Методы вычислений

Вычисление НОД

НОД = наибольший общий делитель двух натуральных чисел – это наибольшее число, на которое оба исходных числа делятся без остатка.

Перебор:

1. Записать в переменную `k` минимальное из двух чисел.
2. Если `a` и `b` без остатка делятся на `k`, то стоп.
3. Уменьшить `k` на 1.
4. Перейти к шагу 2.

это цикл с условием!

Где будет НОД?

Почему алгоритм обязательно закончится?

Вычисление НОД (перебор)

```
k := a; { или k := b; }
while (a mod k <> 0) or
      (b mod k <> 0) do
  k := k - 1;
writeln ('НОД(', a, ',', b, ')=', k);
```

ИЛИ

Почему можно начинать с любого числа?

Как начать с минимального?

много операций для больших чисел

Алгоритм Евклида

```
НОД(a,b)=НОД(a-b, b)
        =НОД(a, b-a)
```

Евклид
(365-300 до. н. э.)

Заменяем большее из двух чисел разностью большего и меньшего до тех пор, пока они не станут равны. Это и есть НОД.

Пример:

```
НОД (14, 21) = НОД (14, 21-14) = НОД (14, 7)
             = НОД (7, 7) = 7
```

Реализация алгоритма Евклида

```
пока a ≠ b делай
  если a > b, то
        a := a - b
  иначе b := b - a;
```

Где будет НОД? Как его вывести?

много шагов при большой разнице чисел:

НОД(1998,2)=НОД(1996,2)= … =2

Модифицированный алгоритм Евклида

```
НОД(a,b)=НОД(a mod b,b)
        =НОД(a, b mod a)
```

Заменяем большее из двух чисел остатком от деления большего на меньшее до тех пор, пока меньшее не станет равно нулю. Тогда большее — это НОД.

Пример:

```
НОД (14, 21) = НОД (14, 7) = НОД (0, 7) = 
7
```

Еще один вариант:

```
НОД(2·a,2·b)= 2·НОД(a,b)
НОД(2·a,b)=НОД(a,b) // при нечетном b
```

Задания

«4»: Составить программу для вычисления НОД и заполнить таблицу:

N	64168	358853	6365133	17905514	549868978
M	82678	691042	11494962	23108855	298294835
НОД(N,M)					

«5»: То же самое, но сравнить для всех пар число шагов обычного и модифицированного алгоритмов (добавить в таблицу еще две строчки).

Методы вычислений

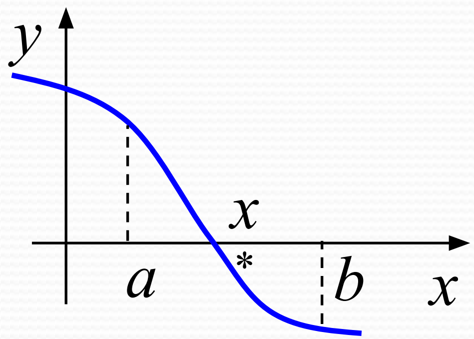
Тема 2. Решение уравнений

Методы решения уравнений $f(x) = 0$

- **Точные (аналитические)**

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi k,\ k \in Z$$

- **Приближенные**
  - **графические**



  - **численные** (методы последовательного приближения):
    1) по графику найти интервал $[a, b]$, в котором находится x^* (или одно **начальное приближение** x_0)
    2) по некоторому алгоритму уточнить решение, сужая интервал, в котором находится x^*
    3) повторять шаг 2, пока не достигнута требуемая точность: $b - a < \varepsilon$

Численные методы

Применение: используются тогда, когда точное (аналитическое) решение неизвестно или очень трудоемко.

- дают хотя бы какое-то **решение**
- во многих случаях можно оценить ошибку и найти решение **с заданной точностью**

- решение всегда приближенное, **неточное**

$$\sqrt{x+1} - 4\sin(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{x = 1{,}3974} \qquad \boxed{x \approx 1{,}3974}$$

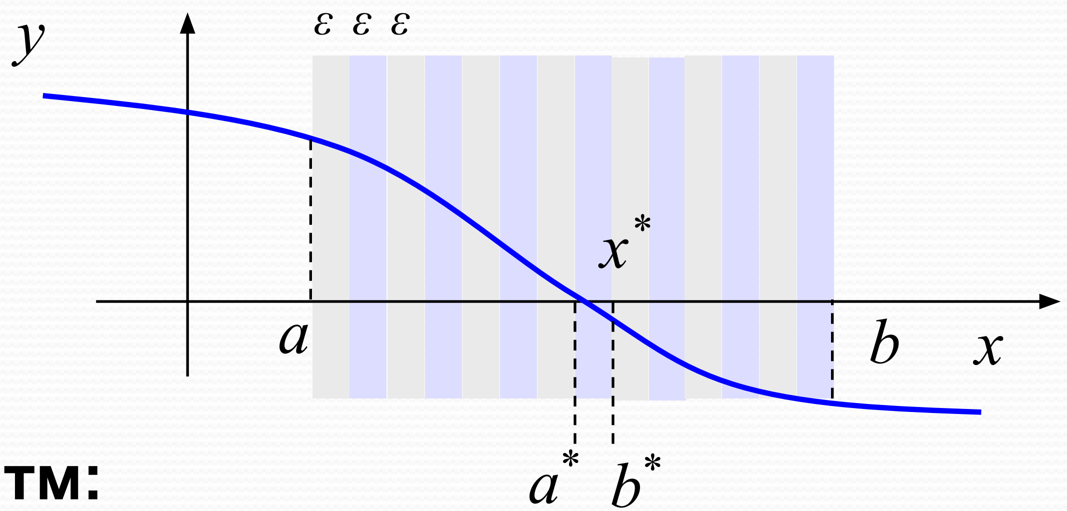
Метод прямого перебора

```
program qq;
var ...: real;
function f(x: real): real;
begin
  f := -x;
end;
begin
  { основная программа }
end.
```

? Как найти все решения на [a,b]?

Метод прямого перебора

Задача: найти решение уравнения $f(x) = 0$ на интервале $[a, b]$ с заданной точностью ε (чтобы найденное решение отличалось от истинного не более, чем на ε).



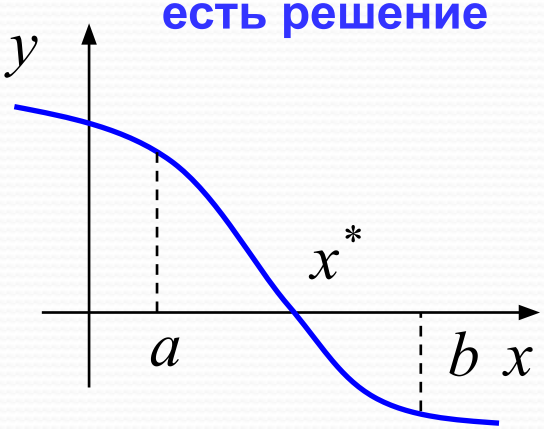
Алгоритм:

- разбить интервал $[a, b]$ на полосы шириной ε
- найти полосу $[a^*, b^*]$, в которой находится x^*
- решение – a^* или b^*

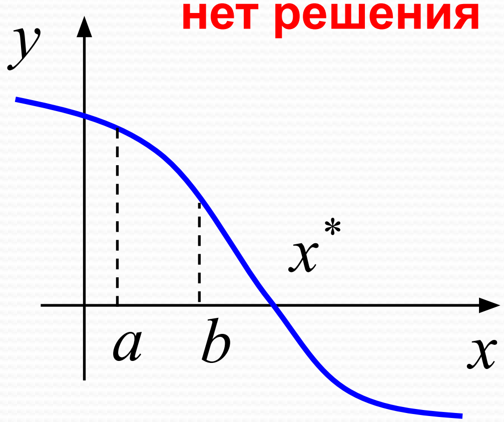
Как улучшить решение?

Есть ли решение на [a, b]?

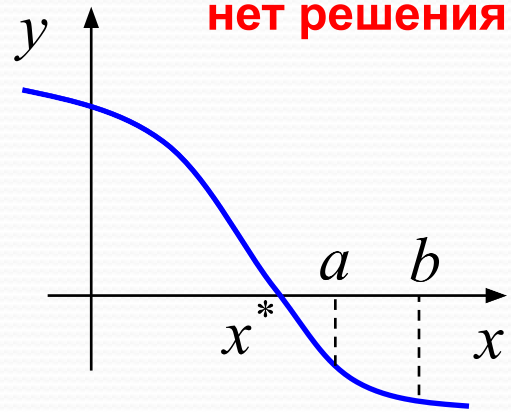
есть решение



нет решения



нет решения



$$f(a) > 0 \qquad f(b) < 0$$

$$f(a) > 0 \qquad f(b) > 0$$

$$f(a) < 0 \qquad f(b) < 0$$

$$\boxed{f(a)f(b) < 0}$$

$$\boxed{f(a)f(b) > 0}$$

! Если *непрерывная* функция $f(x)$ имеет разные знаки на концах интервала [a, b], то в некоторой точке x внутри [a, b] она равна 0, то есть $f(x) = 0$!

Метод прямого перебора

```
eps := 0.001; { точность решения }
x := a;
пока f(x)*f(x+eps) > 0 делай
  x := x + eps; { к следующему интервалу}
конец
ответ := x;
```

? Как повысить точность без лишних вычислений?

```
eps := 0.001; { точность решения }
x := a;
while f(x)*f(x+eps) > 0 do begin
  x := x + eps; { к следующему интервалу}
end;
x := x + eps/2;
```

? Что опасно?

Метод дихотомии (деления пополам)

- **простота**
- можно получить решение с **любой** заданной **точностью**

- нужно знать **интервал** $[a, b]$
- на интервале $[a, b]$ должно быть только **одно** решение
- **большое число шагов** для достижения высокой точности
- только для функций **одной** переменной

Метод дихотомии (в программе)

```
пока b - a > eps делай
  c := (a + b) / 2;
  если f(a)*f(c) < 0 то
        b := c
  иначе a := c;
конец
ответ := (a + b) / 2;
```

Задания

«4»: Найти все решения уравнения $x^2 = 5\cos(x-1)$ на интервале [-5,5] методом дихотомии и вывести их на экран.

«5»: Сделать задачу на «4» и сравнить число шагов цикла при использовании метода перебора и метода дихотомии.

Решение уравнений в Excel

Задача: найти все решения уравнения $x^2 = 5\cos x$
на интервале [-5,5]

Как решить математическими методами?

Методы решения уравнений:

- **аналитические**: решение в виде формулы $x = \ldots$
- **численные**: *приближенное* решение, число
  1) выбрать *начальное приближение* x_0 «рядом» с решением

     Как выбрать начальное приближение?

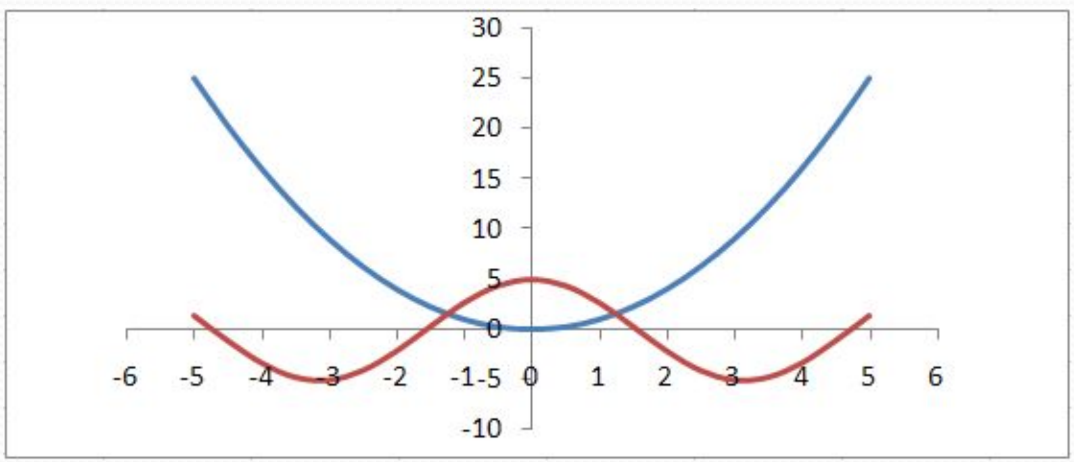
  2) по некоторому алгоритму вычисляют первое приближение, затем – второе и т.д. $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots$
  3) вычисления прекращают, когда значение меняется очень мало (метод сходится) $x_0 \to \ldots \to x_{15} \to x_{16} \approx x^*$

Решение уравнения $x^2 = 5\cos x$

1. **Таблица значений функций** на интервале [-5,5]

	A	B	C	D
1	**x**	**f1**	**f2**	
2	-5	=A2^2	=5*COS(A2)	
3	-4,5			
4				

2. **Графики функций** (диаграмма «Точечная»)



2 решения:
начальные приближения

$$x_0 = -1{,}5$$

$$x_0 = 1{,}5$$

Решение уравнения $x^2 = 5\cos x$

3. Подготовка данных

начальное приближение

	E	F	G	H
1	**x**	**f1**	**f2**	**f2-f1**
2	-1,5	=E2^2	=5*COS(E2)	=F2-G2
3				

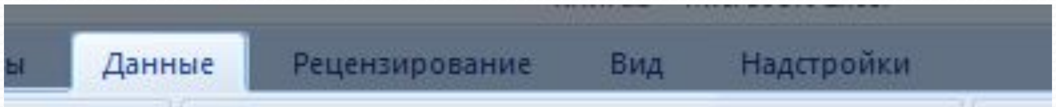
целевая ячейка

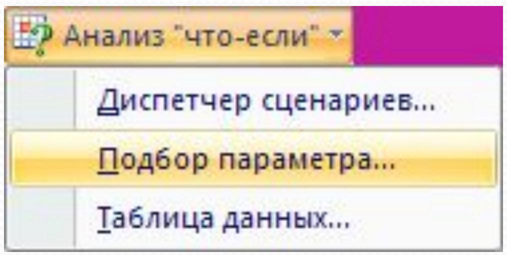
Цель: H2=0

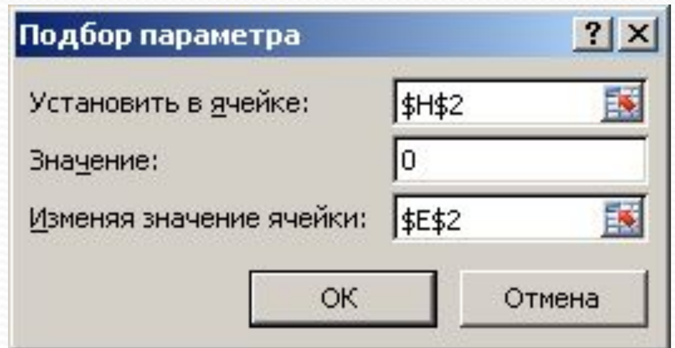
Зачем нужна разность?

Решение уравнения $x^2 = 5\cos x$

4. Подбор параметра







ошибка

решение уравнения

	E	F	G	H
1	x	f1	f2	f2-f1
2	-1,252	1,568	1,567	0,00053

Почему не нуль?

Как найти второе решение?

Оптимизация

Оптимизация – это поиск оптимального (наилучшего) варианта в заданных условиях.

Оптимальное решение – такое, при котором некоторая заданная функция (*целевая функция*) достигает минимума или максимума.

Постановка задачи:

- **целевая функция**

$f(x) \to \min$ (расходы, потери, ошибки)

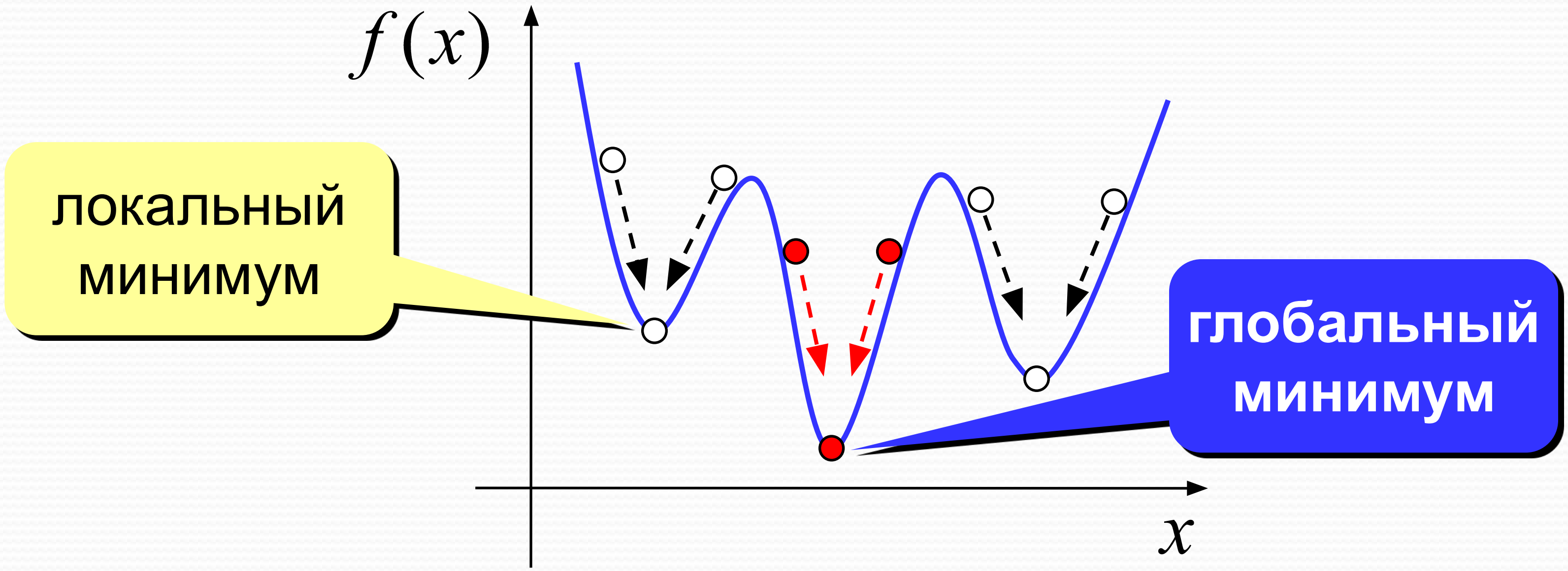
$f(x) \to \max$ (доходы, приобретения)

- **ограничения**, которые делают задачу осмысленной

Задача без ограничений: построить дом при минимальных затратах.

Решение: не строить дом вообще.

Оптимизация

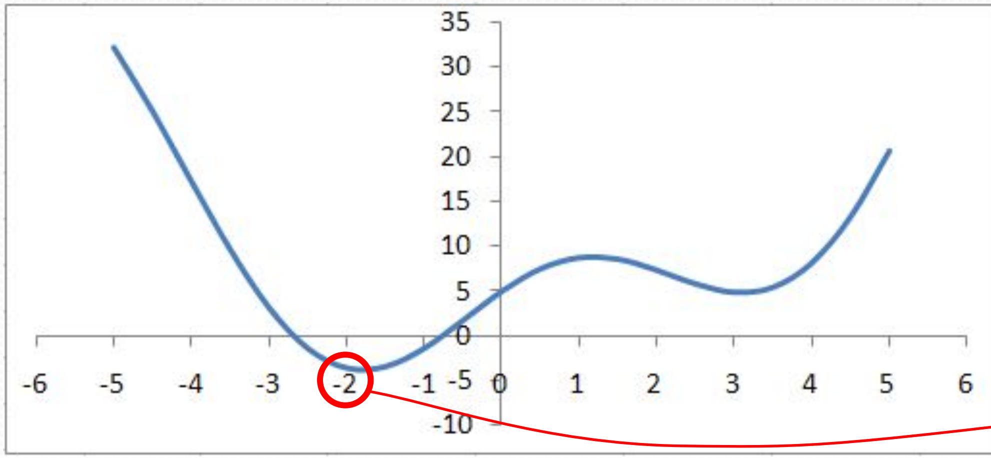


- обычно нужно найти **глобальный минимум**
- большинство численных методов находят только **локальный минимум**
- минимум, который найдет *Excel,* зависит от выбора начального приближения («шарик на горке скатится в ближайшую ямку»)

Поиск минимума функции

$$y = x^2 + 6\sin x + 5\cos x$$

1. Строим график функции (диаграмма «Точечная»)



Зачем нужен график?

начальное приближение

$$x_0 = -2$$

2. Подготовка данных

начальное приближение

	E	F
1	**x**	**f**
2	-2	=E2^2+6*SIN(E2)+5*COS(E2)

целевая ячейка

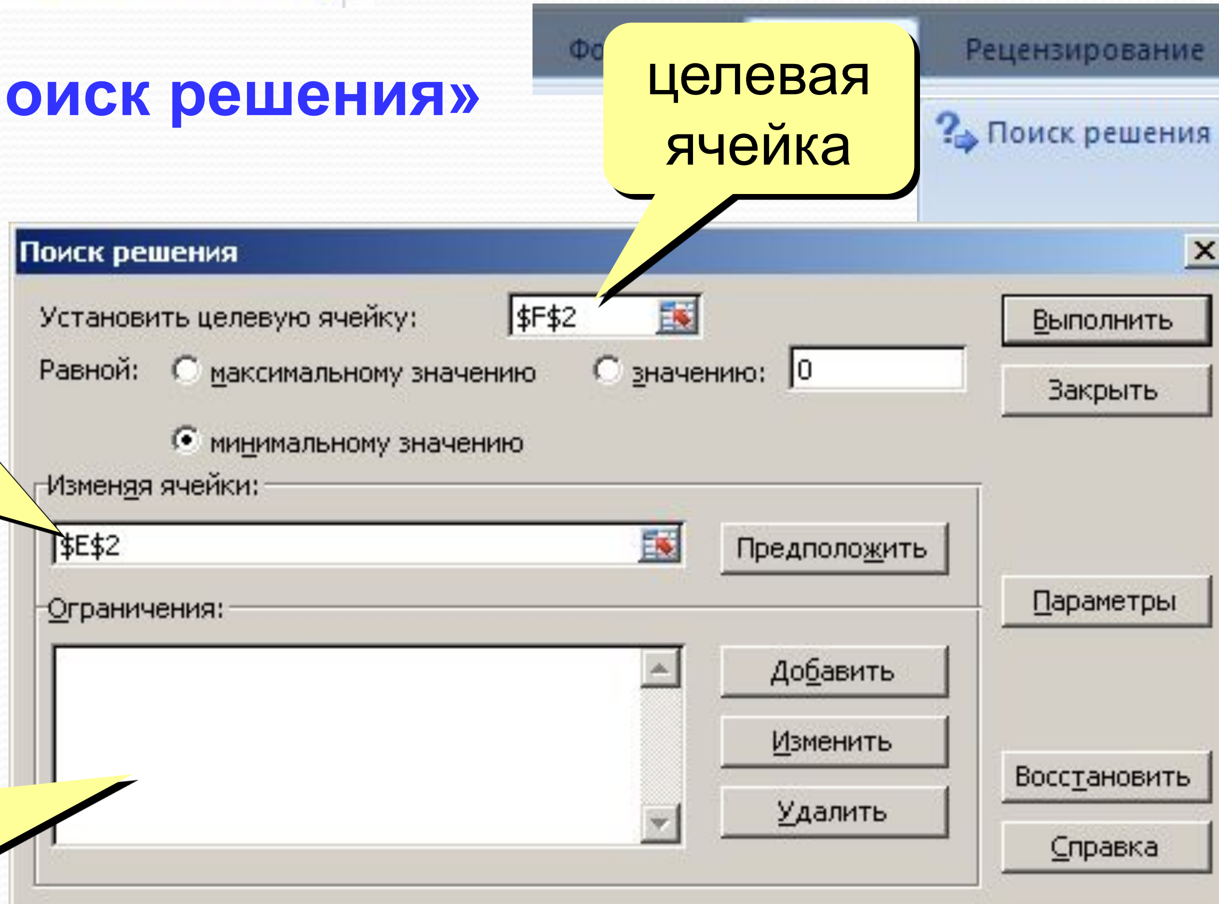
Изменение E2 должно влиять на F2!

Поиск минимума функции

	E	F
1	x	f
2	-2	=E2^2+6*SIN(E2)+5*COS(E2)

3. Надстройка «Поиск решения»

целевая ячейка



изменяемые ячейки:
E2
D2:D6
D2:D6; C5:C8

ограничения
A1 <= 20
B2:B8 >= 5
A1 = целое

Параметры оптимизации