

Методика обучения
теме «Логика» в
профильном курсе.
Решение задач ЕГЭ
17, 18

Коровина Е.А.

Что нужно знать?



Таблицы истинности

ОТРИЦАНИЕ

A	\bar{A}
0	1
1	0

ДИЗЪЮНКЦИЯ

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ЭКВИВАЛЕНЦИ Я

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

КОНЪЮНКЦИЯ

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

СТРОГАЯ ДИЗЪЮНКЦИЯ

A	B	$A \dot{\vee} B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

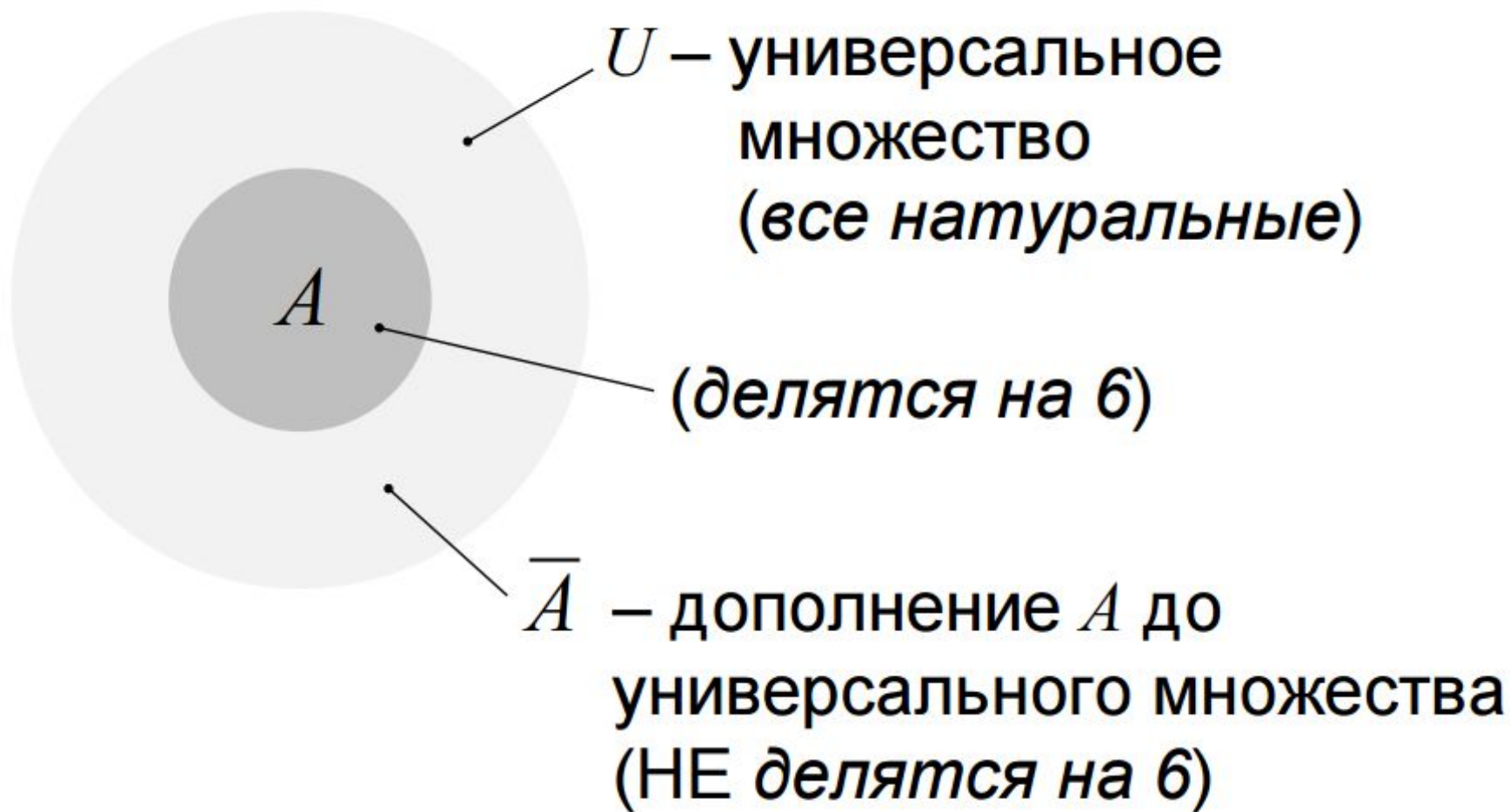
ИМПЛИКАЦИЯ

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

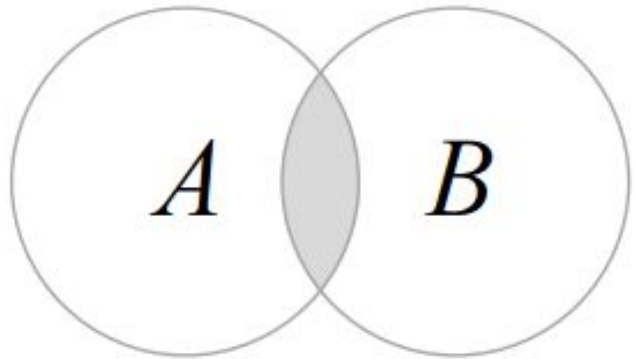
Основные формулы преобразования логических выражений:

1. $\neg\neg A \equiv A.$
2. $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B.$
3. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B.$
4. $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \& \neg B.$
5. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B.$
6. $A \leftrightarrow B \equiv (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B) \equiv (\neg A \vee B) \& (A \vee \neg B).$
7. $A \& (A \vee B) \equiv A.$
8. $A \vee A \& B \equiv A.$
9. $\neg A \& (A \vee B) \equiv \neg A \& B.$

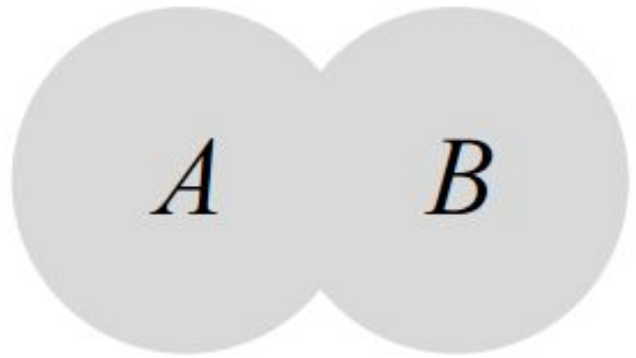
Что нужно знать о множествах?



Что нужно знать о множествах?



$A \cdot B$ – пересечение ($A \cap B$)



$A + B$ – объединение ($A \cup B$)

Множества и логические функции

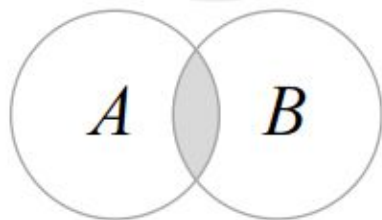
Множество задаётся логической функцией



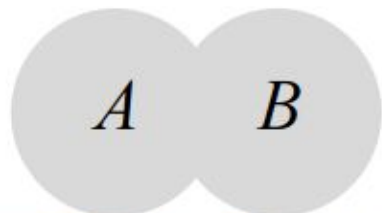
$$x \in A \Leftrightarrow \mathbf{A}(x) = 1$$



$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}(x) = 1 &\Leftrightarrow x \notin A \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \end{aligned}$$



$$\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \cdot B$$



$$\mathbf{A}(x) + \mathbf{B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A + B$$

Решение задач

1) Формулировка задачи:

Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \rightarrow (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \wedge \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x .

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A .

Решение:

Введем обозначения:

$$P \equiv (x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\});$$

$$Q \equiv (x \in \{3, 6, 9, 12, 15\});$$

$$A \equiv (x \in A).$$

Преобразовав исходное выражение, получаем:

$$P \rightarrow ((Q \wedge \neg A) \rightarrow \neg P) = P \rightarrow (\neg(Q \wedge \neg A) \vee \neg P) =$$

$$= P \rightarrow (\neg Q \vee A \vee \neg P) = \neg P \vee \neg Q \vee A \vee \neg P = \neg P \vee \neg Q \vee A$$

Поскольку, $\neg P \vee \neg Q \vee A = 1$, то A должно быть истинным везде, где ложно $(\neg P \vee \neg Q)$, тогда минимально допустимое множество:

$$A_{min} = \neg(\neg P \vee \neg Q) = P \wedge Q$$

$(P \wedge Q)$ обозначает пересечение двух множеств P и Q , т.е. множество $\{6, 12\}$.

Соответственно, $A_{min} = \{6, 12\}$.

Сумма элементов множества A равна $6+12=18$.

Ответ: 18

2) Формулировка задачи:

Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \vee (\neg(x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \rightarrow (x \in A))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x .

Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества A .

Решение:

Введем обозначения:

$$P \equiv (x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) ;$$

$$Q \equiv (x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) ;$$

$$A \equiv (x \in A).$$

Преобразовав исходное выражение, получаем:

$$\neg P \vee (\neg Q \rightarrow A) = \neg P \vee Q \vee A = 1$$

Поскольку, $\neg P \vee Q \vee A = 1$, то A должно быть истинным везде, где ложно $(\neg P \vee Q)$, тогда минимально допустимое множество:

$$A_{min} = \neg(\neg P \vee Q) = P \wedge \neg Q$$

$(P \wedge \neg Q)$ – это множество чисел, принадлежащих множеству P и не принадлежащих множеству Q , т.е. множество $\{2, 4, 8, 10\}$.

Соответственно, $A_{min} = \{2, 4, 8, 10\}$.

Произведение элементов множества A равно $2 * 4 * 8 * 10 = 640$.

Ответ: 640

3) Формулировка задачи:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \vee (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

Решение:

Дизъюнкция истинна, когда хотя бы одно из выражений истинно.

$$(K \wedge L \wedge M) = 1 \text{ или } (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

Логические переменные L и M являются зависимыми друг от друга, переменные K и N – независимы.

Каждое выражение является конъюнкцией логических переменных и истинно, только в том случае, когда истинны все высказывания, входящие в данное выражение.

Значит, для выражения $(K \wedge L \wedge M) = 1$ существует единственный вариант решения, когда $K=1, L=1, M=1$, но независимая переменная N может принимать любое значение (либо 1, либо 0), следовательно вариантов решения уже $1*2=2$.

Подобным образом находим варианты решения выражения $(\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$, учитывая, что переменная K тоже независима и может принимать любое значение. Получаем тоже 2 варианта решения.

Складывая все полученные результаты, получаем
 $2+2=4$.

Ответ: уравнение имеет 4 решения

4) Формулировка задачи:

Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наименьшего натурального числа A формула $\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 14) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 21))$ тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

Введём обозначения:

$$A = \text{ДЕЛ}(x, A),$$

$$D_{14} = \text{ДЕЛ}(x, 14),$$

$$D_{21} = \text{ДЕЛ}(x, 21).$$

Введём множества:

A — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие A ,

D_{14} — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{14} ,

D_{21} — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{21} .

Исходное выражение принимает вид:

$$A \rightarrow (D_{14} \wedge D_{21}) = 1.$$

Преобразуем данное выражение:

$$A \rightarrow (D_{14} \wedge D_{21}) = \neg A \vee D_{14} \wedge D_{21} = 1.$$

Составим таблицу истинности:

Значения x	D_{14}	D_{21}	$D_{14} \wedge D_{21}$	$\neg A$	A	$A \rightarrow (D_{14} \wedge D_{21}) =$ $= \neg A \vee D_{14} \wedge D_{21}$
14	1	0	0	1	0	1
21	0	1	0	1	0	1
28	1	0	0	1	0	1
42	1	1	1	Любое	Любое	1
56	1	0	0	1	0	1

Порядок заполнения таблицы:

1. Заполняем значения x , входящие в состав множеств D_{14} и D_{21} ,
2. заполняем значения логического выражения $(D_{14} \wedge D_{21})$,
3. заполняем единицами значения выражения $A \rightarrow (D_{14} \wedge D_{21}) = \neg A \vee D_{14} \wedge D_{21}$, т.к. по условию дано, что это выражение истинно,
4. Заполняем значения $\neg A$,
5. Заполняем значения A .

По условию задачи необходимо найти наименьшее натуральное число из множества A , значит, выбираем первый вариант решения, где значение A может быть любым. В данном случае, это число 42.

Ответ: 42

4) Формулировка задачи:

Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

$$(X \& 102 \neq 0) \rightarrow ((X \& 36 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Решение:

Упростим выражение (заменяем импликацию дизъюнкцией):

$$\begin{aligned} & (X \& 102 \langle \rangle 0) \rightarrow ((X \& 36 = 0) \rightarrow (X \& A \langle \rangle 0)) = \\ & = (X \& 102 \langle \rangle 0) \rightarrow ((X \& 36 \langle \rangle 0) \vee (X \& A \langle \rangle 0)) \\ & = \\ & = (X \& 102 = 0) \vee ((X \& 36 \langle \rangle 0) \vee (X \& A \langle \rangle 0)) = \\ & = (X \& 102 = 0) \vee (X \& 36 \langle \rangle 0) \vee (X \& A \langle \rangle 0). \end{aligned}$$

Для того, чтобы выражение

$$(X \& 102 = 0) \vee (X \& 36 \langle \rangle 0) \vee (X \& A \langle \rangle 0)$$

было истинно достаточно, чтобы хотя бы одно из логических выражений было истинно.

Рассмотрим первой выражение $(X \& 102 = 0)$:

Найдем все значения x , при которых $(X \& 102 = 0)$ истинно.

Для этого переведем 102 в двоичную систему счисления: $102 = 1100110_2$.

Проанализируем поразрядную конъюнкцию числа 1100110_2 с числом X_2

Номер бита (разряда)	6	5	4	3	2	1	0	Пронумеруйте биты (разряды) в двоичном числе 1100110_2
$102 =$	1	1	0	0	1	1	0	Если в числе X 0, 3, 4, 7 и т.д. биты равны «1» или «0», то после поразрядной конъюнкции все равно на месте 0, 3, 4, 7 и т.д. будут нули.
$X =$	1	1	1	1	1	1	1	Если в числе X 1, 2, 5, 6 биты равны «1», то после поразрядной конъюнкции на этих местах будут единицы. Следовательно, мы не получим 0, как нужно по условию ($X \& 102 = 0$).

Вывод: выражение не получит истину для чисел X , у которых в двоичной системе счисления есть

1, 2, 5, 6 биты равные «1»

Рассмотрим второе выражение ($X \& 36 \neq 0$)

Только для 1, 2, 5 и 6 битов, равных «1» (для всех остальных чисел X , первое слагаемое даст истину).

Для этого переведем 36 в двоичную систему счисления: $36 = 100100_2$.

Проанализируем поразрядную конъюнкцию числа 100100_2 с числом X_2

Номер бита (разряда)	6	5	4	3	2	1	0	Пронумеруйте биты (разряды) в двоичном числе 1100110_2
$36 =$	0	1	0	0	1	0	0	Если в числе X 2 и 5 биты равны «1», то после поразрядной конъюнкции все равно на 2 и 5 месте будут единицы. Если в числе X 1, и 6 биты равны «1», то после поразрядной конъюнкции на этих местах будут единицы. Следовательно, мы получим 0, а по условию $(X \& 36 \neq 0)$.
$X =$	1	1	*	*	1	1	*	

Вывод: выражение не получит истину для чисел X , у которых в двоичной системе счисления есть 1 и 6 биты равные «1»

Все неучтенные биты нужно добавить в третье логическое выражение ($X \& A \neq 0$).

Так как у нас остались неучтенными биты 2 и 5, то в числе A обязательно 2 и 5 биты должны быть равны «1».

$A = 100100_2 = 36$ (это минимальное число A).

Ответ: 36