Программные средства визуализации решений задач теории групп

Артем Артемьев

Что такое GAP ?

Система компьютерной алгебры, спроектированная в 1985 году как инструмент комбинаторной теории групп – раздела алгебры, изучающего группы, заданные порождающими элементами и определяющими соотношениями

Что может GAP ?

- Определить, что кубик Рубика имеет **43252003274489856000** различных состояний и собрать его из произвольного начального состояния в среднем за 100 ходов
- Вычислить 6320430 цифр 40-го числа Мерсенна $\mathbf{2^{20996011}-1}$, являющегося на сегодня самым большим из известных науке простых чисел

gapw95.exe

```
            #########           ######         ###########           ###
         #############          ######         ############         ####
        ##############         ########        #############       #####
       ###############         ########        #####   ######      #####
      ######         #         #########       #####    #####     ######
     ######                   ##########       #####    #####    #######
     #####                    ##### ####       #####   ######   ########
     ####                    #####  #####      #############   ###  ####
     #####     #######       ####    ####      ###########    ####  ####
     #####     #######      #####    #####     ######        ####   ####
     #####     #######      #####    #####     #####         #############
      #####      #####     ################    #####         #############
      ######     #####     ################    #####         #############
      ################    ##################   #####                ####
       ###############    #####        #####   #####                ####
         #############    #####        #####   #####                ####
          #########      #####          #####  #####                ####

     Information at:  http://www.gap-system.org
     Try '?help' for help. See also  '?copyright' and  '?authors'

   Loading the library. Please be patient, this may take a while.
GAP4, Version: 4.4.10 of 02-Oct-2007, i686-pc-cygwin-gcc
Components:  small 2.1, small2 2.0, small3 2.0, small4 1.0, small5 1.0,
             small6 1.0, small7 1.0, small8 1.0, small9 1.0, small10 0.2,
             id2 3.0, id3 2.1, id4 1.0, id5 1.0, id6 1.0, id9 1.0, id10 0.1,
             trans 1.0, prim 2.1  loaded.
Packages:    AClib 1.1, Polycyclic 2.1, Alnuth 2.2.4, CrystCat 1.1.2,
             Cryst 4.1.4, AutPGrp 1.2, CRISP 1.3.1, CTblLib 1.1.3,
             TomLib 1.1.2, FactInt 1.4.12, FGA 1.1.0.1, GAPDoc 1.0,
             IRREDSOL 1.1.2, LAGUNA 3.4, Sophus 1.23, Polenta 1.2.7,
             ResClasses 2.5.1  loaded.
gap> 
```

/proc/cygdrive/C/gap4r8/bin/i686-pc-cygwin-gcc-default32/gap.exe -l /proc/cygdrive/C/gap4r8

```
 ┌───────┐   GAP 4.8.5, 25-Sep-2016, build of 2016-09-25 14:51:12 (GMTDT)
 │  GAP  │   http://www.gap-system.org
 └───────┘   Architecture: i686-pc-cygwin-gcc-default32
Libs used:  gmp, readline
Loading the library and packages ...
Components: trans 1.0, prim 2.1, small* 1.0, id* 1.0
Packages:   AClib 1.2, Alnuth 3.0.0, AtlasRep 1.5.1, AutPGrp 1.6, Browse 1.8.6, CRISP 1.4.4, Cryst 4.1.12,
            CrystCat 1.1.6, CTblLib 1.2.2, FactInt 1.5.3, FGA 1.3.1, GAPDoc 1.5.1, IO 4.4.6, IRREDSOL 1.3.1,
            LAGUNA 3.7.0, Polenta 1.3.6, Polycyclic 2.11, RadiRoot 2.7, ResClasses 4.5.0, Sophus 1.23, SpinSym 1.5,
            TomLib 1.2.5, Utils 0.40
Try '??help' for help. See also '?copyright', '?cite' and '?authors'
gap>
```

Символы

"	'	(	)	*	+	,	–
.	/	:	;	<	=	>	~
{	\	]	^	_	{	}	#

Операторы и ограничители

+	–	*	/	^	~
=	<>	<	<=	>	>=
:=	.	. .	–>	,	;
[	]	{	}	(	)

Ключевые слова:

and	do	elif	else	end	fi
for	function	if	in	local	mod
not	od	or	repeat	return	then
until	while	quit			

Идентификаторы состоят из букв, цифр, символов «_», и должны содержать не менее одной буквы или символа «_». При этом регистр является существенным.

Примеры идентификаторов:

A	100x	LongIdentifier
Hello	_100	HELLO

Группы библиотек GAP

- *Циклическая группа порядка n* (CyclicGroup([filt,]n));
- *Абелева группа*, разложимая в прямую сумму групп порядков

ints[1],*ints*[2],…,*ints*[*n*] для списка *ints* натуральных чисел (AbelianGroup([filt,]ints));

- *Группа диэдра порядка n* (DihedralGroup([filt,]n));
- *Знакопеременная группа степени deg* (AlternatingGroup([filt,]deg));
- *Симметрическая группа степени deg* (SymmetricGroup([filt,]deg));
- *Группа Матье степени degree* (MathieuGroup([filt,]degree));

Группы библиотек GAP

- *Общая линейная группа* обратимых $d \times d$ матриц над кольцом R (GL([filt,]d, R));
- *Общая линейная группа обратимых $d \times d$ матриц над конечным полем из q элементов* (GL([filt,]d, q));
- *Специальная линейная группа* обратимых $d \times d$ матриц над кольцом R (SL([filt,]d, R));
- *Специальная линейная группа обратимых $d \times d$ матриц с единичным определителем над конечным полем из q элементов* (SL([filt,]d, q));
- *Проективная специальная линейная группа*, изоморфная фактор-группе группы $SL(d, q)$ по её центру (PSL([filt,]d, q));

GAP как калькулятор:

- **gap> (9 - 7) * (5 + 6);**
- **22**
- **gap> 2^64;**
- **18446744073709551616**

Разложение целого числа на множители

- gap> FactorsInt(2^200-1);
- [3, 5, 5, 5, 11, 17, 31, 41, 101, 251, 401, 601, 1801,
- 4051, 8101, 61681, 268501, 340801, 2787601, 3173389601]

Работа с матрицами:

- Зададим матрицу А:
- **gap> A:=[[1,2,3,4],[4,2,1,5],[-1,10,0,0],[2,-4,7,0]];;**
- Для ее удобочитаемого вывода на экран применяется команда **Display**:
- **gap> Display(A);**
- **[[1, 2, 3, 4],**
- **[4, 2, 1, 5],**
- **[-1, 10, 0, 0],**
- **[2, -4, 7, 0]]**
- Вычислим определитель этой матрицы:
- **gap> DeterminantMat(A);**
- **-932**

Симметрическая группа имеет, кроме себя самой и единичной подгруппы, лишь следующие нормальные подгруппы:

а) знакопеременную группу *U _4;*

б) «четверную группу Клейна».

Последняя группа абелева.

```
gap> c:=SymmetricGroup(4);
Sym( [ 1 .. 4 ] )
gap> NormalSubgroups(c);
[ Sym( [ 1 .. 4 ] ), Group([ (2,4,3), (1,4)(2,3), (1,3)(2,4) ]), Group([ (1,4)(2,3), (1,3)
  (2,4) ]), Group(()) ]
gap>
gap> z:=Group([(2,4,3),(1,4)(2,3),(1,3)(2,4)]);
Group([ (2,4,3), (1,4)(2,3), (1,3)(2,4) ])
gap> IsAbelian(z);
false
gap> x:=Group([(1,4)(2,3),(1,3)(2,4)]);
Group([ (1,4)(2,3), (1,3)(2,4) ])
gap> IsAbelian(x);
true
gap>
```

Найти число Силовских 5-подгрупп в A_5.

```
gap> S:= SymmetricGroup(5);
Sym( [ 1 .. 5 ] )
gap> A5:= CommutatorSubgroup(S, S);
Group( [ ( 1, 2, 3), (2, 3, 4), (2, 4) (3, 5) ] )
gap> P5:=SylowSubgroup(A5,5);
Group( [ ( 1, 5, 4, 3, 2) ] )
gap> C5:=ConjugasyClassSubgroups(A,  P5);
Group( [ ( 1, 5, 4, 3, 2) ] )^G
gap> L5:= AsList(C5);
[ Group( [ ( 1, 5, 4, 3, 2) ] ), Group( [ ( 1, 3, 5, 4, 2) ] ), Group( [ ( 1, 4, 3, 5, 2) ] ), Group( [ ( 1, 4,
5, 2, 3) ] ), Group( [ ( 1, 5, 2, 4, 3) ] ), Group( [ ( 1, 5, 3, 2, 4) ] ) )
gap> H:= Length(L5);
6
```