Методика обучения теме «Логика» в профильном курсе. Решение задач ЕГЭ 17, 18

Коровина Е.А.

Что нужно знать?

Таблицы истинности

ОТРИЦАНИЕ

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

ДИЗЪЮНКЦИЯ

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ЭКВИВАЛЕНЦИ Я

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

КОНЪЮНКЦИЯ

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

СТРОГАЯ ДИЗЪЮНКЦИЯ

A	B	$A \dot{\vee} B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

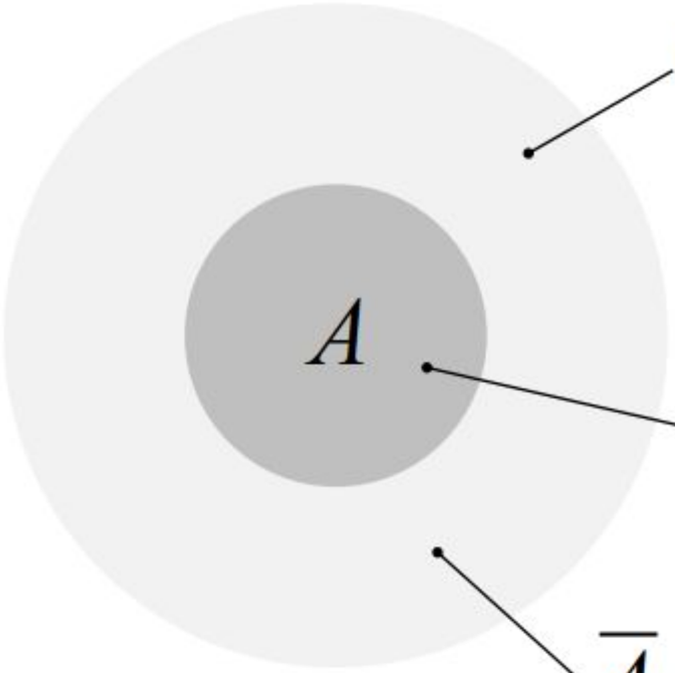
ИМПЛИКАЦИЯ

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Основные формулы преобразования логических выражений:

1. $\neg \neg A \equiv A$.
2. $\neg (A \,\&\, B) \equiv \neg A \vee \neg B$.
3. $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \,\&\, \neg B$.
4. $\neg (A \rightarrow B) \equiv A \,\&\, \neg B$.
5. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$.
6. $A \leftrightarrow B \equiv (A \,\&\, B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B) \equiv (\neg A \vee B) \,\&\, (A \vee \neg B)$.
7. $A \,\&\, (A \vee B) \equiv A$.
8. $A \vee A \,\&\, B \equiv A$.
9. $\neg A \,\&\, (A \vee B) \equiv \neg A \,\&\, B$.

Что нужно знать о множествах?

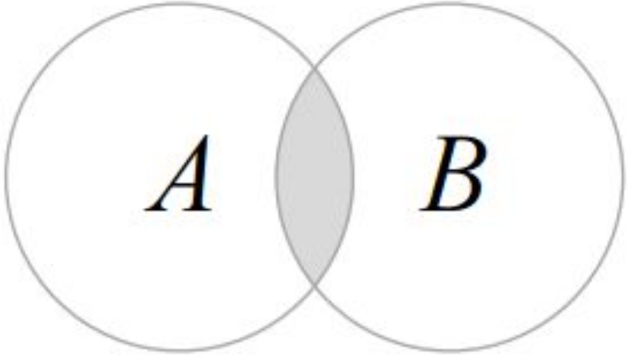


U – универсальное множество (*все натуральные*)

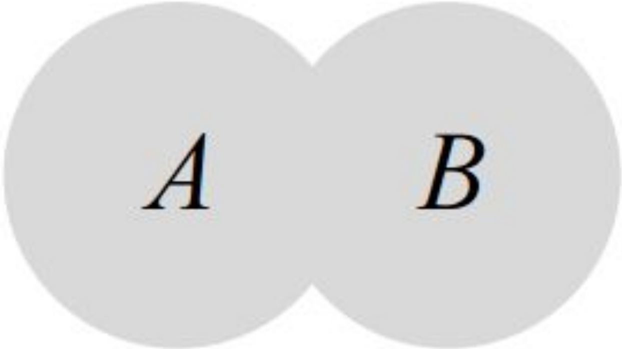
(*делятся на 6*)

$\overline{A}$ – дополнение A до универсального множества (НЕ *делятся на 6*)

Что нужно знать о множествах?



$A \cdot B$ – пересечение ($A \cap B$)



$A + B$ – объединение ($A \cup B$)

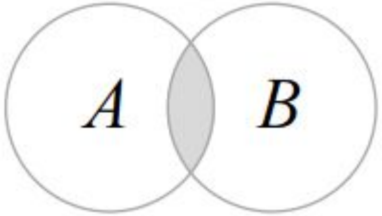
Множества и логические функции

Множество задаётся логической функцией

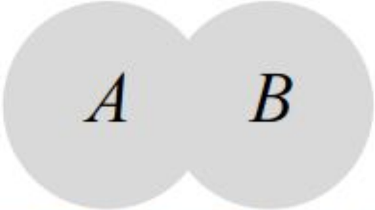
$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}(x) = 1$$

$$\overline{\mathbf{A}}(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \overline{A}$$



$$\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \cdot B$$



$$\mathbf{A}(x) + \mathbf{B}(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A + B$$

Решение задач

1) Формулировка задачи:

Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \to (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \land$

$\land \neg(x \in A)) \to \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества А.

<u>Решение:</u>

Введем обозначения:

$P \equiv (x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\})$;

$Q \equiv (x \in \{3, 6, 9, 12, 15\})$;

$A \equiv (x \in A)$.

Преобразовав исходное выражение, получаем:

$P \rightarrow ((Q \wedge \neg A) \rightarrow \neg P) = P \rightarrow (\neg(Q \wedge \neg A) \vee \neg P) =$

$= P \rightarrow (\neg Q \vee A \vee \neg P) = \neg P \vee \neg Q \vee A \vee \neg P = \neg P \vee \neg Q \vee A$

Поскольку, $\neg P \vee \neg Q \vee A = 1$, то A должно быть истинным везде, где ложно ($\neg P \vee \neg Q$), тогда минимально допустимое множество:

$A_{min} = \neg(\neg P \vee \neg Q) = P \wedge Q$

($P \wedge Q$) обозначает пересечение двух множеств P и Q, т.е. множество $\{6, 12\}$.

Соответственно, $A_{min} = \{6, 12\}$.

Сумма элементов множества A равна 6+12=18.

Ответ: 18

2) Формулировка задачи:

Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

$\neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \vee (\neg(x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \rightarrow (x \in A))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества А.

Решение:

Введем обозначения:

$P \equiv (x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\})$;

$Q \equiv (x \in \{3, 6, 9, 12, 15\})$;

$A \equiv (x \in A)$.

Преобразовав исходное выражение, получаем:

$\neg P \lor (\neg Q \to A) = \neg P \lor Q \lor A = 1$

- Поскольку, $\neg P \vee Q \vee A = 1$, то A должно быть истинным везде, где ложно ($\neg P \vee Q$), тогда минимально допустимое множество:

$A_{min} = \neg(\neg P \vee Q) = P \wedge \neg Q$

($P \wedge \neg Q$) – это множество чисел, принадлежащих множеству P и не принадлежащих множеству Q,

т.е. множество $\{2, 4, 8, 10\}$.

Соответственно, $A_{min} = \{2, 4, 8, 10\}$.

Произведение элементов множества A равно 2*4*8*10=640.

Ответ: 640

3) Формулировка задачи:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \vee (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

Решение:

Дизъюнкция истинна, когда хотя бы одно из выражений истинно.

$(K \wedge L \wedge M) = 1$ или $(\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$

Логические переменные L и M являются зависимыми друг от друга, переменные K и N – независимы.

Каждое выражение является конъюнкцией логических переменных и истинно, только в том случае, когда истинны все высказывания, входящие в данное выражение.

Значит, для выражения **(K $\wedge$ L $\wedge$ M) = 1** существует единственный вариант решения, когда **K=1, L=1, M=1**, но независимая переменная **N** может принимать любое значение (либо 1, либо 0), следовательно вариантов решения уже 1*2=2.

Подобным образом находим варианты решения выражения **(¬L $\wedge$ ¬M $\wedge$ N) = 1**, учитывая, что переменная **K** тоже независима и может принимать любое значение. Получаем тоже 2 варианта решения.

Складывая все полученные результаты, получаем 2+2=4.

Ответ: уравнение имеет 4 решения

4) Формулировка задачи:

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наименьшего натурального числа A формула

ДЕЛ(x, A) $\rightarrow$ (ДЕЛ(x, 14) $\wedge$ ДЕЛ(x, 21))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

Введём обозначения:

A = **ДЕЛ**(x, A),

D_{14} = **ДЕЛ**(x, 14),

D_{21} = **ДЕЛ**(x, 21).

Введём множества:

A — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие A,

D_{14} — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{14},

D_{21} — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{21}.

Исходное выражение принимает вид:

$A \to (D_{14} \land D_{21}) = 1.$

Преобразуем данное выражение:

$A \to (D_{14} \land D_{21}) = \neg A \lor D_{14} \land D_{21} = 1.$

Составим таблицу истинности:

Значения x	D_{14}	D_{21}	$D_{14} \land D_{21}$	$\neg A$	**A**	$A \to (D_{14} \land D_{21}) = \neg A \lor D_{14} \land D_{21}$
14	1	0	0	1	0	1
21	0	1	0	1	0	1
28	1	0	0	1	0	1
42	1	1	1	Любое	Любое	1
56	1	0	0	1	0	1

Порядок заполнения таблицы:

1. Заполняем значения x, входящие в состав множеств D_{14} и D_{21} ,
2. заполняем значения логического выражения $(D_{14} \wedge D_{21})$,
3. заполняем единицами значения выражения $A \to (D_{14} \wedge D_{21}) = \neg A \vee D_{14} \wedge D_{21}$, т.к. по условию дано, что это выражение истинно,
4. Заполняем значения ¬ A,
5. Заполняем значения A.

По условию задачи необходимо найти наименьшее натуральное число из множества А, значит, выбираем первый вариант решения, где значение А может быть любым. В данном случае, это число 42.

Ответ: 42

4) Формулировка задачи:

Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$$(X \& 102 <> 0) \to ((X \& 36 = 0) \to (X \& A <> 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Решение:

Упростим выражение (заменим импликации дизъюнкциями):

$(X \,\&\, 102 <> 0) \to ((X \,\&\, 36 = 0) \to (X \,\&\, A <> 0)) =$

$= (X \,\&\, 102 <> 0) \to ((X \,\&\, 36 <> 0) \lor (X \,\&\, A <> 0))$

$=$

$= (X \,\&\, 102 = 0) \lor ((X \,\&\, 36 <> 0) \lor (X \,\&\, A <> 0)) =$

$= (X \,\&\, 102 = 0) \lor (X \,\&\, 36 <> 0) \lor (X \,\&\, A <> 0).$

Для того, чтобы выражение

$(X \,\&\, 102 = 0) \lor (X \,\&\, 36 <> 0) \lor (X \,\&\, A <> 0)$

было истинно достаточно, чтобы хотя бы одно из логических выражений было истинно.

Рассмотрим первой выражение (*X* & 102 = 0):

Найдем все значения x, при которых (*X* & 102 = 0) истинно.

Для этого переведем 102 в двоичную систему счисления: $102 = 1100110_2$.

Проанализируем поразрядную конъюнкцию числа 1100110_2 с числом X_2

Номер бита (разряда)	6	5	4	3	2	1	0	Пронумеруйте биты (разряды) в двоичном числе 1100110_2
102 =	1	1	0	0	1	1	0	Если в числе X 0, 3, 4, 7 и т.д. биты равны «1» или «0», то после поразрядной конъюнкции все равно на месте 0, 3, 4, 7 и т.д. будут нули.
X=	1	1	1	1	1	1	1	Если в числе X 1, 2, 5, 6 биты равны «1», .то после поразрядной конъюнкции на этих местах будут единицы. Следовательно, мы не получим 0, как нужно по условию $(X \& 102 = 0)$.

Вывод: выражение не получит истину для чисел X, у которых в двоичной системе счисления есть

1, 2, 5, 6 биты равные «1»

Рассмотрим второе выражение (*X* & 36 <> 0)

Только для 1, 2, 5 и 6 битов, равных «1» (для всех остальных чисел X, первое слагаемое даст истину).

Для этого переведем 36 в двоичную систему счисления: $36 = 100100_2$.

Проанализируем поразрядную конъюнкцию числа 100100_2 с числом X_2

Номер бита (разряда)	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**Пронумеруйте биты (разряды) в двоичном числе 1100110_2**
36 =	0	1	0	0	1	0	0	Если в числе Х 2 и 5 биты равны «1» , то после поразрядной конъюнкции все равно на 2 и 5 месте будут единицы. Если в числе Х 1, и 6 биты равны «1», .то после поразрядной конъюнкции на этих местах будут единицы. Следовательно, мы получим 0, а по условию $(X \& 36 <> 0)$.
X=	1	1	*	*	1	1	*	

Вывод: выражение не получит истину для чисел Х, у которых в двоичной системе счисления есть

1 и 6 биты равные «1»

Все неучтенные биты нужно добавить в третье логическое выражение ($X \,\&\, A <> 0$).

Так как у нас остались неучтенными биты 2 и 5, то в числе А обязательно 2 и 5 биты должны быть равны «1».

А = 100100_2= 36 (это минимальное число А).

Ответ: 36