

# Системы счисления

1. Введение
2. Двоичная система
3. Восьмеричная система
4. Шестнадцатеричная система
5. Другие системы счисления

# **Системы счисления**

## **Тема 1. Введение**

# Определения

---

**Система счисления** – это способ записи чисел с помощью специальных знаков – **цифр**.

**Числа:**

123, 45678, 1010011, CXL

**Цифры:**

0, 1, 2, ...      I, V, X, L, ...

**Алфавит** – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

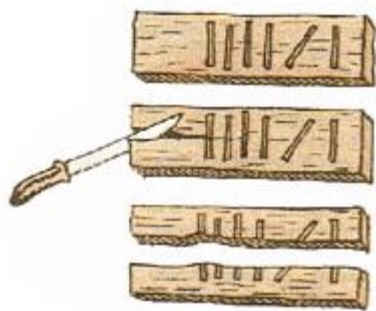
**Типы систем счисления:**

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места (*позиции*) в записи числа;
- **позиционные** – зависит...

# Непозиционные системы

---

**Унарная** – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



**Римская:**

**I** – 1 (палец),    **V** – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),  
**X** – 10 (две ладони),    **L** – 50,  
**C** – 100 (*Centum*),    **D** – 500 (*Demimille*),  
**M** – 1000 (*Mille*)

# Римская система счисления

---

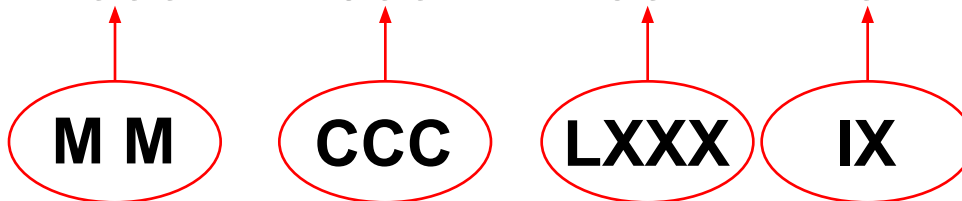
## Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично непозиционная!*)

## Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$



$$2389 = \text{М М С С С L X X X I X}$$

# Примеры:

---

**3768 =**

**2983 =**

**1452 =**

**1999 =**

# Римская система счисления

## Недостатки:

- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (**V**, **X**, **L**, **C**, **D**, **M**)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:  
**СССLIX + CLXXIV = ?**

## Где используется:

- номера глав в книгах:
- обозначение веков: «**Пираты XX века**»
- циферблат часов



# Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)

 аз 1	 вѣди 2	 глаголь 3	 добро 4	 есть 5	 зелѣ 6	 земля 7	 иже 8	 фита 9
 и 10	 како 20	 люди 30	 мыслѣте 40	 наш 50	 кси 60	 ом 70	 покой 80	 червь 90
 рцы 100	 слово 200	 твёрдо 300	 ук 400	 ферт 500	 хер 600	 пси 700	 о 800	 цы 900



# Позиционные системы

**Позиционная система:** значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

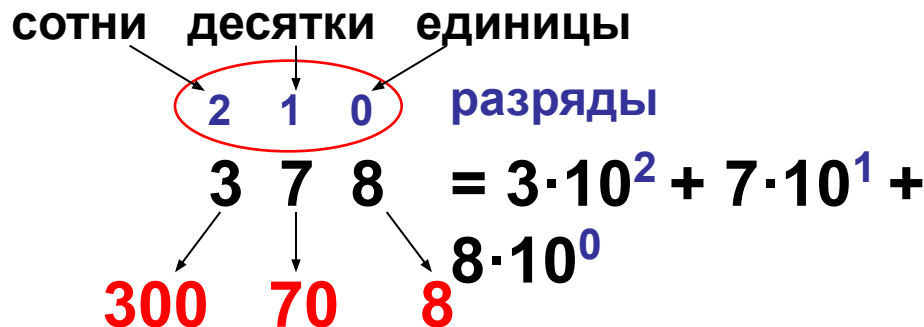
**Десятичная система:**

первоначально – счет на пальцах

изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

**Алфавит:** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

**Основание** (количество цифр): 10



**Другие позиционные системы:**

- двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- шестидесятеричная (1 минута = 60 секунд, 1 час = 60 минут)

# Системы счисления

## Тема 2. Двоичная система счисления

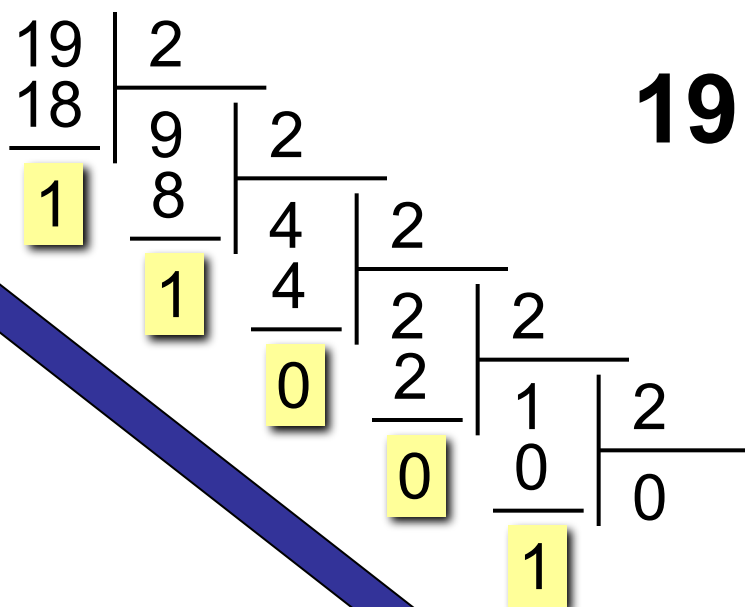
# Перевод целых чисел

Двоичная система:

Алфавит: 0, 1

Основание (количество цифр): 2

10 → 2



$$19 = 10011_2$$

система  
счисления

2 → 10

4 3 2 1 0 разряды

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

# Примеры:

---

**131 =**

**79 =**

# Примеры:

---

$$101011_2 =$$

$$110110_2 =$$



Когда двоичное число четное? делится на 8?

# Метод подбора

75 **10** → 2

наибольшая степень двойки, которая меньше или равна заданному числу

$$2^6 \leq 75 < 2^7$$

**64** ≤ 75 < **128**

разряды

**6**54**3**210

$$75 = \mathbf{64} + 13$$

$$64 = 2^6 = \mathbf{1000000}_2$$

$$13 = \mathbf{8} + 5$$

$$8 = 2^3 = \mathbf{1000}_2$$

$$5 = \mathbf{4} + 1$$

$$4 = 2^2 = \mathbf{100}_2$$

$$1 = \mathbf{1}$$

$$1 = 2^0 = \mathbf{1}_2$$

$$75 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = \mathbf{1001101}_2$$

$$75 = \mathbf{1001101}_2$$

# Перевод дробных чисел

10 → 2

$$0,375 = 0,011_2$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$0,750$$

$$0,75$$

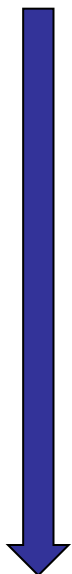
$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$1,50$$

$$0,5$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$1,0$$



$$0,7 = ?$$

$$0,7 = 0,101100110\dots$$

$$= 0,1(0110)_2$$

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется **бесконечное** число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

2 → 10

2 1 0 -1 -2 -3 разряды

$$101,011_2$$

$$= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$$

$$= 4 + 1 + 0,25 + 0,125 = 5,375$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0,25$$

**Примеры:**

---

**0,625 =**

**3,875 =**



# Арифметические операции

## сложение

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

$$1+0=1 \quad 1+1=10_2$$

$$1 + 1 + 1 = 11_2$$

перенос

## ВЫЧИТАНИЕ

$$0-0=0 \quad 1-1=0$$

$$1-0=1 \quad 10_2-1=1$$

заем

$$\begin{array}{r}
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \phantom{+} 10110_2 \\
 + 111011_2 \\
 \hline
 1010001_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \phantom{0} 1110_2 \phantom{0} 10_2 \\
 \phantom{0} \cancel{1} \cancel{0} \cancel{0} \cancel{0} \cancel{1} \cancel{0} 1_2 \\
 - \phantom{0} 11011_2 \\
 \hline
 0101010_2
 \end{array}$$

# Примеры:

---

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ + 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ + 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

# Примеры:

---

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ - 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ - 110101_2 \\ \hline \end{array}$$

# Арифметические операции

умножение



$$\begin{array}{r} \phantom{+} 10101_2 \\ \times \phantom{+} 10 \\ \hline 1_210101_2 \\ + 10101_2 \\ \hline 1101001_2 \end{array}$$

деление

$$\begin{array}{r} 10101_2 \bigg| 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 0 \end{array}$$

# Плюсы и минусы двоичной системы

---

-  нужны технические устройства только с **двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
  - **надежность** и помехоустойчивость двоичных кодов;
  - выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными.
- 
-  простые десятичные числа записываются в виде **бесконечных** двоичных дробей;
  - двоичные числа имеют **много разрядов**;
  - запись числа в двоичной системе **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.

# Двоично-десятичная система

**BCD** = *binary coded decimals* (десятичные цифры в двоичном коде)

**10** → **BCD**

$$9024,19 = 1001 \mathbf{0000} 0010 \mathbf{0100}, 0001 \mathbf{1001}_{\text{BCD}}$$

9      0      2      4      ,      1      9

**BCD** → **10**

$$1 \ 0101 \ 0011, \ 0111 \ 1_{\text{BCD}} =$$
$$\mathbf{0001 \ 0101 \ 0011, \ 0111 \ 1000}_{\text{BCD}} = \mathbf{153,78}$$



Запись числа в BCD не совпадает с двоичной!

$$10101,1_{\text{BCD}} = \mathbf{15,8}$$

$$10101,1_2 = 16 + 4 + 1 + 0,5 = \mathbf{21,5}$$

# Системы счисления

## Тема 3. Восьмеричная система счисления

# Восьмеричная система

Основание (количество цифр): 8

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

10 → 8

$$\begin{array}{r|l} 100 & 8 \\ \hline 96 & \\ \hline & 4 \\ \hline 12 & 8 \\ \hline 8 & \\ \hline & 4 \\ \hline 1 & 8 \\ \hline 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$100 = 144_8$$

система  
счисления

8 → 10

2 1 0    разряды

$$\begin{aligned} 144_8 &= 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\ &= 64 + 32 + 4 = 100 \end{aligned}$$



# Примеры:

---

$$134 =$$

$$75 =$$

$$134_8 =$$

$$75_8 =$$

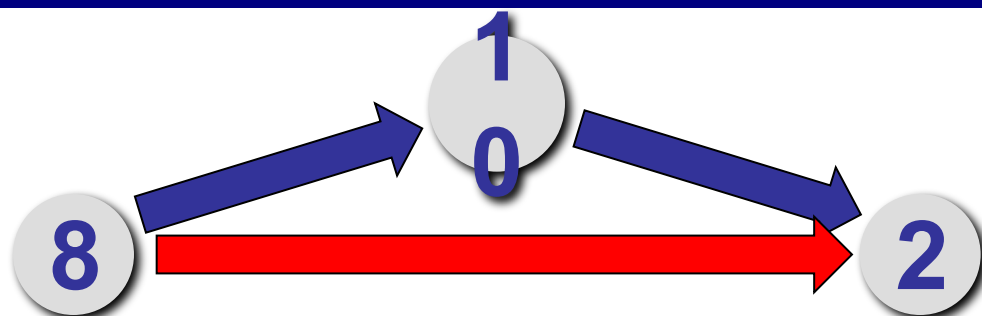
# Таблица восьмеричных чисел

---

$X_{10}$	$X_8$	$X_2$
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011

$X_{10}$	$X_8$	$X_2$
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

# Перевод в двоичную и обратно



- трудоемко
- 2 действия

$$8 = 2^3$$



Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_1 \underbrace{111}_7 \underbrace{010}_2 \underbrace{101}_5_2$$

# Примеры:

---

$$3467_8 =$$

$$\cancel{2148}_8 =$$

$$7352_8 =$$

$$1231_8 =$$

# Перевод из двоичной системы

---

$1001011101111_2$

**Шаг 1.** Разбить на триады, начиная справа:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$

**Шаг 2.** Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$   
 $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{7}$

**Ответ:**  $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры:

---

$$101101010010_2 =$$

$$11111101011_2 =$$

$$1101011010_2 =$$

# Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} \phantom{+} 156_8 \\ + 662_8 \\ \hline 1040_8 \end{array}$$

1 в перенос

$$6 + 2 = 8 = 8 + 0 \quad \text{1 в перенос}$$

$$5 + 6 + 1 = 12 = 8 + 4$$

$$1 + 6 + 1 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

# Пример

---

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$



# Арифметические операции

## ВЫЧИТАНИЕ

$$\begin{array}{r} \phantom{-} 456_8 \\ - 277_8 \\ \hline 157_8 \end{array}$$

заем

$$(6 + 8) - 7 = 7$$

заем

$$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$$

$$(4 - 1) - 2 = 1$$

# Примеры

---

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

# Системы счисления

## Тема 4. Шестнадцатеричная системы счисления

# Шестнадцатеричная система

Основание (количество цифр): 16

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**  
10 11 12 13 14 15

10 → 16

$$\begin{array}{r|l} 107 & 16 \\ \hline 96 & 6 \\ \hline & 0 \\ \hline & 0 \end{array}$$

11  
B  
6

$$107 = 6B_{16}$$

система  
счисления

16 → 10

2 1 0 разряды

$$1C5_{16} = 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$$

$$= 256 + 192 + 5 = 453$$

# Примеры:

---

$$171 =$$

$$1BC_{16} =$$

$$206 =$$

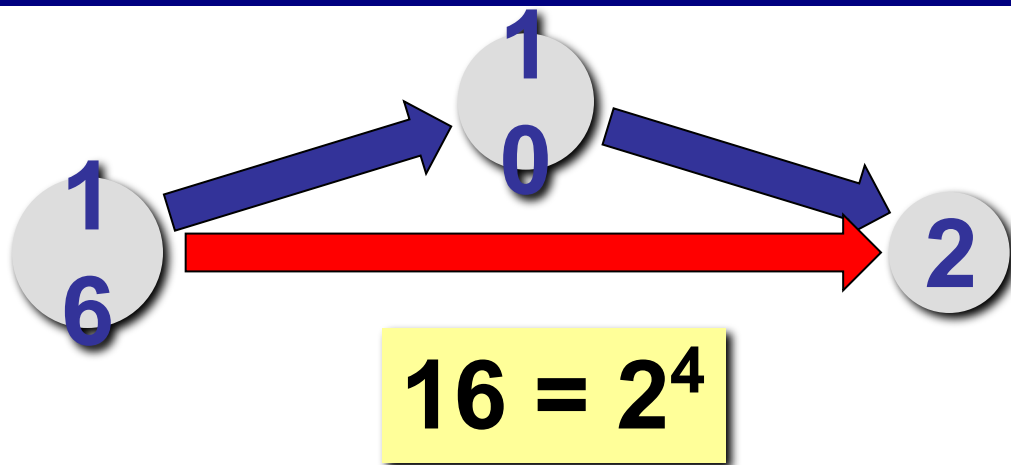
$$22B_{16} =$$

# Таблица шестнадцатеричных чисел

$X_{10}$	$X_{16}$	$X_2$
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111

$X_{10}$	$X_{16}$	$X_2$
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

# Перевод в двоичную систему



- трудоемко
- 2 действия

**!** Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_7 \underbrace{1111}_F \underbrace{0001}_1 \underbrace{1010}_A_2$$

# Примеры:

---

$$\text{C73B}_{16} =$$

$$\text{2FE1}_{16} =$$



# Перевод из двоичной системы

---

$1001011101111_2$

**Шаг 1.** Разбить на тетрады, начиная справа:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$

**Шаг 2.** Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$   
 $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{E}\ \boxed{F}$

**Ответ:**  $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

Примеры:

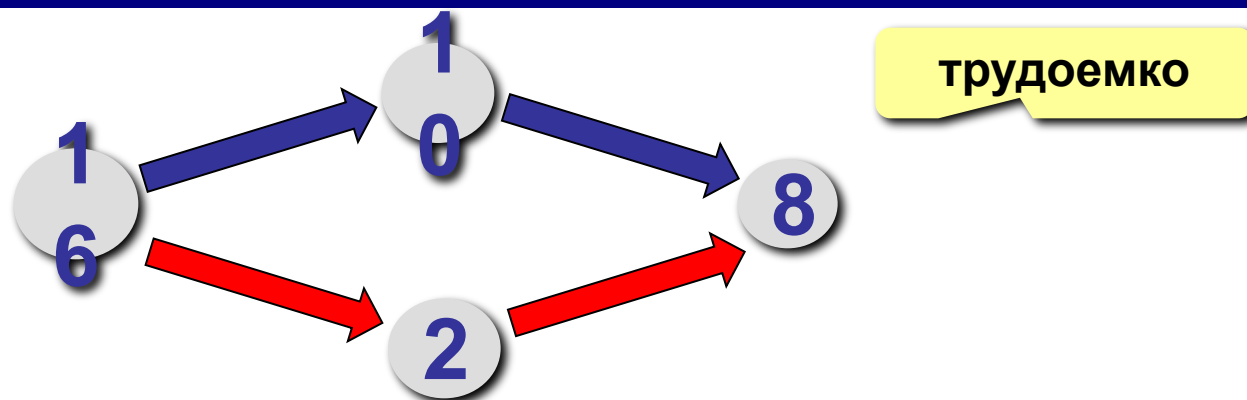
---

$$1010101101010110_2 =$$

$$111100110111110101_2 =$$

$$110110110101111110_2 =$$

# Перевод в восьмеричную и обратно



**Шаг 1.** Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

**Шаг 2.** Разбить на триады:

$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

**Шаг 3.** Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$

Примеры:

---

$$A35_{16} =$$

$$765_8 =$$

# Арифметические операции

## сложение

$$\begin{array}{r} \text{A } 5 \text{ B}_{16} \\ + \text{C } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{D } 9_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{10 } 5 \text{ 11} \\ + \text{12 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{13 } 9 \end{array}$$

1 в перенос

$$11 + 14 = 25 = 16 + 9$$

$$5 + 7 + 1 = 13 = \text{D}_{16}$$

1 в перенос

$$10 + 12 = 22 = 16 + 6$$

# Пример:

---

$$\begin{array}{r} \text{C B A}_{16} \\ + \text{A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

# Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

заем

$$\begin{array}{r} \text{C } 5 \text{ B}_{16} \\ - \text{A } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ D } \text{D}_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cdot \quad \cdot \\ \text{12 } 5 \text{ 11} \\ - \text{10 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 13 } \text{13} \end{array}$$

заем

$$(11 + 16) - 14 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(5 - 1) + 16 - 7 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(12 - 1) - 10 = 1$$

# Пример:

---

$$\begin{array}{r} 1 \text{ B A}_{16} \\ - \text{ A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

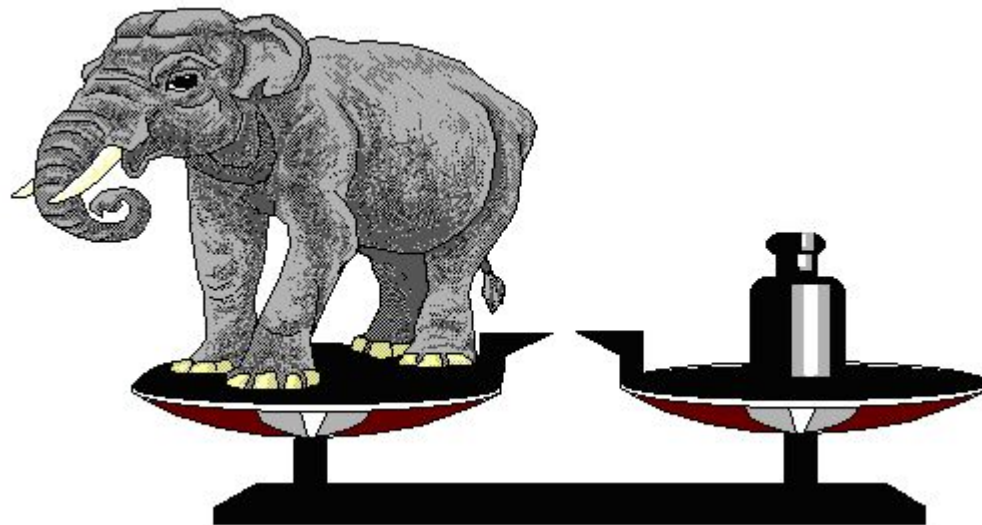


# Системы счисления

## Тема 5. Другие системы счисления

# Троичная уравновешенная система

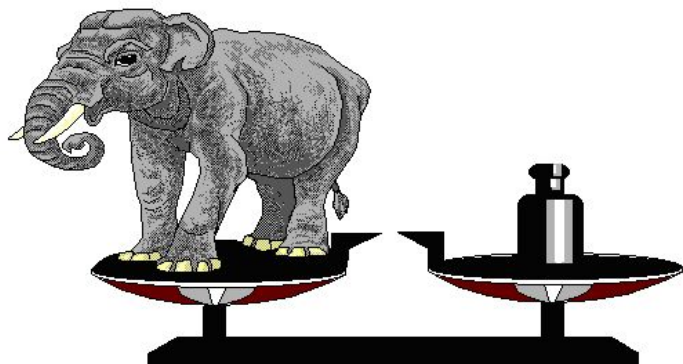
---



## Задача Баше:

Найти такой набор из **4 гирь**, чтобы с их помощью на чашечках равноплечных весов можно было взвесить груз массой **от 1 до 40 кг** включительно. Гирь можно располагать на любой чашке весов.

# Троичная уравновешенная система



+ 1 гиря справа  
0 гиря снята  
- 1 гиря слева

Веса гирь:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

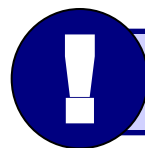
$27 \text{ кг} + 9 \text{ кг} + 3 \text{ кг} + 1 \text{ кг} = 40 \text{ кг}$

1 1 1 1<sub>Зур</sub> = 40

Реализация:

ЭВМ «Сетунь», Н.П. Брусенцов (1958)

50 промышленных образцов



Троичная система!