Тема №4.

*

Декартово произведение множеств

Рене Декарт
(1596 – 1650)

«Я мыслю, - значит существую»

Лавлинский М.В., LavlinskiMV@mail.ru

I. Упорядоченная пара

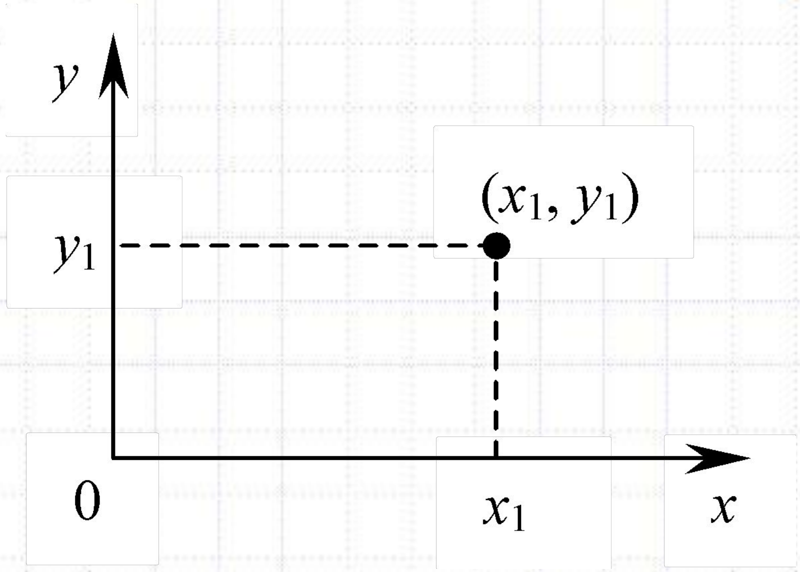
- 2-элементное упорядоченное множество

#1.

Координаты точки плоскости:

на 1-ой позиции – абсцисса,

на 2-ой – ордината



Вектор (**кортеж**) – упорядоченный набор элементов

x = (x_1, x_2, …, x_n)

где x_i – координаты (компоненты)

Длина (**размерность**) вектора – количество его координат

Два вектора **x, y** одинаковой размерности **равны**, если их соответствующие компоненты равны:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \forall \mathbf{i} \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$$

#2.

{1, 2} = {2, 1, 1} = {2, 1}

НО (1, 2) ≠ (2, 1, 1) ≠ (2, 1)

Только (1, 2) = (1, 2)

II. Декартово произведение 2 множеств

Def 1:
Декартово (прямое) произведение множеств A и B есть множество всех упорядоченных пар (a, b) таких, что $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

Упорядоченная пара

#3. Найдите декартово произведение множеств

A={1, 2}, **B={3, 4, 5}**

A×B = { (**1**, **3**), (**1**, **4**), (**1**, **5**), (**2**, **3**), (**2**, **4**), (**2**, **5**) }

#4. A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, B={a, b, c, d, e, f, g, h}

A×B – обозначение клеток шахматной доски

8	a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
7	a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
6	a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
5	a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
4	a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
3	a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
2	a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
1	a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1
	a	b	c	d	e	f	g	h

Если A = B

то $A \times B = A^2$

Декартов квадрат

III. Произведение n множеств

- множество всех векторов $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ длины **n** таких , что

$a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, то

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathbf{A^n}$

Декартова степень

IV. Примеры

#5. $R \times R = R^2$

векторы (x, y), где $x \in R$ и $y \in R$,

- координаты точек плоскости

#6. X = {1,2,3}, У= {0,1}: X×У -? и У×X - ?

X×У= {(1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1)}

У×X= {(0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3)}

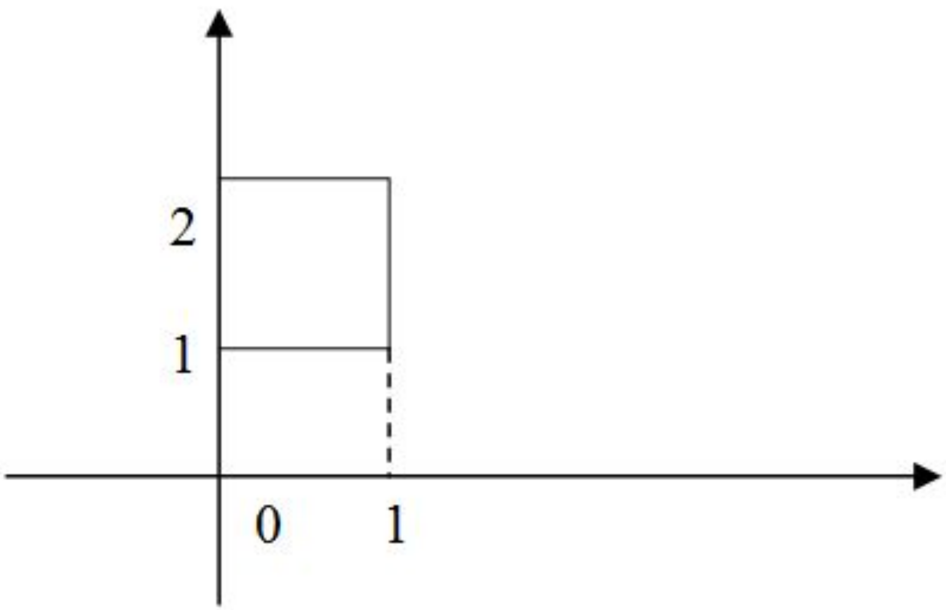
Не обладает свойством коммутативности

#7. Прямое произведение 2 бесконечных множеств – числовых отрезков:

[0; 1]×[1; 2]

Решение:

Все точки квадрата с вершинами (0; 1), (0; 2), (1; 1) и (1; 2)



*

Домашнее задание

1. О.В.Кузьмин. Перечислительная комбинаторика
2. **§ 1.1.** Пример 1.6, 1.7
3. «4_[ДЗ-1] Декартово произведение.doc»

V. Количество элементов в ДП
(Правило произведения)

Если A и B – конечные множества и $n(A) = m_1$, $n(B) = m_2$ $\Rightarrow$

$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ $= m_1 \cdot m_2$

Обоснование:
$\forall$ из m_1 элементов мн-ва A может составить пару с
$\forall$ из m_2 элементов мн-ва B
$\Rightarrow m_1 \cdot m_2$ - различных пар

Общее правило произведения:
$A_1, A_2, \ldots, A_k$ – конечные множества и
$n(A_1) = m_1$, $n(A_2) = m_2$, …, $n(A_k) = m_k$ $\Rightarrow$
$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_k)$
Следствие: $n(A^n) = (n(A))^n$

VI. Решение задач

Задача №1.

A={1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}, B={a; b; c; d; e; f; g; h}. Найти n(A × B).

Дано:

n(A) = 8

n(B) = 8

Найти:

n(A×B) - ?

Решение:

n(A×B) = n(A) · n(B)

n(A×B) = 8 · 8 = 64

Ответ: 64

8	a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
7	a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
6	a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
5	a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
4	a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
3	a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
2	a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
1	a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1
	a	b	c	d	e	f	g	h

Задача №2.

$X=\{1; 2; 3\}$, $Y=\{0; 1\}$. Найти $n(X \times Y)$, $n(Y \times X)$.

Решение:

Х×У= {(1; 0), (1; 1), (2; 0), (2; 1), (3; 0), (3; 1)}

У×Х= {(0; 1), (0; 2), (0; 3), (1; 1), (1; 2), (1; 3)}

$n(A\times B) = n(A) \cdot n(B)$

$n(X\times Y) = 3 \cdot 2 = 6$

$n(Y\times X) = 2 \cdot 3 = 6$

Ответ: $n(X\times Y) = n(Y\times X) = 6$

Задача №3.
Найти количество всевозможных двузначных чисел, которые можно составить из цифр от 1 до 9.

Дано:
$A=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$
$n(A) = 9$
2-узначное число – упорядоченная пара

Найти:
$n(A\times A) = n(A^2)$ - ?

Решение:
$\mathbf{n(A\times B) = n(A) \cdot n(B)}$
$\mathbf{n(A^2) = (n(A))^2}$

$n(A\times A) = 9 \cdot 9 = 81$
- кол-во 2-узначных чисел из цифр от 1 до 9

Ответ: 81

Задача №4.
Найти количество всевозможных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр множества B= {5; 2; 7}

Дано:
B={5; 2; 7}
n(B) = 3
3-значное число – кортеж длины 3

Найти:
$n(B\times B\times B) = n(B^3)$ - ?

Решение:
$n(B^3) = (n(B))^3$

$n(B^3) = 3^3 = 27$
- кол-во 3-значных чисел из цифр 5, 2, 7

Ответ: 27

Цифры в записи числа могут повторяться

Задача №5.
Определить длину и количество векторов прямого произведения $A \times B \times C$ множеств
$A = \{1; 4; 7\}$, $B = \{0; 2\}$, $C = \{5\}$.

Решение:

1) Длина каждого вектора: **3**
2) Количество векторов:

$n(A \times B \times C) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Проверка:

$A \times B \times C = \{(1;0;5), (1;2;5), (4;0;5), (4;2;5), (7;0;5), (7;2;5)\}$

Задача №6.
Серёжа рисует знаки, состоящие из геометрической фигуры (окружность, квадрат, треугольник или шестиугольник), буквы (русского алфавита) и цифры. Сколько различных знаков может нарисовать Серёжа?

Дано:
A – фигуры
B – буквы
C – цифры
$n(A) = 4$
$n(B) = 33$
$n(C) = 10$
1 знак – кортеж длины 3

Найти:
$n(A \times B \times C)$ - ?

Решение:

$n(A \times B \times C) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C)$

$n(A \times B \times C) = 4 \cdot 33 \cdot 10 = 1320$
- различных знаков

Ответ: 1320

А1

Ю9

*

Домашнее задание

1. О.В.Кузьмин. Перечислительная комбинаторика
2. **§ 1.2.** Правило произведения
3. «4_[ДЗ-2] Декартово произведение.doc»
4. **Подготовиться к СР**