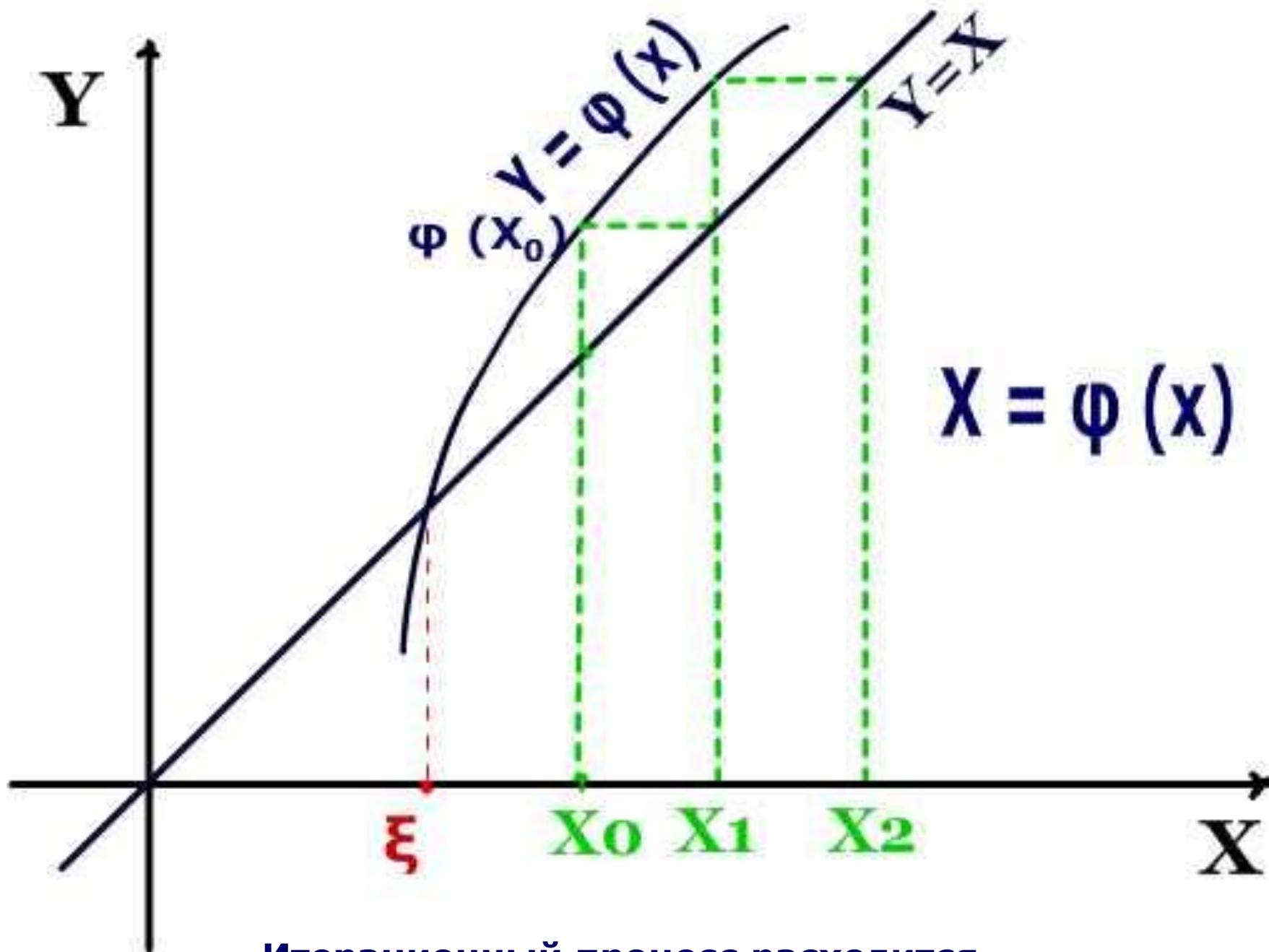
Если при этом выполняется условие $a \leq \varphi(X) \leq b$, то итерационный процесс сходится, а за первое приближение можно взять любое число из отрезка $[a, b]$.

Последнее условие означает, что все приближения $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ находятся на отрезке $[a, b]$.

Чем меньше $|\varphi'(X)|$, тем лучше сходится итерационный процесс.



Итерационный процесс сходится



Итерационный процесс расходится

Точность приближения

Пусть ξ точное значение корня уравнения $X = \Phi(X)$,
а число q определяется из соотношения

$$|\Phi'(X)| \leq q < 1$$

(Практически q можно получить как верхнюю границу модуля производной $|\Phi'(x)|$ при $X \in [a, b]$)

Тогда справедливо соотношение

$$|\xi - X_n| \leq q/(1-q) |X_n - X_{n-1}|$$

Если поставить условие, что истинное значение корня должно отличаться от приближенного значения на величину ε , т. е. $|\xi - X_n| \leq \varepsilon$, то приближения $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ надо вычислять до тех пор, пока не будет выполнено неравенство:

$$q/(1-q) |X_n - X_{n-1}| \leq \varepsilon$$

или $|X_n - X_{n-1}| \leq \varepsilon (1-q)/q$

Замечание:

Уравнение $f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ привести к виду $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x})$ можно различными способами, однако для применения метода простой итерации следует взять то из них, для которого выполняется теорема о сходимости.

Описание данных в программе

Var

X2, X1, q, E: real;

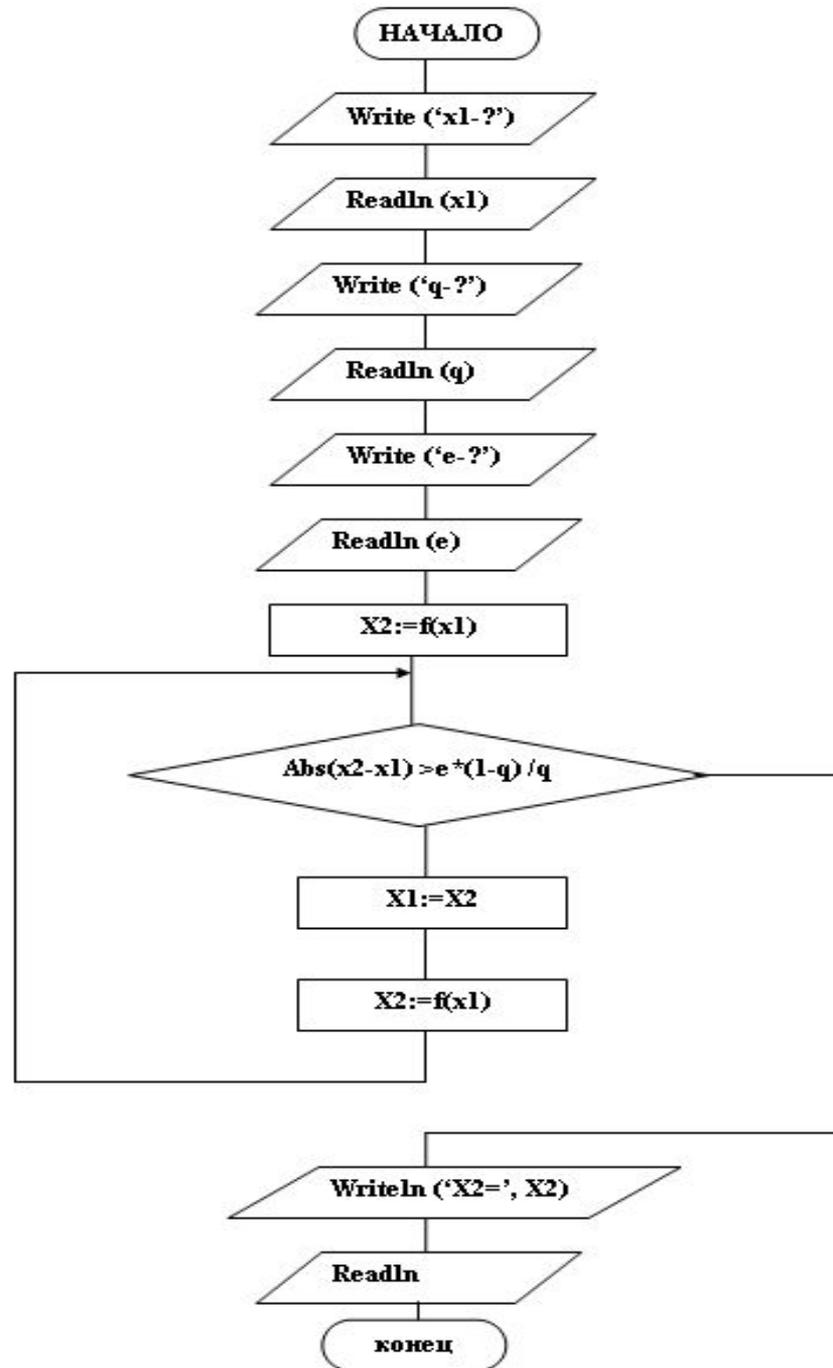
Function f(t:real):real;

Begin

F:=exp(t)-2;

End;

БЛОК-СХЕМА



ДААННЫЕ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ

$$e^x - x - 2 = 0 \text{ или } X = e^x - 2$$

Начальное приближение

$$X_1 = -2$$

$$q = 0.5$$

Точность вычислений

$$E = 0.00000001$$

Ответ: $X_2 = -1.84140567$

$$e^x - x^2 = 0 \text{ или } X = -\sqrt{e^x}$$

$[-0.725; -0.7]$, $X_1 = -0.7$

$$q = 0.36$$

$$e = 0.00001$$

$X_2 = -0.70346$

Задание на дом:

- По конспекту **выучить** основные определения и понятия.
 - **Знать** алгоритм итерационного метода. (Блок-схема).
 - **Преобразовать программу:**
использовать цикл с постусловием.
-