Методы вычислений

1. Алгоритм Евклида
2. Решение уравнений
3. Оптимизация
4. Восстановление зависимостей
5. Статистика
6. Моделирование

Методы вычислений

Тема 1. Алгоритм Евклида

Вычисление НОД

НОД = наибольший общий делитель двух натуральных чисел – это наибольшее число, на которое оба исходных числа делятся без остатка.

Перебор:

1. Записать в переменную `k` минимальное из двух чисел.
2. Если `a` и `b` без остатка делятся на `k`, то стоп.
3. Уменьшить `k` на 1.
4. Перейти к шагу 2.

это цикл с условием!

Где будет НОД?

Почему алгоритм обязательно закончится?

Вычисление НОД (перебор)

```
k := a; { или k := b; }
while (a mod k <> 0) or
      (b mod k <> 0) do
  k := k - 1;
writeln ('НОД(', a, ',', b, ')=', k);
```

ИЛИ

? Почему можно начинать с любого числа?

? Как начать с минимального?

много операций для больших чисел

Алгоритм Евклида

```
НОД(a,b)=НОД(a-b, b)
        =НОД(a, b-a)
```

Евклид
(365-300 до. н. э.)

Заменяем большее из двух чисел разностью большего и меньшего до тех пор, пока они не станут равны. Это и есть НОД.

Пример:

```
НОД (14, 21) = НОД (14, 21-14) = НОД (14, 7)
             = НОД (7, 7) = 7
```

Реализация алгоритма Евклида

```
пока a ≠ b делай
  если a > b, то
        a := a - b
  иначе b := b - a;
```

Где будет НОД? Как его вывести?

много шагов при большой разнице чисел:

НОД(1998,2)=НОД(1996,2)= … =2

Модифицированный алгоритм Евклида

```
НОД(a,b)=НОД(a mod b,b)
        =НОД(a, b mod a)
```

Заменяем большее из двух чисел остатком от деления большего на меньшее до тех пор, пока меньшее не станет равно нулю. Тогда большее — это НОД.

Пример:

```
НОД(14,21)=НОД(14,7)=НОД(0,7)=
7
```

Еще один вариант:

```
НОД(2·a,2·b)= 2·НОД(a,b)
НОД(2·a,b)=НОД(a,b) // при нечетном b
```

Задания

«4»: Составить программу для вычисления НОД и заполнить таблицу:

N	64168	358853	6365133	17905514	549868978
M	82678	691042	11494962	23108855	298294835
НОД(N,M)					

«5»: То же самое, но сравнить для всех пар число шагов обычного и модифицированного алгоритмов (добавить в таблицу еще две строчки).

Методы вычислений

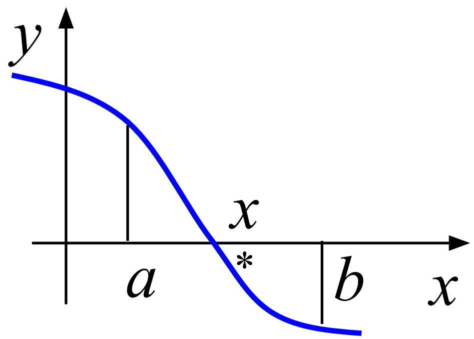
Тема 2. Решение уравнений

Методы решения уравнений $f(x) = 0$

- **Точные (аналитические)**

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi k, \;\; k \in Z$$

- **Приближенные**
  - **графические**



  - **численные** (методы последовательного приближения):

1) по графику найти интервал $[a, b]$, в котором находится x^* (или одно **начальное приближение** x_0)
2) по некоторому алгоритму уточнить решение, сужая интервал, в котором находится x^*
3) повторять шаг 2, пока не достигнута требуемая точность:

$$b - a < \varepsilon$$

Численные методы

Применение: используются тогда, когда точное (аналитическое) решение неизвестно или очень трудоемко.

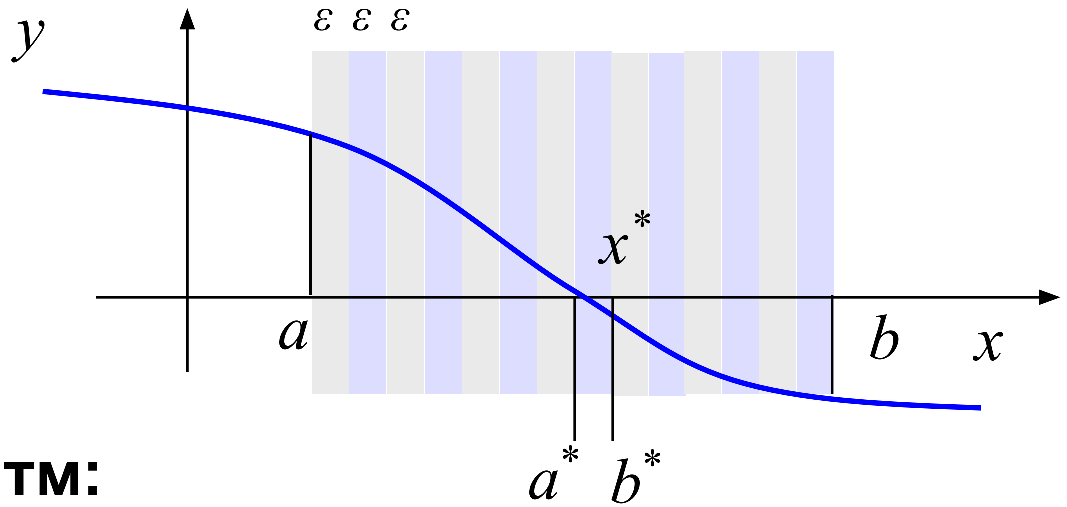
- дают хотя бы какое-то **решение**
- во многих случаях можно оценить ошибку и найти решение **с заданной точностью**

- решение всегда приближенное, **неточное**

$$\sqrt{x+1} - 4\sin(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{x = 1{,}3974} \qquad \boxed{x \approx 1{,}3974}$$

Метод прямого перебора

Задача: найти решение уравнения $f(x) = 0$ на интервале $[a, b]$ с заданной точностью ε (чтобы найденное решение отличалось от истинного не более, чем на ε).



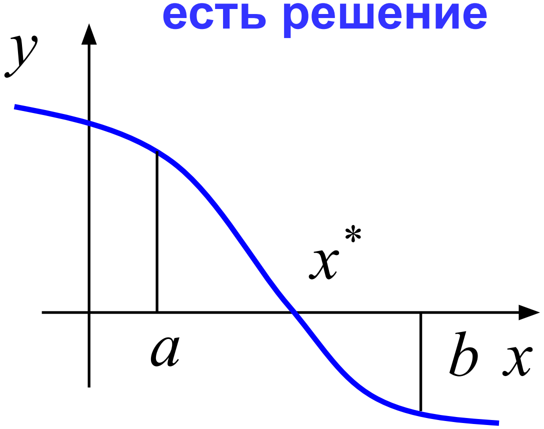
Алгоритм:

- разбить интервал $[a, b]$ на полосы шириной ε
- найти полосу $[a^*, b^*]$, в которой находится x^*
- решение – a^* или b^*

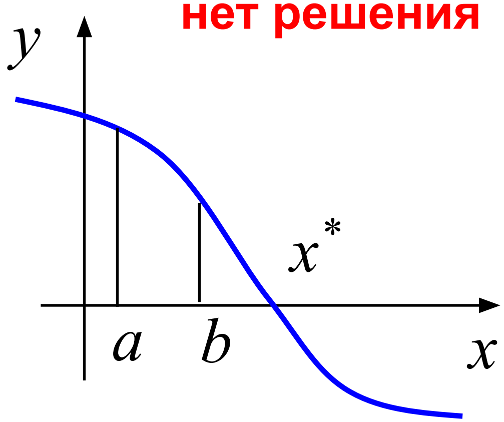
Как улучшить решение?

Есть ли решение на [a, b]?

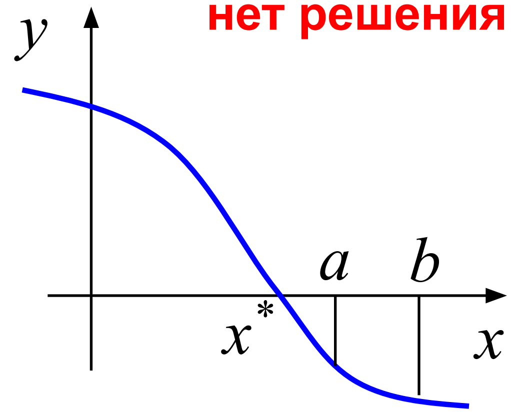
есть решение



нет решения



нет решения



$$f(a)>0$$
$$f(b)<0$$

$$f(a)>0 \qquad f(a)<0$$
$$f(b)>0 \qquad f(b)<0$$

$$f(a)f(b)<0$$

$$f(a)f(b)>0$$

! **Если *непрерывная* функция $f(x)$ имеет разные знаки на концах интервала [a, b], то в некоторой точке x внутри [a, b] она равна 0, то есть $f(x) = 0$!**

Метод прямого перебора

```
eps := 0.001; { точность решения }
x := a;
пока f(x)*f(x+eps) > 0 делай
  x := x + eps; { к следующему интервалу}
конец
ответ := x;
```

Как повысить точность без лишних вычислений?

```
eps := 0.001; { точность решения }
x := a;
while f(x)*f(x+eps) > 0 do begin
  x := x + eps; { к следующему интервалу}
end;
x := x + eps/2;
```

Что опасно?

Метод прямого перебора

```
program qq;
var ...: real;
function f(x: real): real;
begin
  f := -x;
end;
begin
  { основная программа }
end.
```

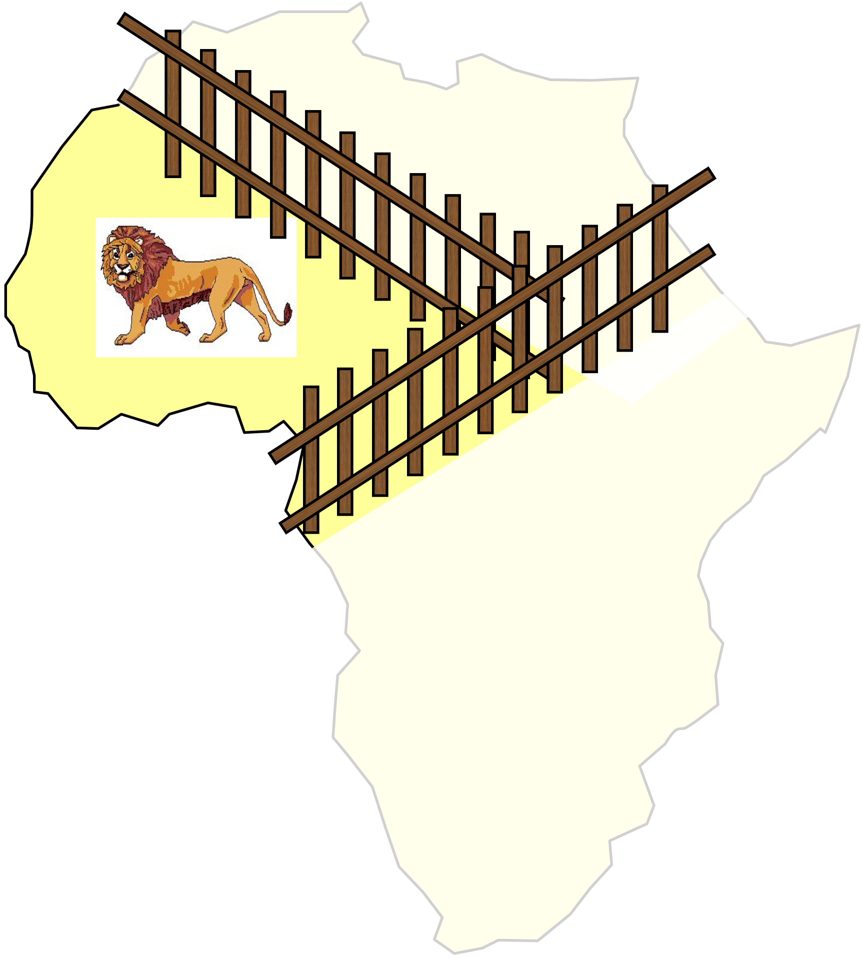
Как найти все решения на [a,b]?

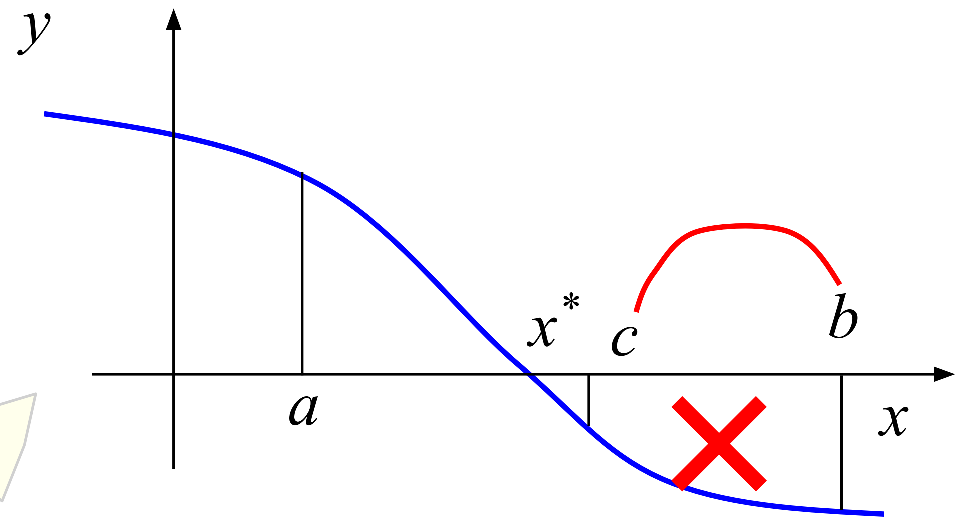
Задания

«4»: Найти все решения уравнения $x^2 = 5\cos(x-1)$ **на интервале [-5,5] и вывести их на экран.**

«5»: Сделать то же самое с помощью только одного цикла.

Метод дихотомии (деление пополам)





1. Найти середину отрезка `[a,b]`:
   `c = (a + b) / 2;`
2. Если `f(c)*f(a)<0`, сдвинуть правую границу интервала
   `b = c;`
3. Если `f(c)*f(a)` ≥ `0`, сдвинуть левую границу интервала
   `a = c;`
4. Повторять шаги 1-3, пока не будет `b – a ≤ ε.`

Метод дихотомии (деления пополам)

- **простота**
- можно получить решение с **любой** заданной **точностью**

- нужно знать **интервал** $[a, b]$
- на интервале $[a, b]$ должно быть только **одно** решение
- **большое число шагов** для достижения высокой точности
- только для функций **одной** переменной

Метод дихотомии (в программе)

```
пока b - a > eps делай
  c := (a + b) / 2;
  если f(a)*f(c) < 0 то
        b := c
  иначе a := c;
конец
ответ := (a + b) / 2;
```

Задания

«4»: Найти все решения уравнения $x^2 = 5\cos(x-1)$ **на интервале [-5,5] методом дихотомии и вывести их на экран.**

«5»: Сделать задачу на «4» и сравнить число шагов цикла при использовании метода перебора и метода дихотомии.

Решение уравнений в Excel

Задача: найти все решения уравнения $x^2 = 5\cos x$ на интервале [-5,5]

Как решить математическими методами?

Методы решения уравнений:

- **аналитические**: решение в виде формулы $x = \ldots$
- **численные**: *приближенное* решение, число
  1) выбрать *начальное приближение* x_0 «рядом» с решением

     Как выбрать начальное приближение?

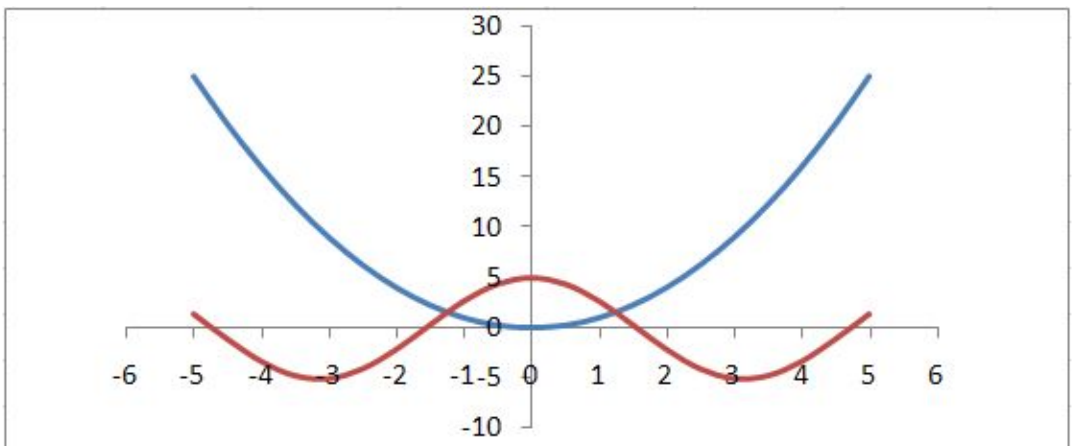
  2) по некоторому алгоритму вычисляют первое приближение, затем – второе и т.д. $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots$
  3) вычисления прекращают, когда значение меняется очень мало (метод сходится) $x_0 \to \ldots \to x_{15} \to x_{16} \approx x^*$

Решение уравнения $x^2 = 5\cos x$

1. Таблица значений функций на интервале [-5,5]

	A	B	C	D
1	x	f1	f2	
2	-5	=A2^2	=5*COS(A2)	
3	-4,5			
4				

2. Графики функций (диаграмма «Точечная»)



2 решения:
начальные приближения

$$x_0 = -1{,}5$$

$$x_0 = 1{,}5$$

Решение уравнения $x^2 = 5\cos x$

3. Подготовка данных

начальное приближение

	E	F	G	H
1	x	f1	f2	f2-f1
2	-1,5	=E2^2	=5*COS(E2)	=F2-G2
3				

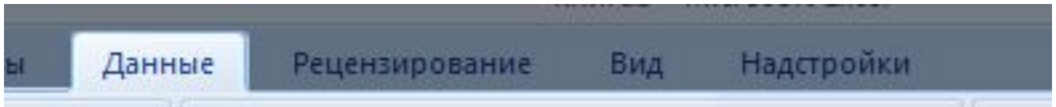
целевая ячейка

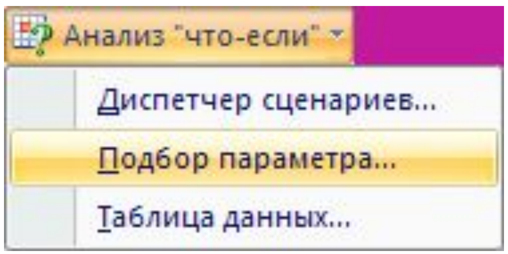
Цель: **H2=0**

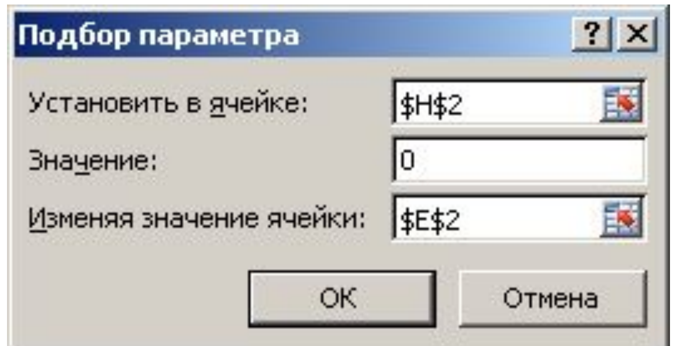
Зачем нужна разность?

Решение уравнения $x^2 = 5\cos x$

4. Подбор параметра







ошибка

решение уравнения

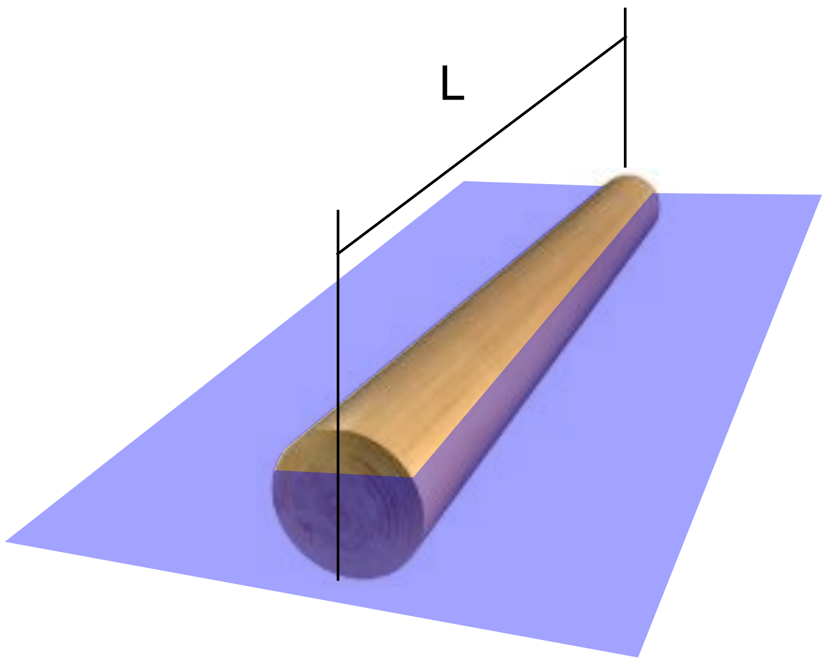
	E	F	G	H
1	x	f1	f2	f2-f1
2	-1,252	1,568	1,567	0,00053

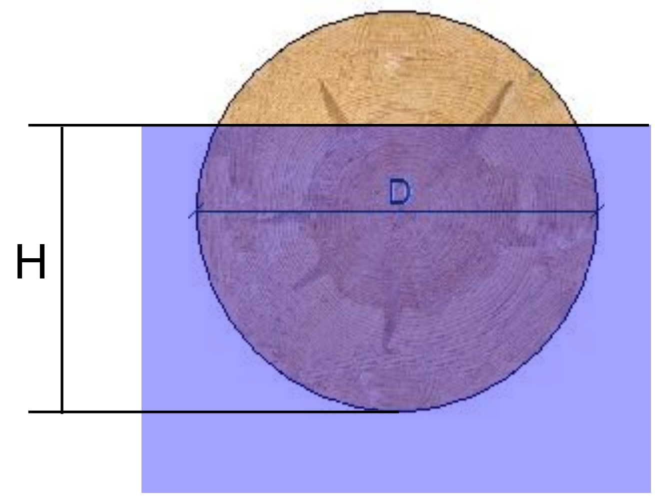
Почему не нуль?

Как найти второе решение?

Плавающее бревно

На сколько погрузится бревно радиуса R, брошенное в воду, если плотность дерева $\rho_д$ = 700 кг/м^3. Плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3?

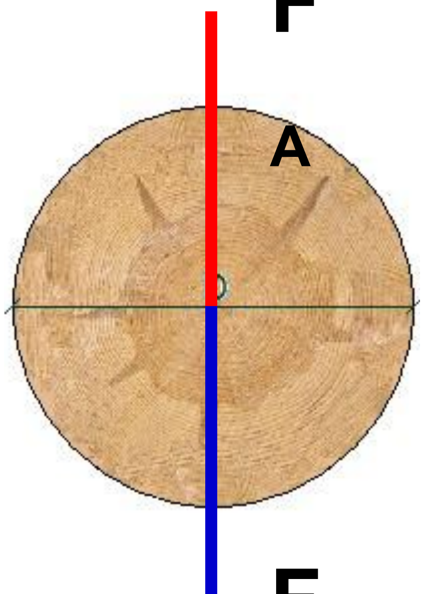




Плавающее бревно: силы

Сила Архимеда

F_A



F_g

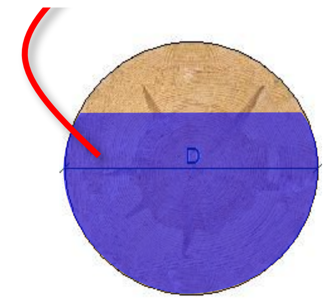
Сила тяжести

объем погруженной части

площадь сечения погруженной части

$$F_A = \rho_B \cdot g \cdot V_1$$

площадь сечения



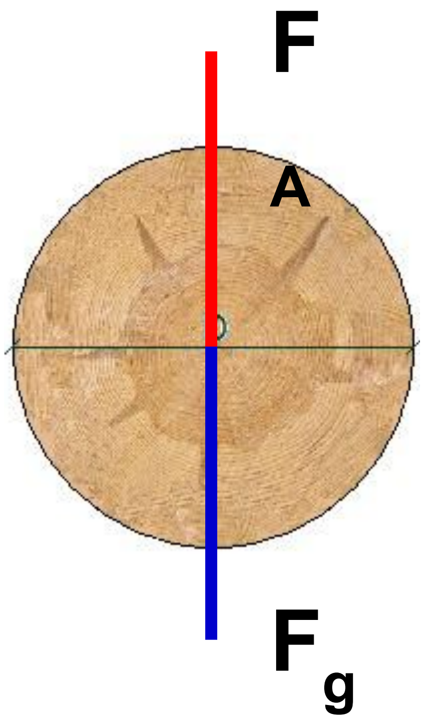
$$F_g = mg = \rho \cdot V \cdot g$$

полный объем

$$S = \pi \cdot R^2$$

Плавающее бревно: равновесие

Сила Архимеда



Сила тяжести

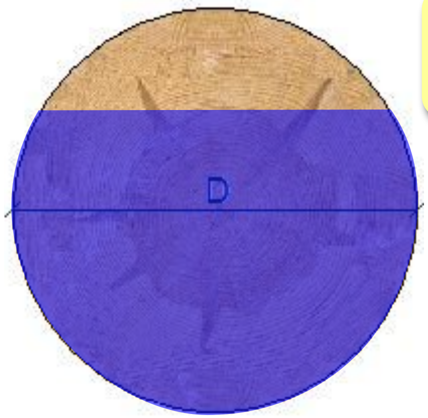
$$F_A = F_g$$

$$\rho_B \cdot S_1 \cdot \cancel{L \cdot g} = \rho \cdot S \cdot \cancel{L \cdot g}$$

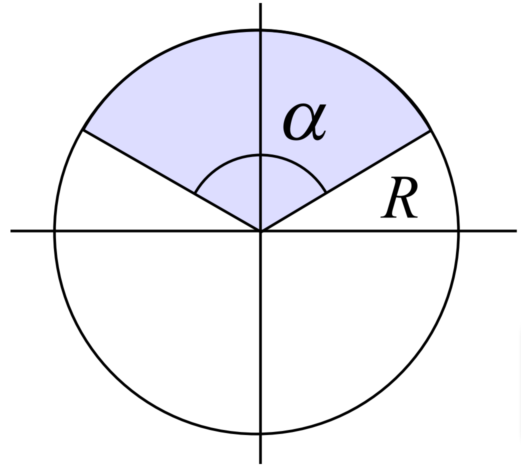
$$\boxed{\rho_B \cdot S_1 = \rho \cdot S}$$

неизвестно

Плавающее бревно: площадь сечения

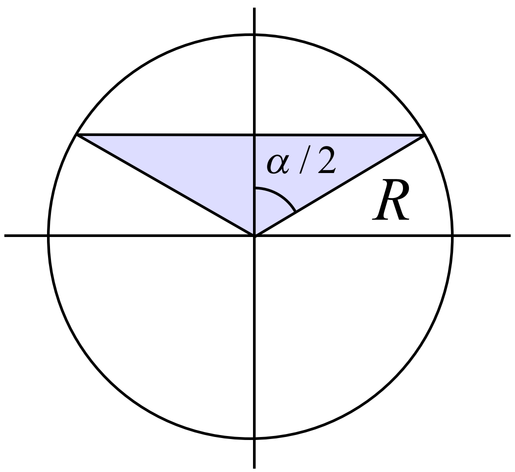


S_1



$$S_0 = \frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha$$

$$2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$$



$$S_\Delta = 2 \cdot \frac{1}{2} R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin\alpha$$

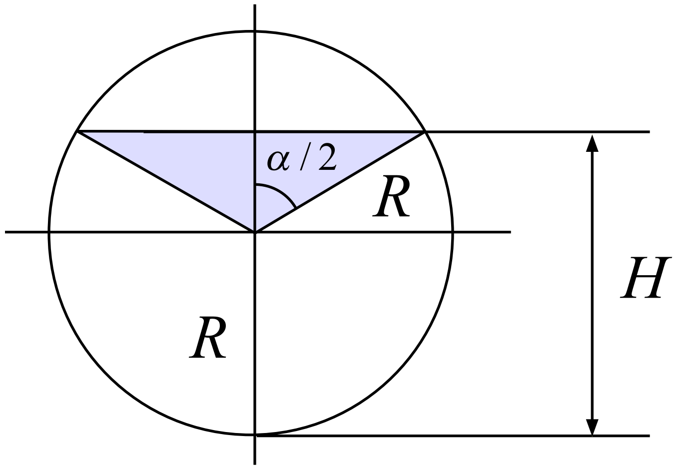
$$S_1 = \pi \cdot R^2 - S_0 + S_\Delta$$

Плавающее бревно: уравнение

$$\rho_B \cdot S_1 = \rho \cdot S$$

$$\rho_B \cdot \left[\pi \cdot R^2 - \frac{1}{2} R^2 \cdot (\alpha - \sin\alpha) \right] = \rho \cdot \pi \cdot R^2$$

найти α



$$H = R + R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

Методы вычислений

Тема 3. Оптимизация

Оптимизация

Оптимизация – это поиск оптимального (наилучшего) варианта в заданных условиях.

Оптимальное решение – такое, при котором некоторая заданная функция (*целевая функция*) достигает минимума или максимума.

Постановка задачи:

- **целевая функция**

  $f(x) \to \min$ (расходы, потери, ошибки)

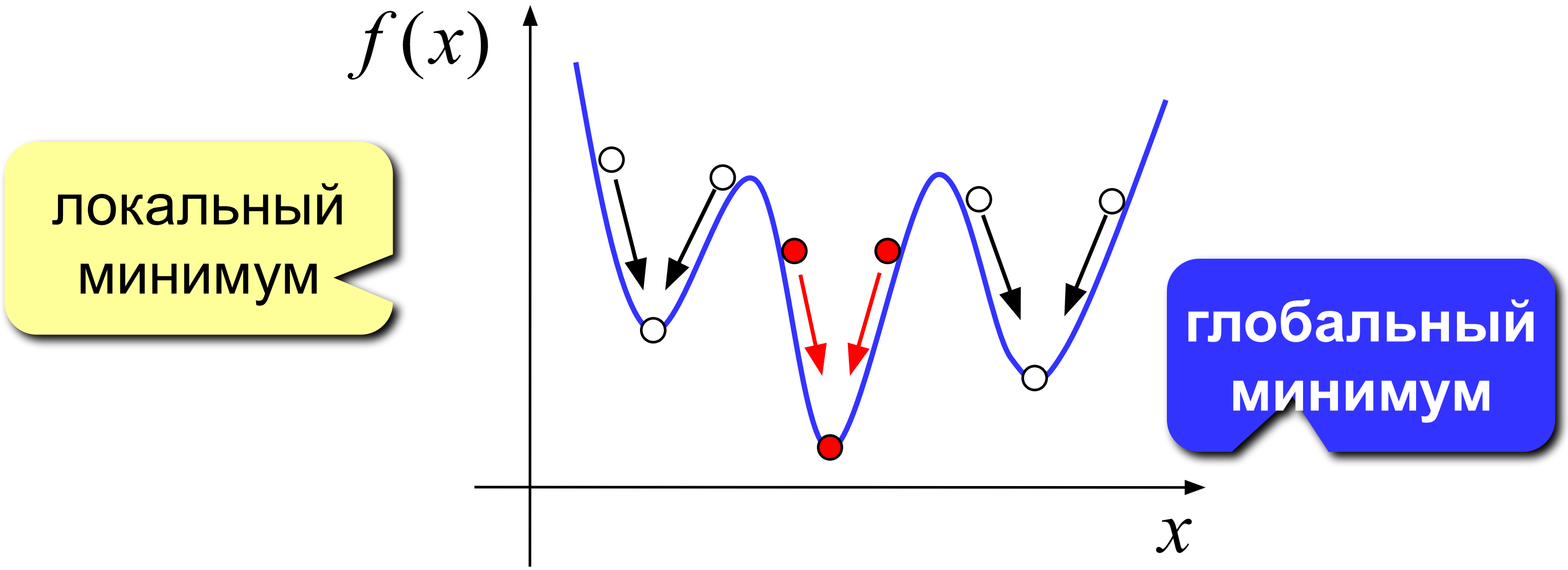
  $f(x) \to \max$ (доходы, приобретения)

- **ограничения**, которые делают задачу осмысленной

  Задача без ограничений: построить дом при минимальных затратах.

  Решение: не строить дом вообще.

Оптимизация

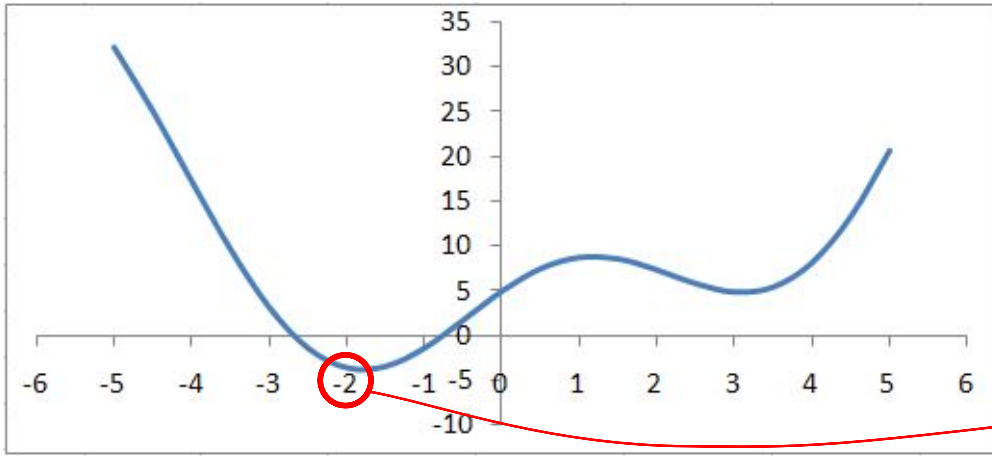


- обычно нужно найти **глобальный минимум**
- большинство численных методов находят только **локальный минимум**
- минимум, который найдет *Excel,* зависит от выбора начального приближения («шарик на горке скатится в ближайшую ямку»)

Поиск минимума функции

$$y = x^2 + 6\sin x + 5\cos x$$

1. Строим график функции (диаграмма «Точечная»)



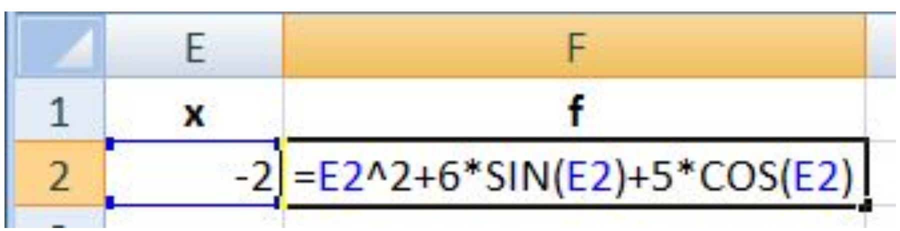
Зачем нужен график?

начальное приближение

$$x_0 = -2$$

2. Подготовка данных

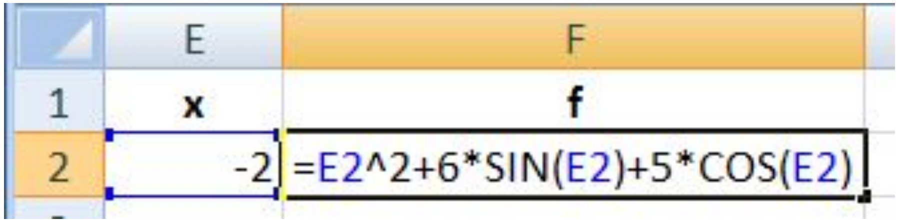
начальное приближение



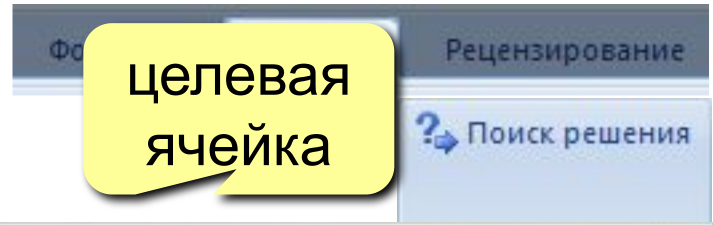
целевая ячейка

Изменение E2 должно влиять на F2!

Поиск минимума функции

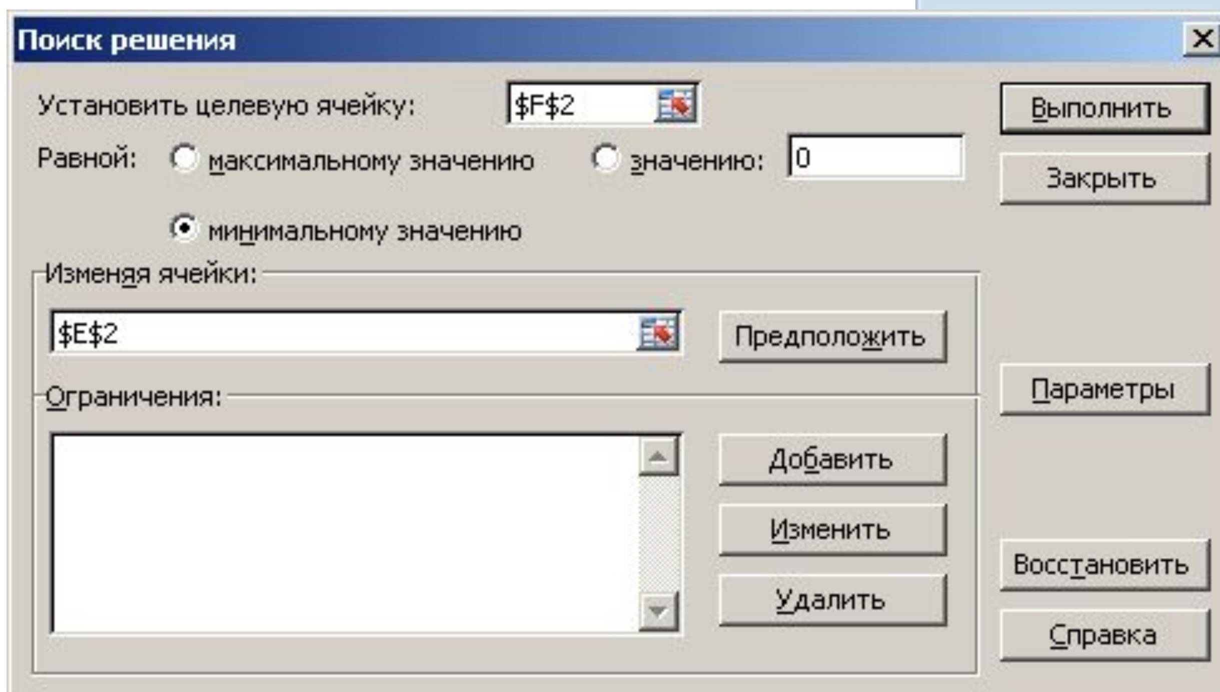


3. Надстройка «Поиск решения»



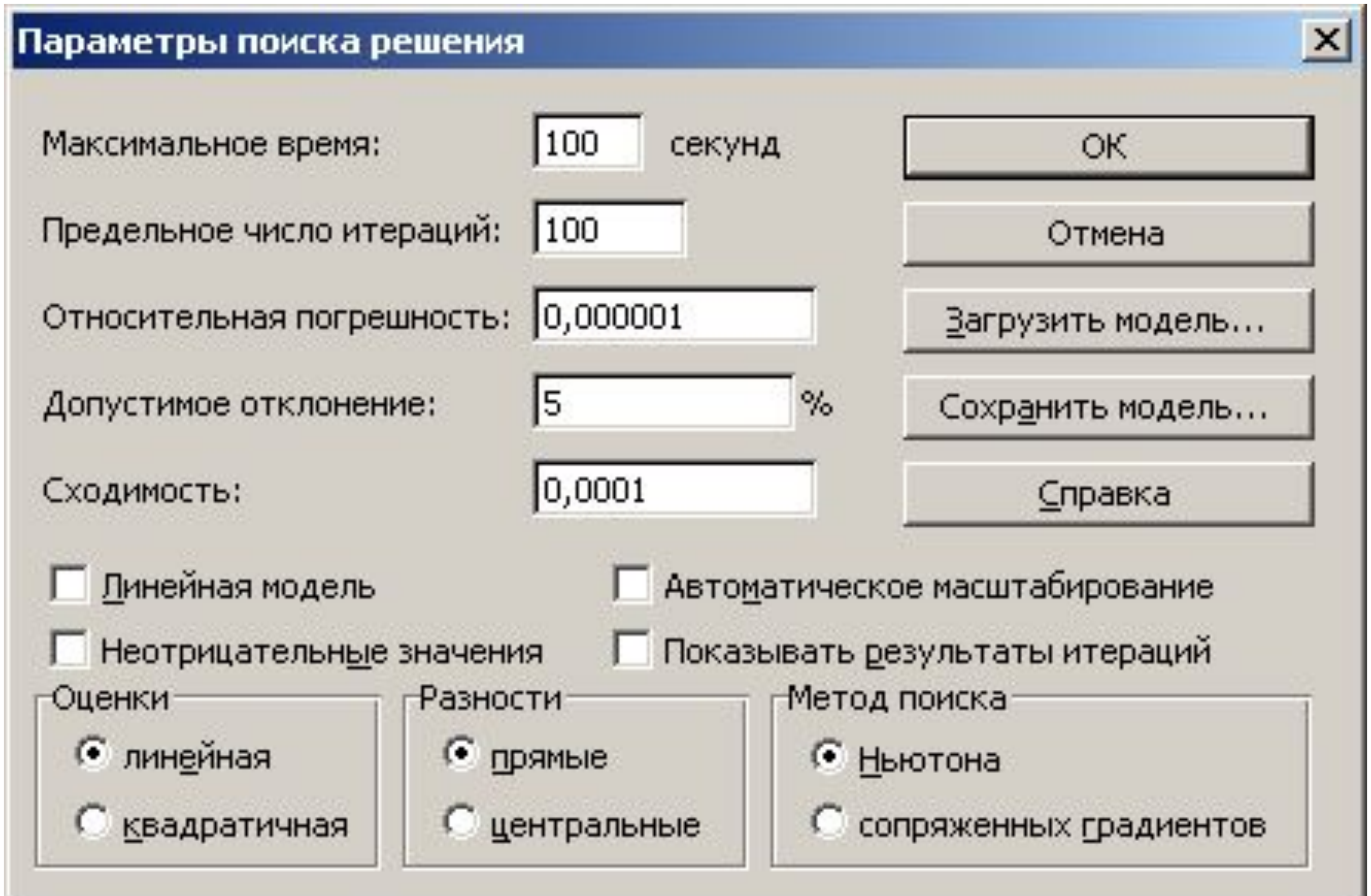
целевая ячейка

изменяемые ячейки:
E2
D2:D6
D2:D6; C5:C8



ограничения
A1 <= 20
B2:B8 >= 5
A1 = целое

Параметры оптимизации



Оптимизация

Подбор параметра – это оптимизация?

Надстройка «Поиск решения» позволяет:

- искать минимум и максимум функции
- использовать несколько изменяемых ячеек и диапазонов
- вводить ограничения (**<=**, **>=**, целое, двоичное)

Как влияет ограничение «A1-целое» на сложность решения задачи?

Методы вычислений

Тема 4. Восстановление зависимостей

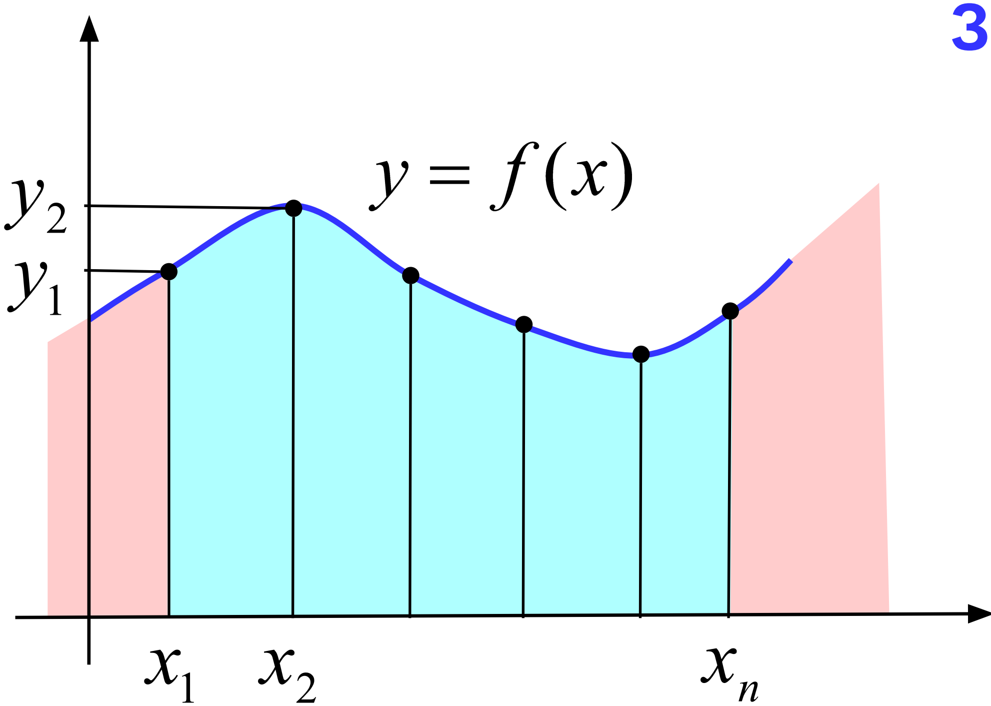
Восстановление зависимостей

Пары значений (аргумент-функция):

какую?

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

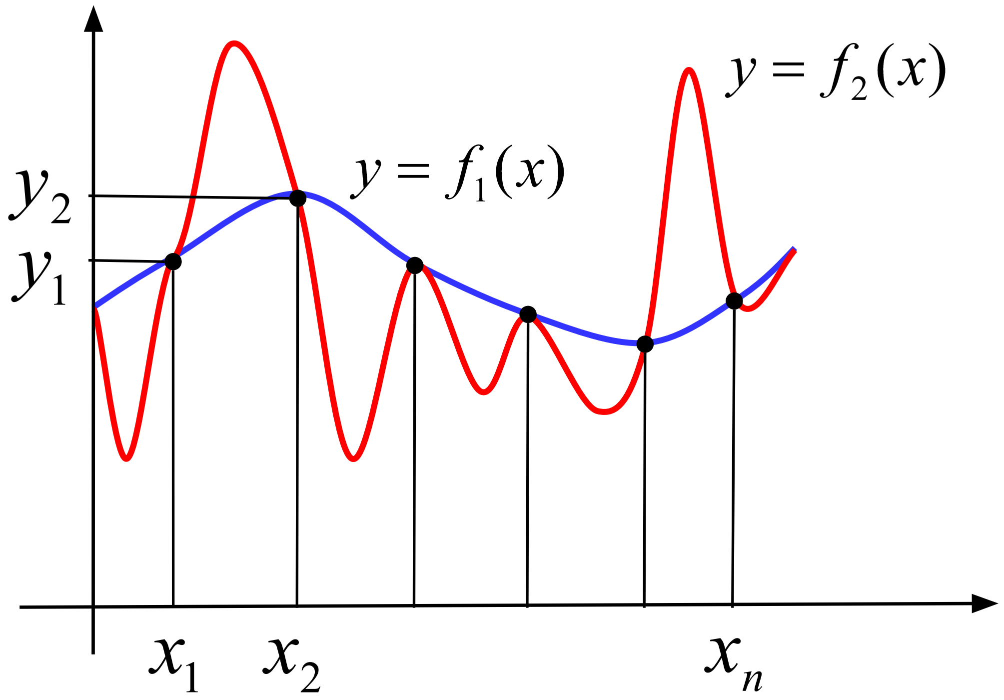
задают некоторую неизвестную функцию $y = f(x)$



Зачем:

- найти y в промежуточных точках *(интерполяция)*
- найти y вне диапазона измерений *(экстраполяция, прогнозирование)*

Какое решение нам нужно?

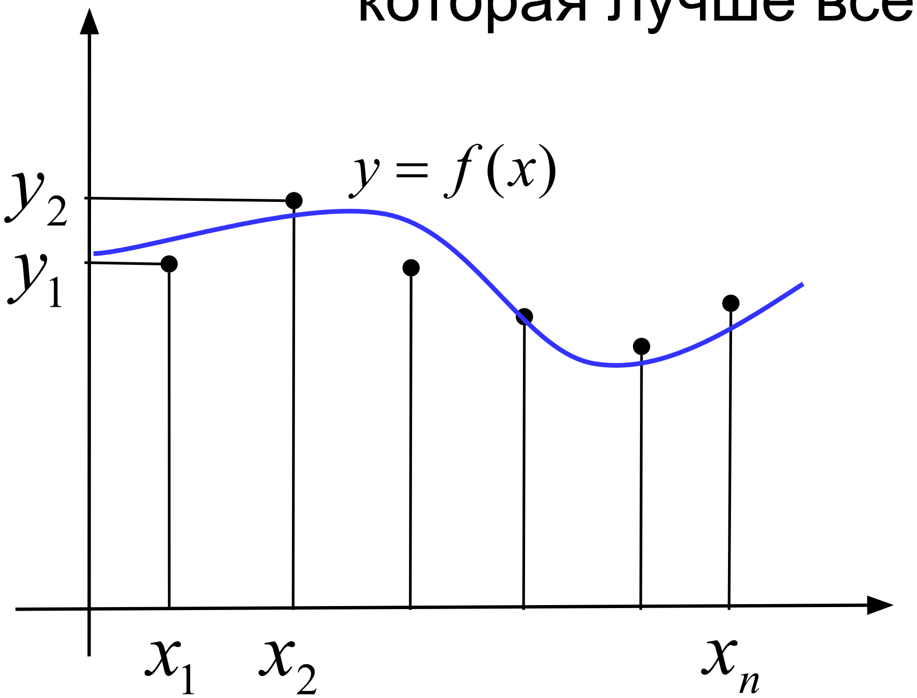


Через заданный набор точек проходит бесконечно много разных кривых!

Вывод: задача **некорректна**, поскольку решение неединственно.

Восстановление зависимостей

Корректная задача: найти функцию **заданного вида**, которая лучше всего соответствует данным.



Примеры:

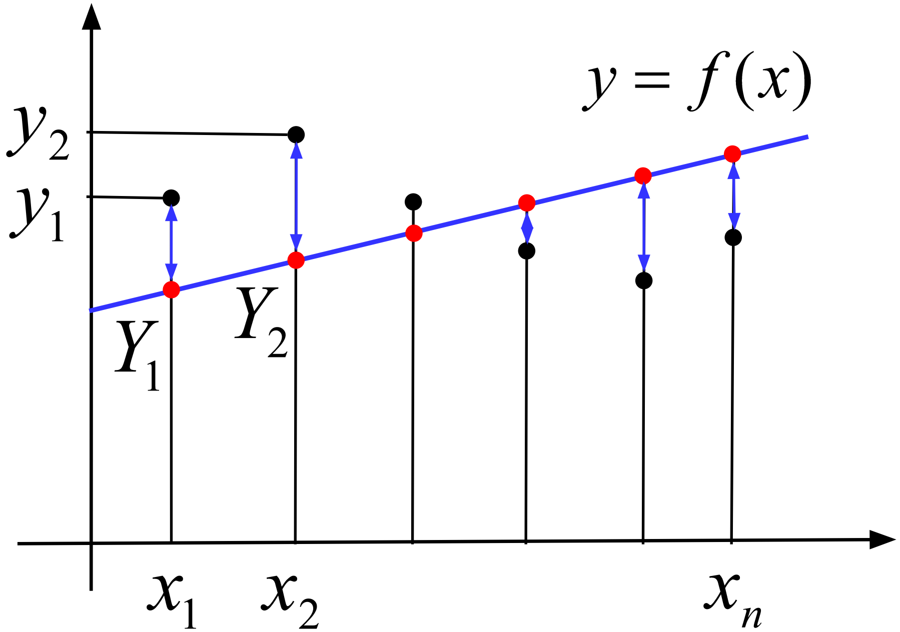
- линейная $y = a \cdot x + b$
- полиномиальная $y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
- степенная $y = a \cdot x^b$
- экспоненциальная $y = a \cdot e^{bx}$
- логарифмическая $y = a \cdot \ln x + b$

! **График функции не обязательно проходит через заданные точки!**

? **Как выбрать функцию?**

Что значит «лучше всего соответствует»?

Метод наименьших квадратов (МНК):



(x_i, y_i) заданные пары значений

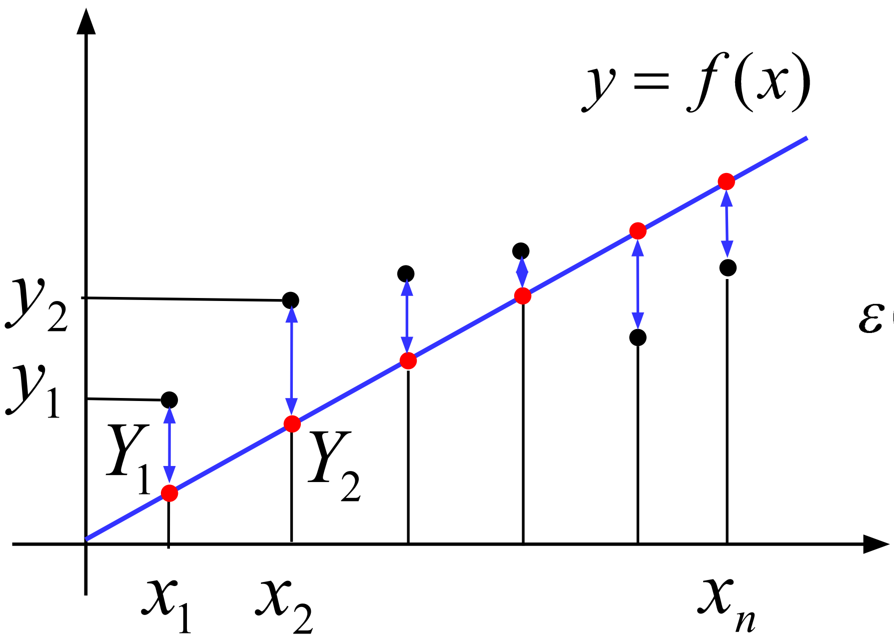
$$Y_i = f(x_i)$$

$$\boxed{\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 \to \min}$$

Зачем возведение в квадрат?

1) чтобы складывать положительные значения
2) решение сводится к системе линейных уравнений (просто решать!)

МНК для линейной функции



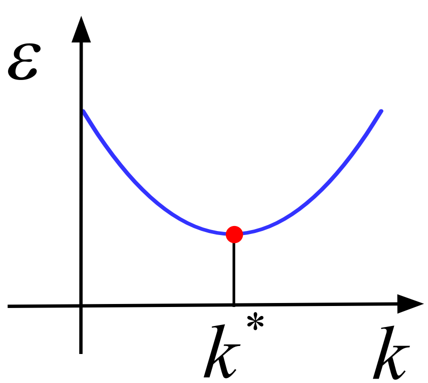
неизвестно!

$$Y_i = k \cdot x_i$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i)^2$$

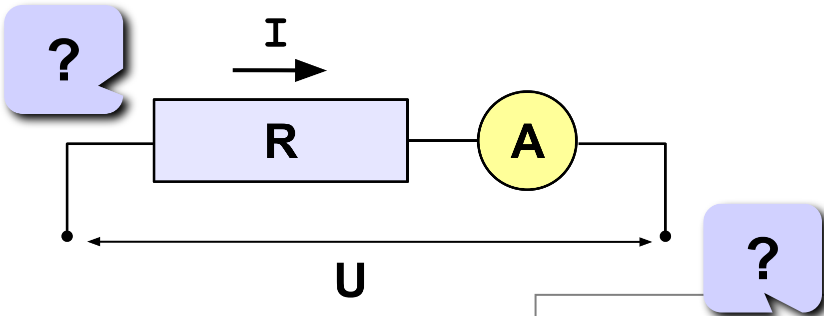
$$= k^2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{a} - k \cdot \underbrace{2\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}_{-b} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}_{c}$$

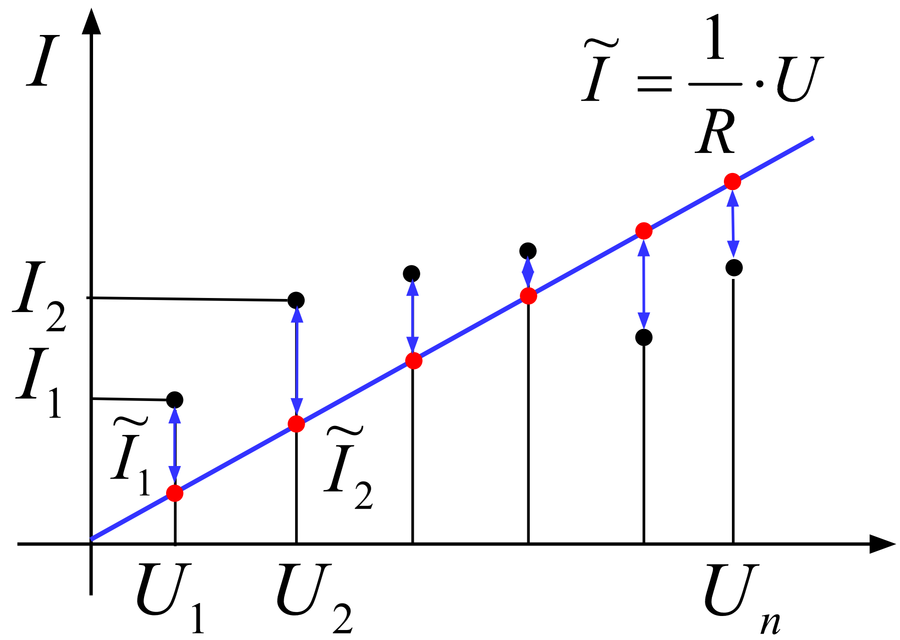
$$\varepsilon(k) = ak^2 + bk + c \to \min$$



$$k^* = -\frac{b}{2a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Сопротивление проводника





Закон Ома

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

Точки на линии:

$$\widetilde{I}_k = \frac{1}{R^*} \cdot U_k$$

$$\varepsilon(R) = \sum_{k=1}^{n} (I_k - \widetilde{I}_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(I_k - \frac{1}{R} \cdot U_k\right)^2$$

$$= \frac{1}{R^2} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} U_k^2}_{a} - \frac{1}{R} \cdot \underbrace{2\sum_{k=1}^{n} I_k \cdot U_k}_{-b} + \sum_{k=1}^{n} I_k^2$$

$$\frac{1}{R^*} = -\frac{b}{2a} = \frac{\sum_{k=1}^{n} I_k U_k}{\sum_{k=1}^{n} U_k^2}$$

Обработка результатов эксперимента

Задача. В файле **`mnk.txt`** записаны в столбик 10 пар чисел (напряжение, ток), полученные в результате эксперимента с одним резистором. Найти (приближенно) его сопротивление по методу наименьших квадратов.

$$\frac{1}{R^*} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} I_k U_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} U_k^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R^* = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} I_k U_k}}$$

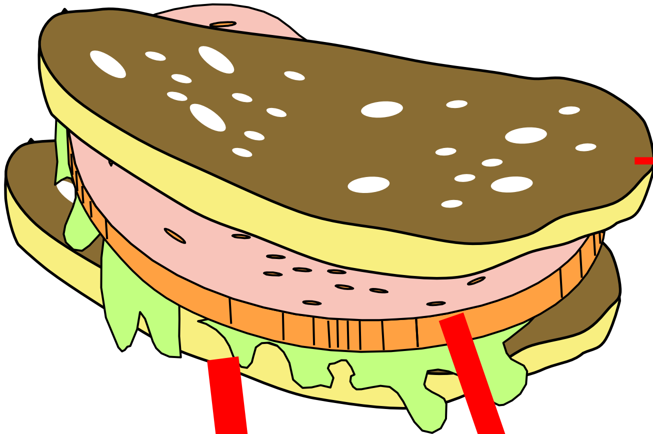
Этапы решения:

1. Прочитать данные из файла в массивы **`U`** и **`I`**.
2. Вычислить $\sum\limits_{k=1}^{n} I_k U_k \qquad \sum\limits_{k=1}^{n} U_k^2$
3. Вычислить R^*.

Работа с файлами: принцип с

Переменная типа «текстовый файл»:

```
var f: text;
```



I этап. открыть файл :

- связать переменную **f** с файлом

```
Assign(f, 'mnk.txt');
```

- открыть файл (сделать его активным, приготовить к работе)

```
Reset(f); {для чтения}
```

```
Rewrite(f); {для записи}
```

II этап: работа с файлом

```
Read ( f, n );  { ввести значение n }
```

```
Write ( f, n );  { записать значение n }
Writeln ( f, n );{с переходом на нов.строку }
```

III этап: закрыть файл

```
Close(f);
```

Обработка результатов эксперимента

Чтение данных:

```
var f: text;
...
begin
  Assign(f, 'mnk.txt');
  Reset(f);
  for k:=1 to 10 do begin
    Read(f, U[k], I[k]);
    Writeln(U[k]:0:3, ' ', I[k]:0:3);
  end;
  Close(f);
end.
```

```
U, I: array[1..10] of real;
   k: integer;
```

? Какие переменные и массивы надо объявить?

Обработка результатов эксперимента

Вычисления:

```
var UU: real;
...
UU := 0;
for k:=1 to 10 do begin
  UU := UU + U[k]*U[k];
end;
```

$$\sum_{k=1}^{n} U_k^2$$

Что вычисляем?

Как найти $\sum_{k=1}^{n} I_k U_k$?

Как найти R^*?

$$R^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} U_k^2}{\sum_{k=1}^{n} I_k U_k}$$

Задания

«4»: Используя метод наименьших квадратов, найти приближенное значение сопротивления по данным файла `mnk.txt`.

«5»: Сделать то же самое, предполагая, что в файле неизвестное количество пар значений, но не более 100. Цикл ввода должен выглядеть так:

пока не достигнут конец файла (**eof** = *end of file*)

```
while not eof(f) do begin
  { читаем U[k] и I[k] }
  { тут еще что-то надо сделать }
end;
```

Коэффициент достоверности *(Excel)*

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

(x_i, y_i) заданные пары значений

$Y_i = f(x_i)$

$\bar{y}$ – среднее значение y_i

Крайние случаи:

- если график проходит через точки:

$$R^2 = 1$$

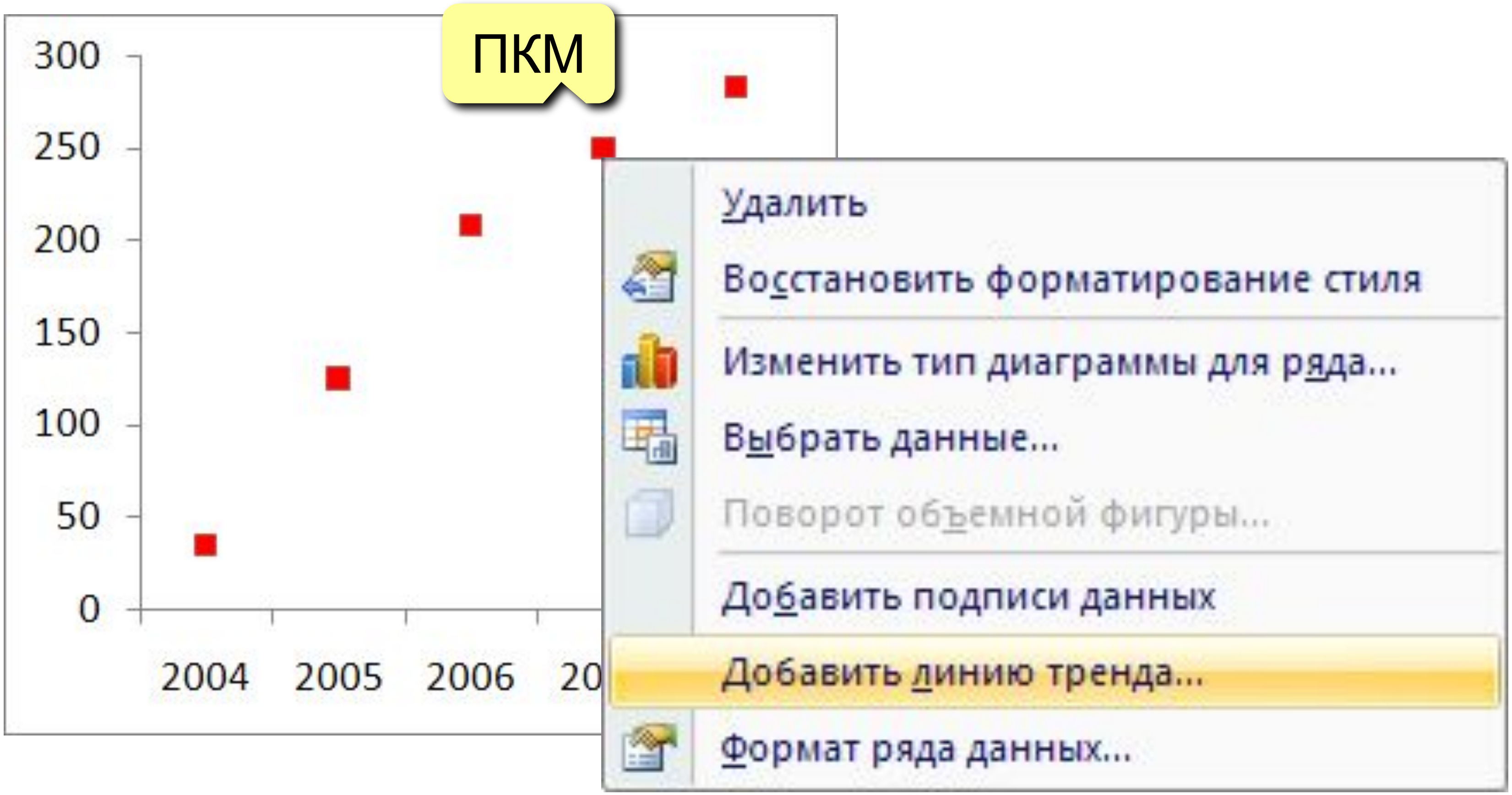
- если считаем, что y не меняется и $Y_i = \bar{y}$:

$$R^2 = 0$$

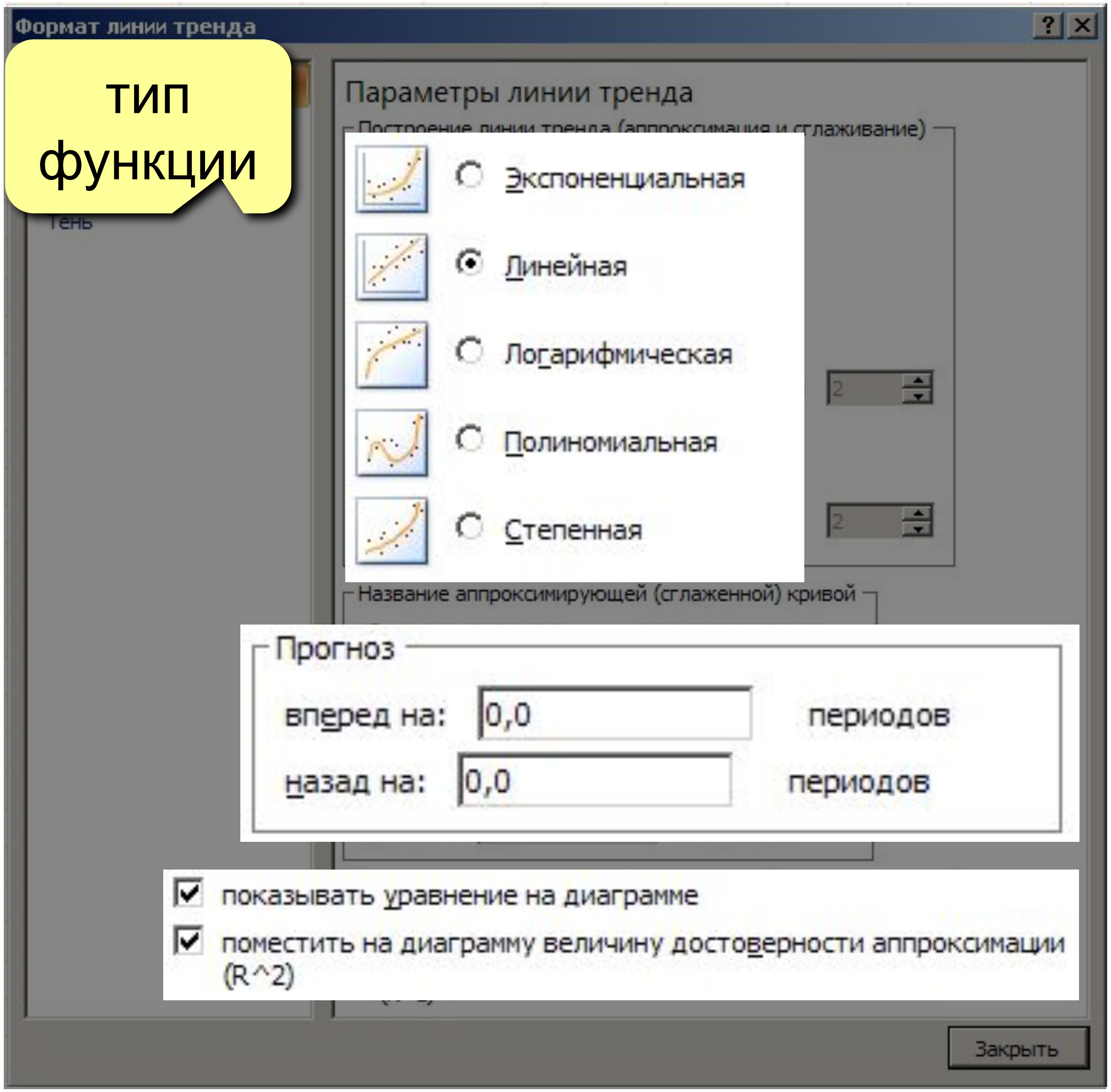
! Фактически – метод наименьших квадратов!

Восстановление зависимостей

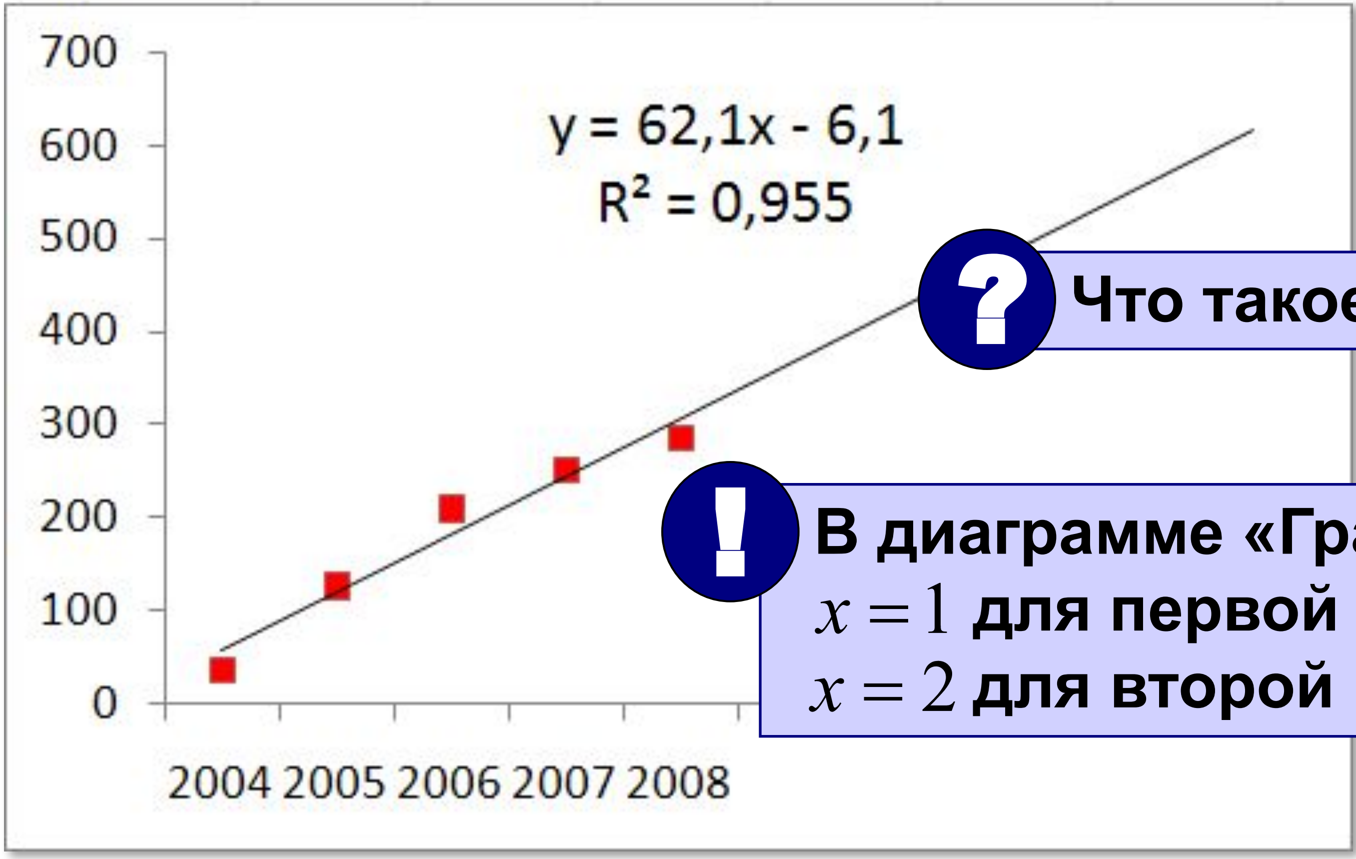
Диаграмма «График»:



Восстановление зависимостей



Восстановление зависимостей



Что такое x ?

В диаграмме «График» $x = 1$ для первой точки, $x = 2$ для второй и т.д.

Насколько хорошо выбрана функция?

Восстановление зависимостей

Сложные случаи (нестандартная функция):

$$f(x) = a \cdot \sin kx + b$$

Что делать?

Алгоритм:

1) выделить ячейки для хранения a, k, b
2) построить ряд $Y_i = f(x_i)$ для тех же x_i
3) построить на одной диаграмме ряды y_i и Y_i
4) попытаться подобрать a, k, b так, чтобы два графика были близки
5) вычислить R^2 в отдельной ячейке

   функции: СУММКВРАЗН – сумма квадратов разностей рядов
   ДИСПР – дисперсия

6) **Поиск решения**: $R^2 \to \min$

Это задача оптимизации!

Методы вычислений

Тема 5. Статистика

Ряд данных и его свойства

Ряд данных – это упорядоченный набор значений

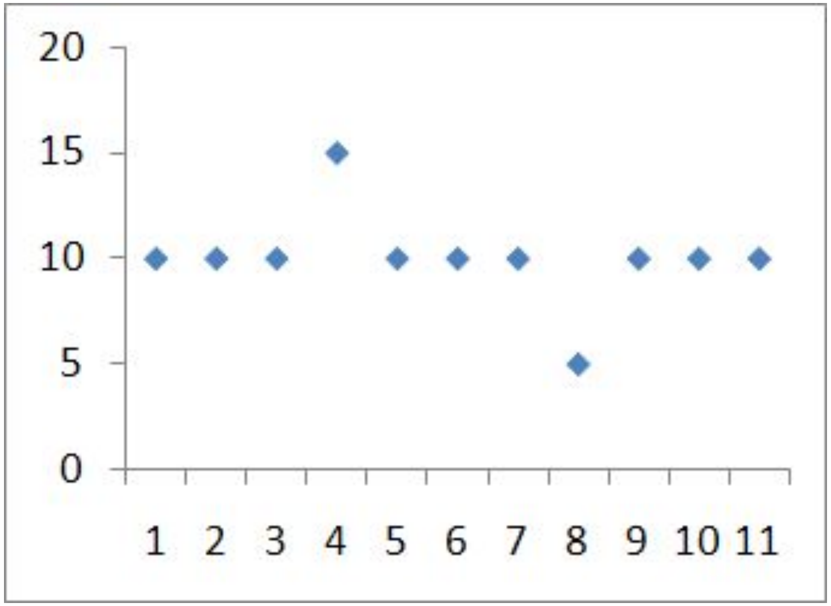
$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

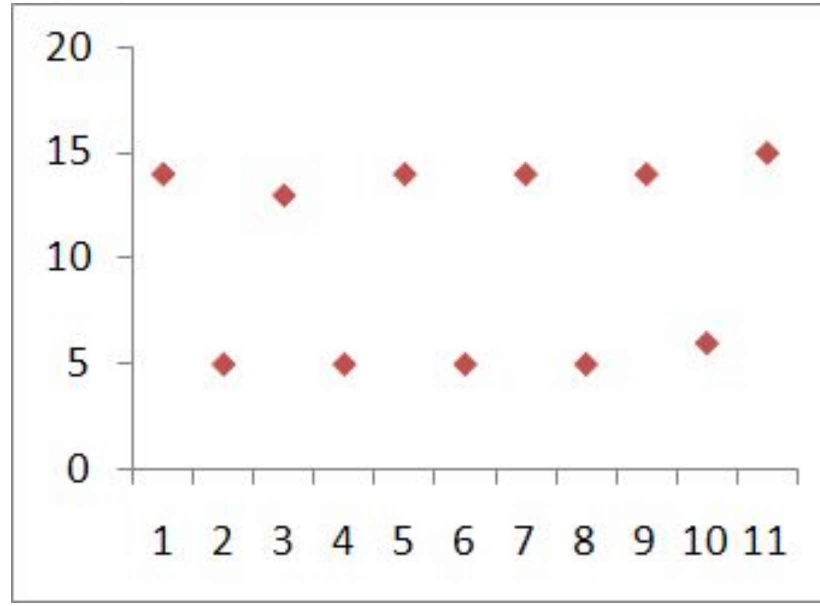
Основные свойства (ряд **A1:A20**):

- количество элементов **=СЧЕТ(A1:A20)**
- количество элементов, удовлетворяющих некоторому условию:
  = СЧЕТЕСЛИ(A1:A20;"<5")
- минимальное значение **=МИН(A1:A20)**
- максимальное значение **=МАКС(A1:A20)**
- сумма элементов **=СУММ(A1:A20)**
- среднее значение **=СРЗНАЧ(A1:A20)**

Дисперсия

Для этих рядов одинаковы МИН, МАКС, СРЗНАЧ





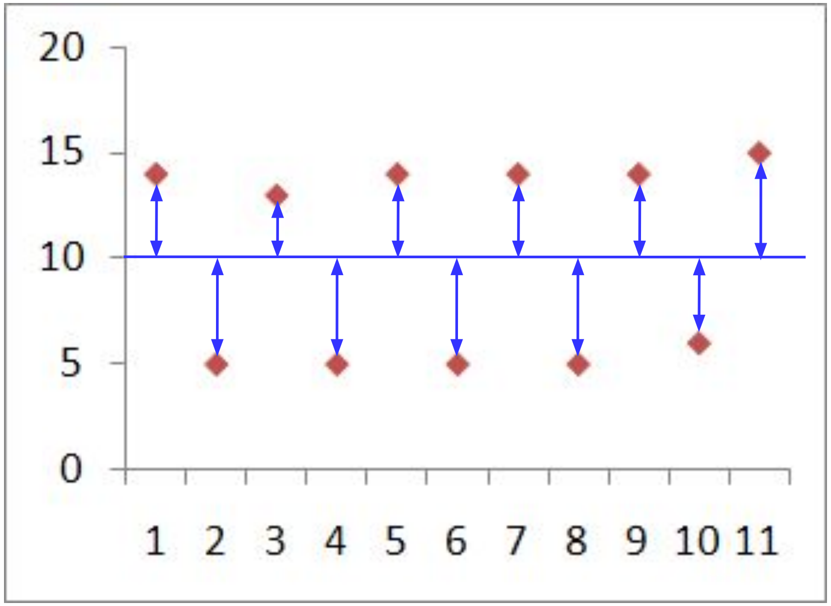
В чем различие?

Дисперсия («разброс») – это величина, которая характеризует разброс данных относительно среднего значения.

Дисперсия

$$D_x = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$ среднее арифметическое



$(x_1 - \bar{x})^2$ квадрат отклонения x_1 от среднего

D_x *средний* квадрат отклонения от среднего значения

Дисперсия и СКВО

Стандартная функция

```
=ДИСПР(A1:A20)
```

Функции – Другие – Статистические

Что неудобно:

если x измеряется в метрах,

то D_x – в м^2

В каких единицах измеряется?

СКВО = среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

```
=СТАНДОТКЛОНП(A1:A20)
```

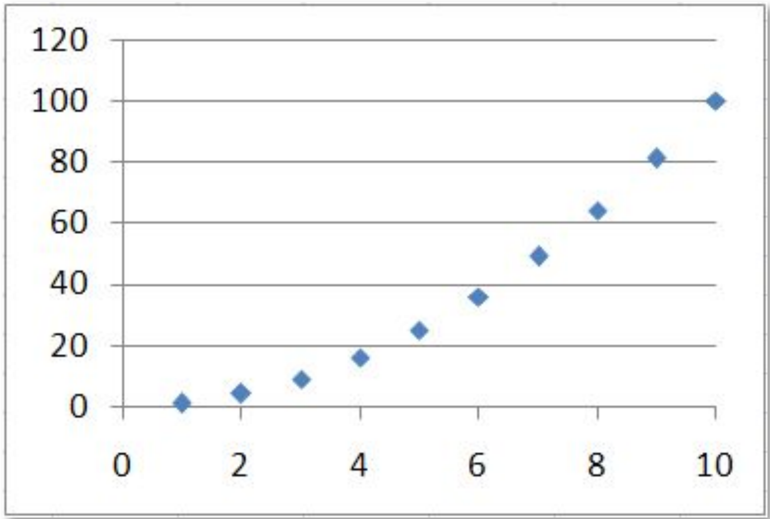
Взаимосвязь рядов данных

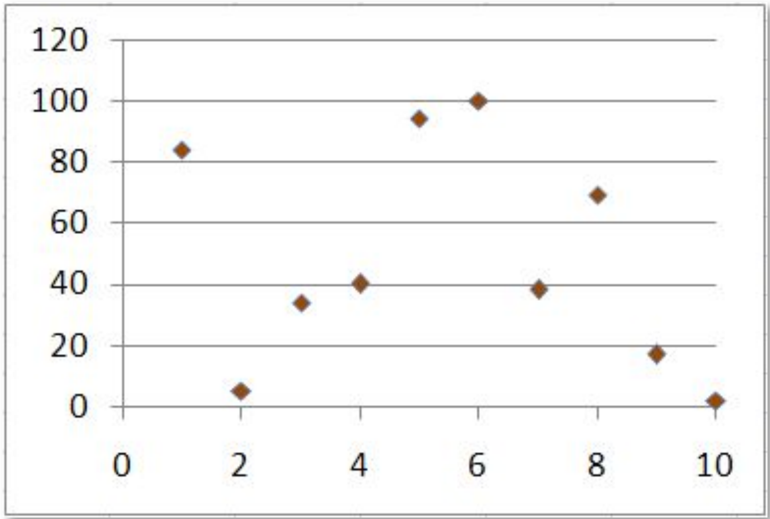
Два ряда одинаковой длины:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \qquad\qquad y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

Вопросы:

- есть ли связь между этими рядами (соответствуют ли пары (x_i, y_i) какой-нибудь зависимости $y = f(x)$)
- насколько сильна эта связь?





Взаимосвязь рядов данных

Ковариация:

$$K_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

Если x и y – один и тот же ряд? $K_{xx} = D_x$

в среднем!

Как понимать это число?

- если $K_{xy} > 0$ увеличение x приводит к увеличению y
- если $K_{xy} < 0$ увеличение x приводит к уменьшению y
- если $K_{xy} \approx 0$ связь обнаружить не удалось

Что плохо?

- единицы измерения: если x в метрах, y в литрах, то K_{xy} – в м·л
- K_{xy} зависит от абсолютных значений x и y, поэтому ничего не говорит о том, насколько сильна связь

Взаимосвязь рядов данных

Коэффициент корреляции:

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

σ_x, σ_y – СКВО рядов x и y

Какова размерность? безразмерный!

$$\boxed{-1 \le \rho_{xy} \le 1}$$

Как понимать это число?

- если $\rho_{xy} > 0$: увеличение x приводит к увеличению y
- если $\rho_{xy} < 0$: увеличение x приводит к уменьшению y
- если $\rho_{xy} \approx 0$: связь обнаружить не удалось

```
=КОРРЕЛ(A1:A20;B1:B20)
```

Взаимосвязь рядов данных

Как понимать коэффициент корреляции?

$0 < |\rho_{xy}| \le 0{,}2$: очень слабая корреляция

$0{,}2 < |\rho_{xy}| \le 0{,}5$: слабая

$0{,}5 < |\rho_{xy}| \le 0{,}7$: средняя

$0{,}7 < |\rho_{xy}| \le 0{,}9$: сильная

$0{,}9 < |\rho_{xy}| \le 1$: очень сильная

$\rho_{xy} = 1$: линейная зависимость $y = ax + b, \quad a > 0$

$\rho_{xy} = -1$: линейная зависимость $y = ax + b, \quad a < 0$

? **Если $\rho_{xy} \approx 0$, то связи нет?**

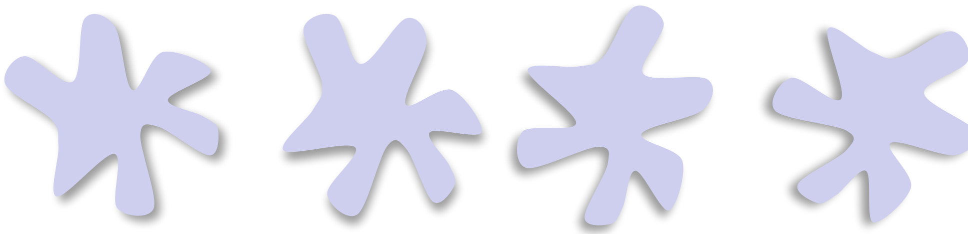
! **Метод для определения линейной зависимости!**

Методы вычислений

Тема 6. Моделирование

(по мотивам учебника А.Г. Гейна и др., Информатика и ИКТ, 10 класс, М.: Просвещение, 2008)

Модель деления

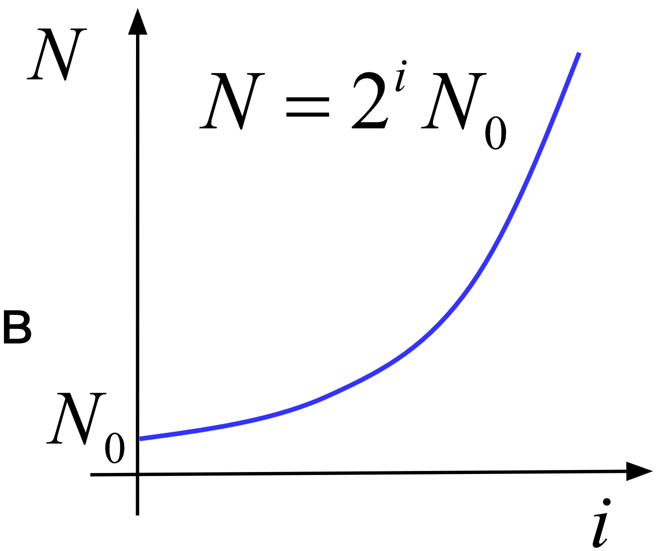


N_0 – начальная численность

$N_1 = 2N_0$ – после 1 цикла деления

$N_2 = 2N_1 = 4N_0$ – после 2-х циклов

$N_i = 2N_{i-1} = 2^i N_0$



Особенности модели:

1) не учитывается смертность
2) не учитывается влияние внешней среды
3) не учитывается влияние других видов

Модель неограниченного роста (Т. Мальтус)

$$N_i = N_{i-1} + K_p \cdot N_{i-1} - K_c \cdot N_{i-1}$$

K_p – коэффициент рождаемости

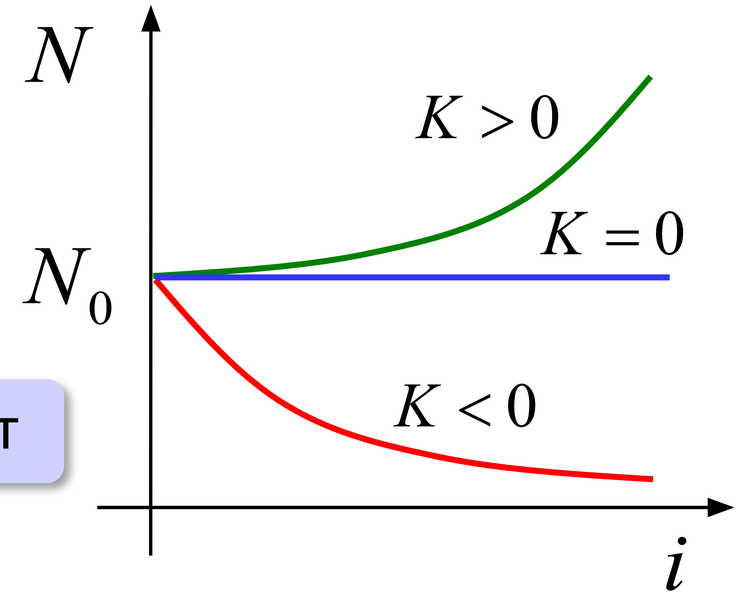
K_c – коэффициент смертности

Коэффициент прироста $K = K_p - K_c$

$$\boxed{N_i = (1+K) \cdot N_{i-1}}$$

$$N_i = N_{i-1} + K \cdot N_{i-1}$$

прирост



Особенности модели:

1) не учитывается влияние численности N и внешней среды на K
2) не учитывается влияние других видов на K

Модель ограниченного роста (П. Ферхюльст)

L – предельная численность животных

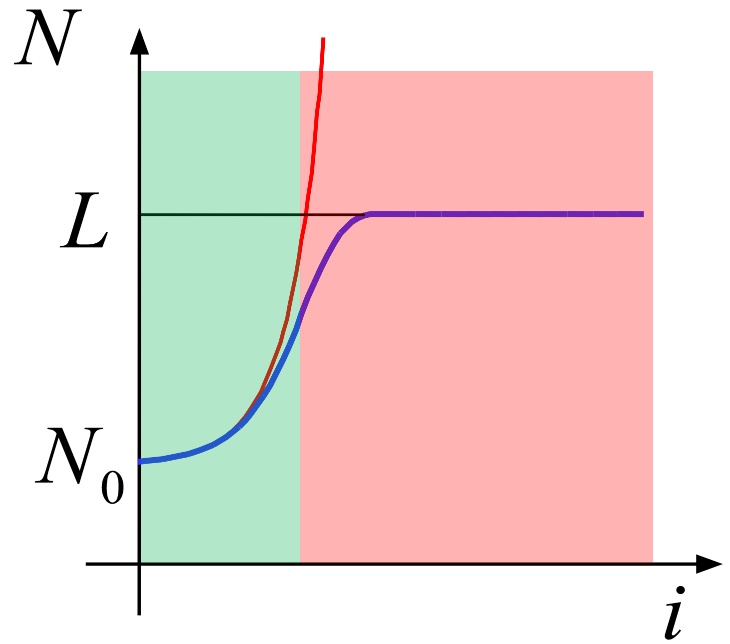
$$N_i = (1 + K_L) \cdot N_{i-1}$$

Идеи:

1) коэффициент прироста K_L зависит от численности N
2) при $N=0$ должно быть $K_L=K$ (начальное значение)
3) при $N=L$ должно быть $K_L=0$ (достигнут предел)

$$\boxed{N_i = \left(1 + K\frac{L - N_{i-1}}{L}\right) \cdot N_{i-1}}$$

! **Модель адекватна, если ошибка < 10%!**



Модель с отловом

Примеры: рыбоводческое хозяйство, разведение пушных зверей и т.п.

$$N_i = \left(1 + K\frac{L - N_{i-1}}{L}\right) \cdot N_{i-1} \boxed{- R}$$

отлов

Какая будет численность?

$N_i = N_{i-1}$, прирост = отлову

$$N = N + K\frac{L - N}{L}N - R \quad \Rightarrow \frac{K}{L} \cdot N^2 - K \cdot N + R = 0$$

Сколько можно отловить?

Модель эпидемии гриппа

L – всего жителей N_i – больных в i-ый день
Z_i – заболевших в i-ый день V_i – выздоровевших
W_i – всего выздоровевших за i дней

Основное уравнение:

$$N_i = N_{i-1} + Z_i - V_i$$

Ограниченный рост:

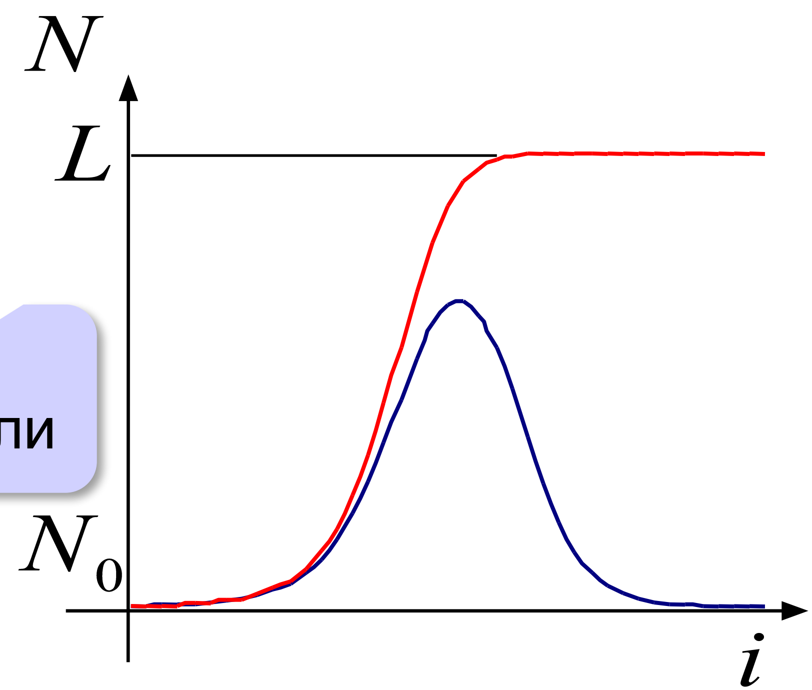
$$Z_i = K\frac{L - N_{i-1} \boxed{- W_{i-1}}}{L}\cdot N_{i-1}$$

болели и выздоровели

Выздоровление (через 7 дней):

$$V_i = Z_{i-7}$$

$$W_i = W_{i-1} + V_i$$



Влияние других видов

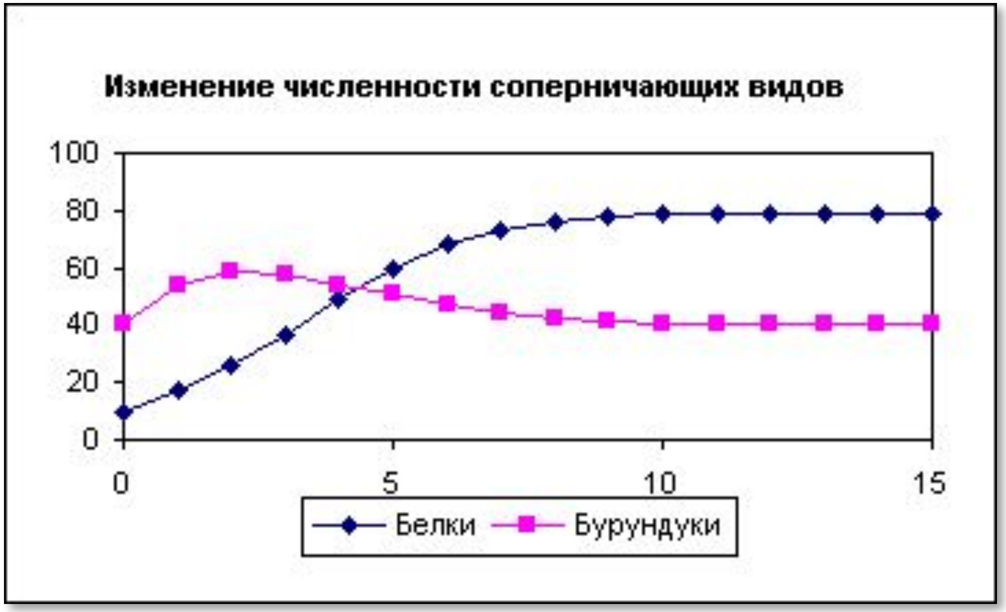
N_i – численность белок, M_i – численность бурундуков

$$N_i = N_{i-1}(2 - K_1 \cdot N_{i-1} - K_2 \cdot M_{i-1})$$
$$M_i = M_{i-1}(2 - K_3 \cdot M_{i-1} - K_4 \cdot N_{i-1})$$

? Откуда видно влияние?

K_2, K_4 – взаимное влияние

если $K_2 > K_1$ или $K_4 > K_3$ – враждующие виды



Моделирование двух популяций

N_0 M_0

	A	B	C	D	E	F
1	***i***	***N***	***M***		***K1***	0,05
2	0	20	20		***K2***	0,01
3	1	=B2*(2-F1*B2-F2*C2)			***K3***	0,05
4	2				***K4***	0,01
5	3					

$$N_i = N_{i-1}(2 - K_1 \cdot N_{i-1} - K_2 \cdot M_{i-1})$$

? Как скопировать формулы «вниз»?

Модель системы «хищник-жертва»

Модель – не-система:

 караси

$$N_i = \left(1 + K\frac{L - N_{i-1}}{L}\right)\cdot N_{i-1}$$

 щуки

$$Z_i = (1 - d)\cdot Z_{i-1}$$

вымирают без еды

Модель – система:

1) число встреч пропорционально $N_i \cdot Z_i$
2) «эффект» пропорционален числу встреч

$$N_i = \left(1 + K\frac{L - N_{i-1}}{L}\right)\cdot N_{i-1} - b_1 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

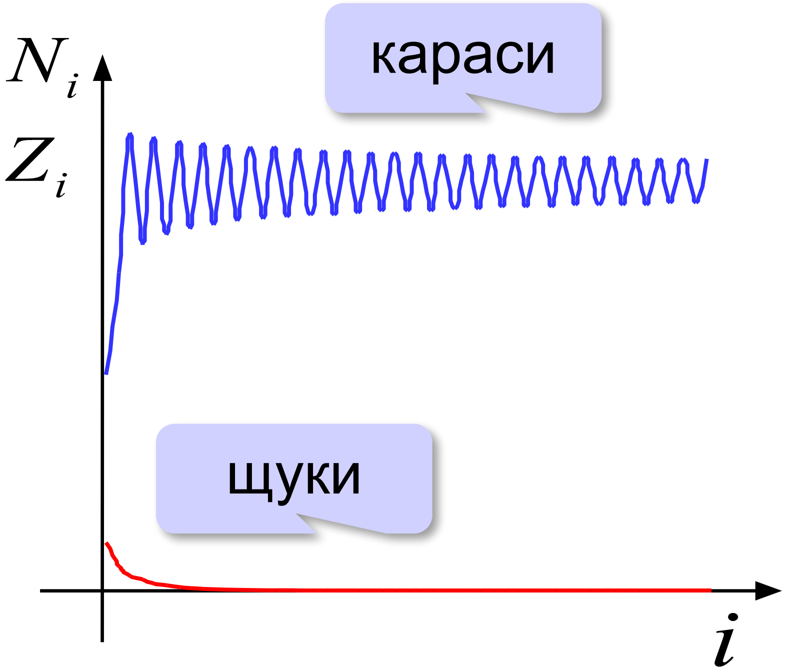
$$Z_i = (1 - d)\cdot Z_{i-1} + b_2 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

численность уменьшается

численность увеличивается

Модель системы «хищник-жертва»

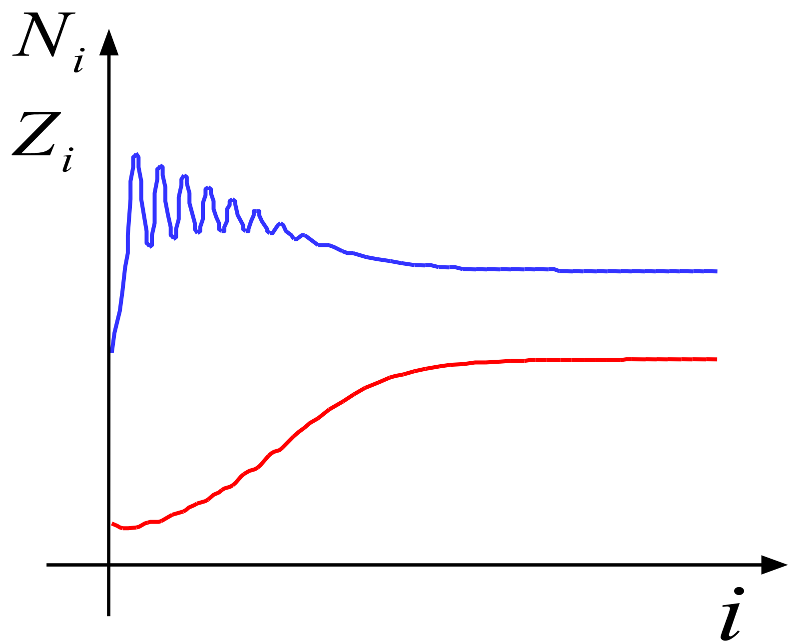
Хищники вымирают:



$$d = 0{,}8$$

$$b_1 = b_2 = 0{,}5$$

Равновесие:

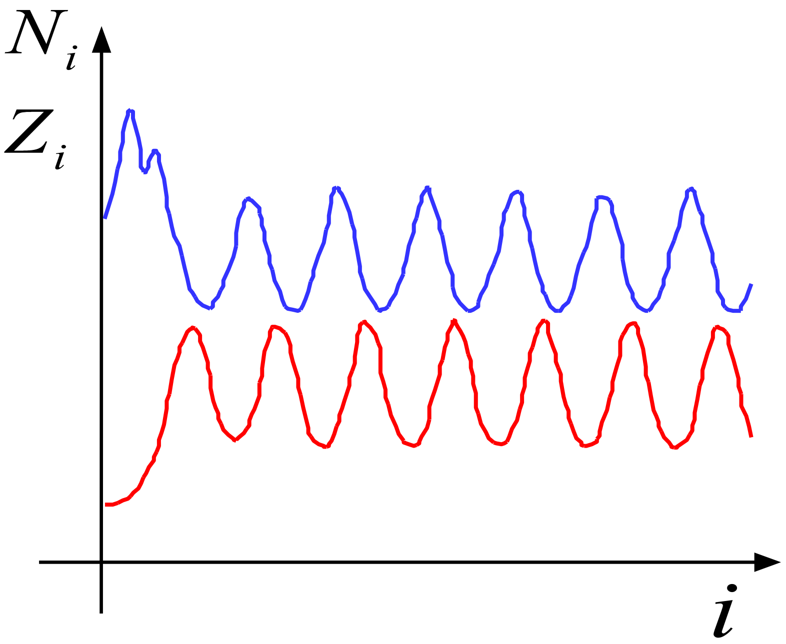


$$d = 0{,}8$$

$$b_1 = 0{,}5; \quad b_2 = 1$$

Модель системы «хищник-жертва»

Колебания:



$$d = 0{,}8$$

$$b_1 = 0{,}5; \;\; b_2 = 2$$

Случайные процессы

Случайно…

1) встретить друга на улице
2) разбить тарелку
3) найти 10 рублей
4) выиграть в лотерею

Случайный выбор:

1) жеребьевка на соревнованиях
2) выигравшие номера в лотерее

Как получить случайность?

Случайные числа на компьютере

Электронный генератор

- нужно специальное устройство
- нельзя воспроизвести результаты

Псевдослучайные числа – обладают свойствами случайных чисел, но каждое следующее число вычисляется по заданной формуле.

Метод середины квадрата (Дж. фон Нейман)

564321

в квадрате

318**458191**041

209**938992**481

малый период (последовательность повторяется через 10^6 чисел)

Случайные числа на компьютере

Линейный конгруэнтный метод

остаток от деления

$$x_n = (a \cdot x_{n-1} + c) \mod m$$

a, c, m - целые числа

$$x_n = (16807 \cdot x_{n-1} + 12345) \mod 1073741823$$

простое число

2^{30}-1

Какой период?

период m

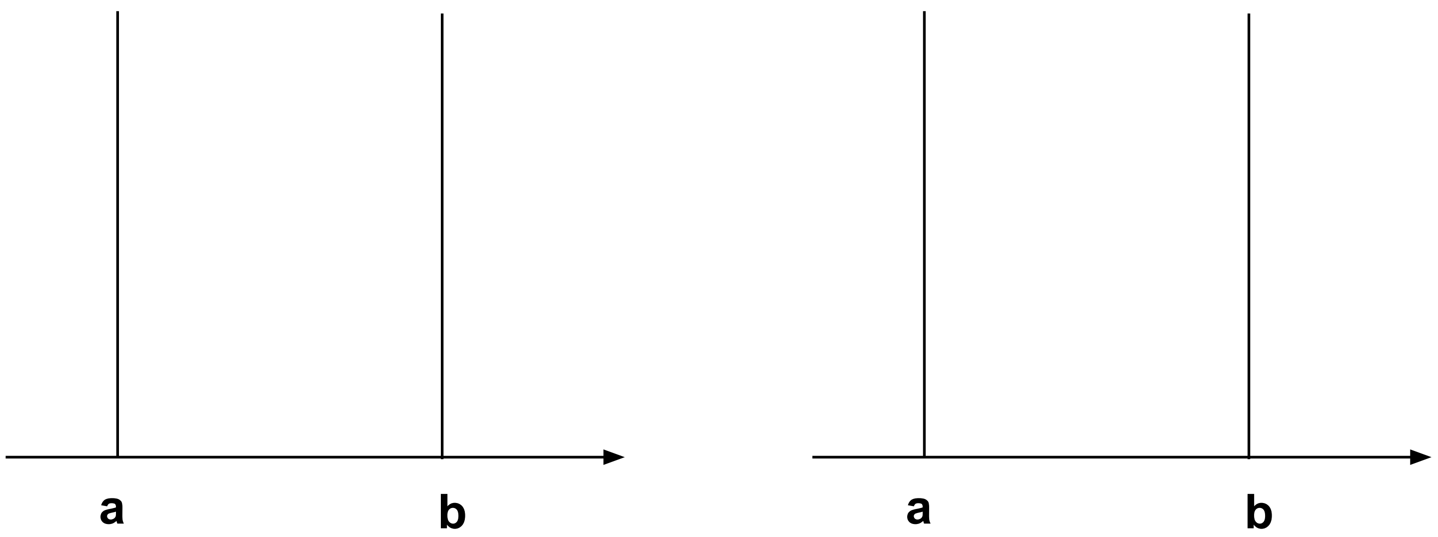
«Вихрь Мерсенна»: период 2^{19937}-1

Распределение случайных чисел

Модель: снежинки падают на отрезок [a,b]

распределение

равномерное **неравномерное**

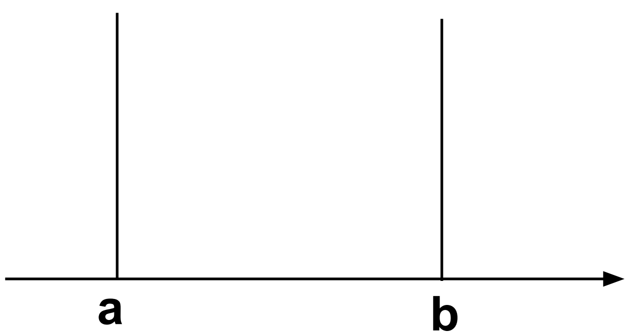


Сколько может быть разных распределений?

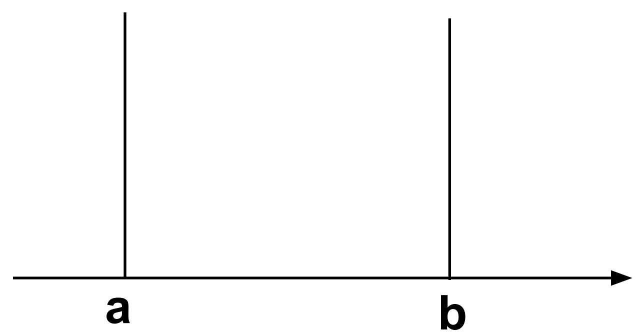
Распределение случайных чисел

Особенности:

- распределение – это характеристика **всей последовательности**, а не одного числа
- **равномерное** распределение одно, компьютерные датчики (псевдо)случайных чисел дают равномерное распределение
- неравномерных – много
- любое неравномерное можно получить с помощью равномерного



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

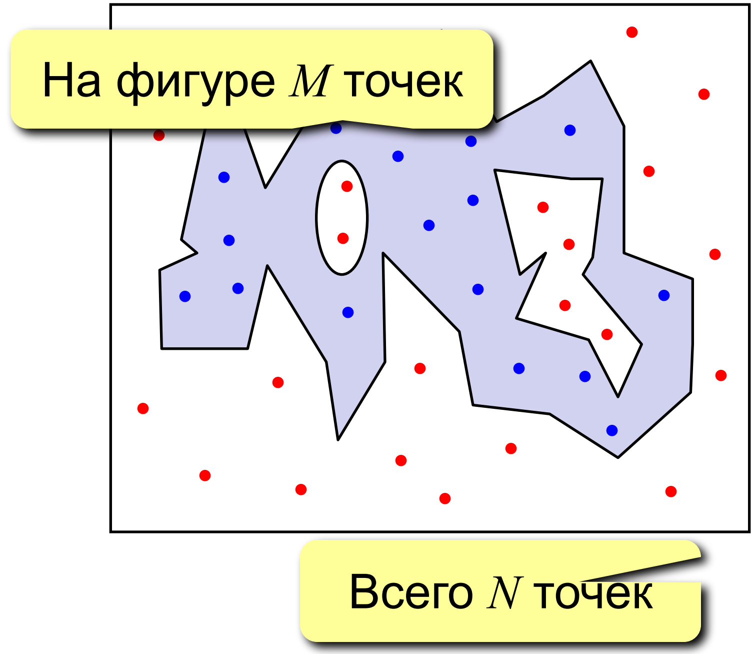


$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{12}}{12}$$

$x_1, x_2, \ldots$ равномерное распределение

Вычисление площади (метод Монте-Карло)

1. Вписываем сложную фигуру **в другую фигуру**, для которой легко вычислить площадь (прямоугольник, круг, …).
2. **Равномерно** N точек со случайными координатами внутри прямоугольника.
3. Подсчитываем количество точек, **попавших на фигуру**: M.

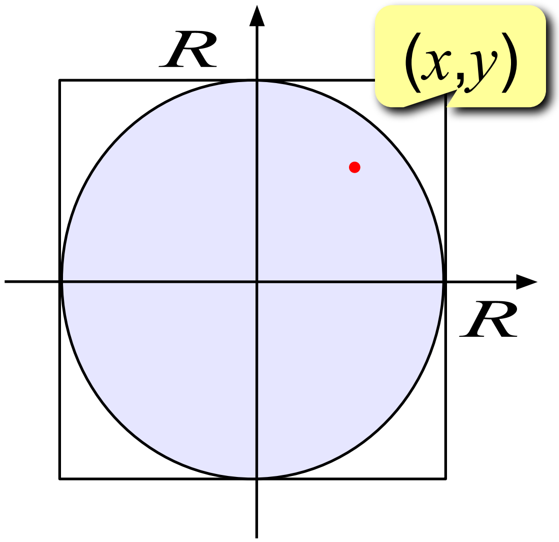


4. Вычисляем **площадь**: $\frac{S}{S_0} \approx \frac{M}{N} \Rightarrow \boxed{S \approx S_0 \cdot \frac{M}{N}}$

!

1. Метод приближенный.
2. Распределение должно быть равномерным.
3. Чем больше точек, тем точнее.
4. Точность ограничена датчиком случайных чисел.

Вычисление площади



Случайные координаты:

```
x := R*random;
y := R*random;
```

Когда точка внутри круга?

$$\boxed{x^2 + y^2 \le R^2}$$

Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайные координаты }
  if x*x + y*y <= R*R then M := M+1;
end;
S := 4*R*R*M / N;
```

Как найти число π?

Задания

«4»: Вычислите площади кругов с радиусами

`R = 1, 2, 3, 4, 5.`

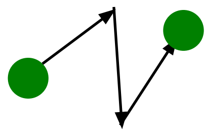
Используя электронные таблицы, найдите приближенную формулу для вычисления площади круга.

«5»: Вычислите объем шаров с радиусами

`R = 1, 2, 3, 4, 5.`

Используя электронные таблицы, найдите приближенную формулу для вычисления объема шара.

Броуновское движение



Случайное направление (в рад):

```
alpha := 2*pi*random;
```

Случайный шаг:

```
h := hMax*random;
```

Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайное направление и шаг }
  x := x + h*cos(alpha);
  y := y + h*sin(alpha);
end;
```

Графика (АЛГО)

Начальное положение частицы:

```
x:= 200; y:= 250;
MoveTo(round(x), round(y));
```

Задать цвет линии:

```
Pen(1, 0, 255, 0);
```

толщина линии

R(red) 0..255

G(green) 0..255

B(blue) 0..255

Движение частицы:

```
for i:=1 to N do begin
  { определить новые координаты }
  LineTo(round(x), round(y));
end;
```

Задания

«4»: Постройте траектории движения двух частиц в течение 200 шагов. Частицы должны двигаться одновременно.

«5»: Постройте траектории движения 10 частиц в течение 200 шагов. Частицы должны двигаться одновременно. Используйте массивы для хранения координат частиц.

Системы массового обслуживания

Примеры:

1) звонки на телефонной станции
2) вызовы «скорой помощи»
3) обслуживание клиентов в банке

сколько линий?

сколько бригад?

сколько операторов?

Особенности:

1) клиенты (запросы на обслуживание) поступают постоянно, но через случайные интервалы времени
2) время обслуживание каждого клиента – случайная величина

! **Нужно знать характеристики (распределения) «случайностей»!**

Клиенты в банке

Вход клиентов:

1)за 1 минуту – до I_{max} человек

2)равномерное распределение

Обслуживание:

1)от T_{min} до T_{max} минут

2)равномерное распределение

? **Сколько нужно касс, чтобы клиенты стояли в очереди не более M минут?**

Клиенты в банке

Число клиентов в помещении банка:

было пришли ушли

```
N := N + in - out;
```

! ***Допущение*: клиенты распределены по кассам равномерно!**

Количество касс: K

Средняя длина очереди: $\dfrac{N}{K}$

Q – длина очереди

Время ожидания: $M \le Q \cdot T_{\max}$

Допустимая длина очереди: $\dfrac{N}{K} \le Q_{\max} = \dfrac{M}{T_{\max}}$

Клиенты в банке

Пришли за очередную минуту:

округление

```
in := round(inMax*random);
```

Случайное время обслуживания:

```
T := Tmin + (Tmax - Tmin)*random;
```

! **Каждый оператор за эту минуту обслужит $\frac{1}{T}$ клиентов!**

Обслужены за очередную минуту и выходят:

```
out := round(K / T);
```

Клиенты в банке (программа)

период моделирования L минут

```
count := 0; { счетчик «плохих» минут }
for i:=1 to L do begin
  in := { случайное число входящих }
  out := { случайное число обслуженных }
  N := N + in - out;
  if N/K > Qmax then
    count := count + 1;
end;
writeln(count/L:10:2);
```

Что выводится?

Клиенты в банке (исходные данные)

```
inMax := 10; { max число входящих за 1 мин }
Tmin := 1; { min время обслуживания }
Tmax := 5; { max время обслуживания }
L := 1000; { период моделирования в минутах }
M := 10; { допустимое время ожидания }
```

Задача: найти минимальное *K*, при котором время ожидания в 90% случаев не больше *M* минут.

Конец фильма