

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

История систем счисления

Позиционные системы счисления

Определения

- ***Система счисления*** – это способ записи чисел.
- ***Система счисления*** – это ***знаковая*** система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых ***цифрами***.

Чем отличается принцип записи
многозначных чисел
римскими и арабскими цифрами?

XXX

333

Системы счисления

Непозиционные

От положения знака в изображении числа не зависит величина, которую он обозначает.

Например, VIII, XXI и т.д.

Алфавит римской системы записи чисел

Знак	I	V	X	L	C	D	M
10 с.с.	1	5	10	50	100	500	1000

Позиционные

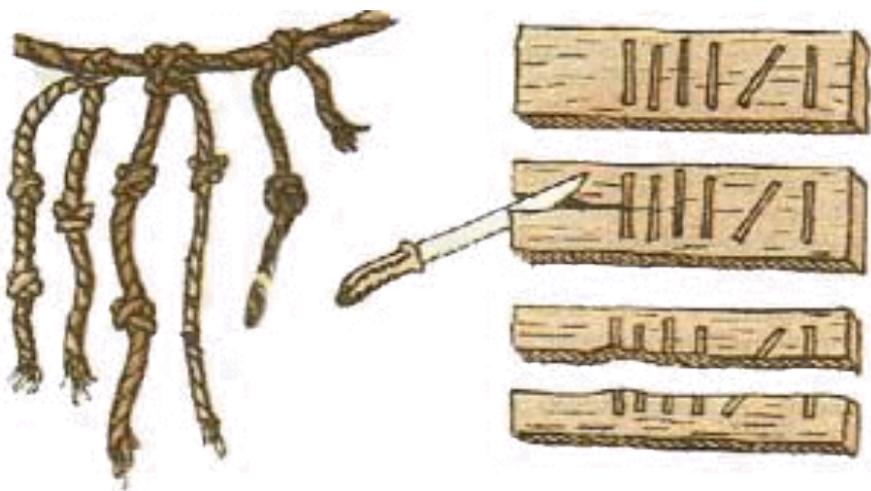
Величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от ее позиции.

Например, 138, 333 т.д.

Алфавит десятичной системы счисления

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Единичная (палочная) система счисления



1 |
2 | |
3 | | |
4 | | | |
5 | | | | | и т. д.

Древнеегипетская десятичная непозиционная система



1



10 000



Несколько единиц



100 000



10



Несколько десятков



1 000 000



100



1000



10 000 000

- Числа в египетской системе счисления записывались как комбинации этих «цифр», в которых каждая «цифра» повторялась не более девяти раз.
- Записывались цифры числа начиная с больших значений и заканчивая меньшими.
- Если десятков, единиц, или какого-то другого разряда не было, то переходили к следующему разряду.

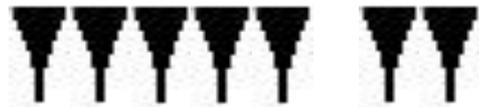


Вавилонская шестидесятеричная система



Все числа от **1** до **59** вавилоняне записывали в *десятичной непозиционной* системе, а число в целом — в *позиционной* системе с основанием **60**.

Шестидесятеричная вавилонская система — первая известная нам система счисления, основанная на позиционном принципе.

 $5*60 + 2 = 302$

 $1*60*60 + 2*60 + 5 = 3725$

 $2*60*60 + 3 = 7203$



обозначать эта запись могла и 3, и 180 ($3*60$), и 10800 ($3*60*60$), и т. д.

Римская система записи чисел

Знак	I	V	X	L	C	D	M
10 С.С.	1	5	10	50	100	500	1000

$$\text{CCXXXVII} = 100+100+10+10+10+5+1+1 = 237$$

$$\text{XXXIX} = 10+10+10+10-1 = 39$$

$$\text{CDXLIV} = (D - C) + (L - X) + (V - I) = 400 + 40 + 4 = 444$$

$$\begin{aligned}\text{MDCCCXLIV} &= M + D + C + C + C + (L-X) + (V - I) = \\ &= 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 40 + 4 = 1844\end{aligned}$$

2006

Славянская глаголическая нумерация

1
2
3
4
5
6
7
8
9

10
20
30
40
50
60
70
80
90

100
200
300
400
500
600
700
800
900

1000

$\text{Ѡ} \text{Ѣ} \text{Ѥ} \quad 800 + 60 + 3 = 863$

Славянская кириллическая нумерация

а - 1	і - 10	ρ - 100
в - 2	к - 20	с - 200
г - 3	л - 30	т - 300
д - 4	м - 40	ѱ - 400
є - 5	н - 50	φ - 500
ѕ - 6	ѣ - 60	χ - 600
з - 7	о - 70	ψ - 700
н - 8	п - 80	ω - 800
Ѡ - 9	ч - 90	ц - 900

ΔΙ - 14

ωξΓ - 863

*ā - 1000

ⓐ - 10 000

Китайская нумерация

一 1 二 2 三 3 四 4 五 5

六 6 七 7 八 8 九 9 ○ нуль

十 10

百 100

千 1000

一千

$$1 * 1000 = 1000$$

五百四十八

$$5*100 + 4*10 + 8 = 548$$

Индийская мультипликативная система

Позиционная десятичная система счисления возникла приблизительно в V веке н.э. в Индии.

Для записи числа используется:

- определенное количество цифр;
- цифра «0» для обозначения отсутствующего разряда;
- разное значение цифры в зависимости от *позиции* в записи числа;
- цифры изображаются символами алфавита "Деванагари".

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

$$9999 \rightarrow 9 * 1000 + 9 * 100 + 9 * 10 + 9$$

Чтобы "собрать" число используется умножение (multiplication англ.), поэтому систему и назвали "*мультипликативной*".



Решающую роль в распространении индийской нумерации в арабских странах сыграло руководство, составленное в начале IX века Мухаммедом Аль Хорезми, в котором он описал способы выполнения арифметических действий

Книга Аль Хорезми была переведена в Западной Европе на латинский язык в XII веке, и десятичная система получила распространение во всей Европе под названием *арабской*.

Непозиционные системы счисления

Непозиционной называют *систему счисления*, в которой знаку, представляющему собой цифру, *всегда соответствует определенное значение* вне зависимости от его местоположения в записи числа.

Значение числа зависит от правил, предписывающих *способ* определения его значения.

Какой это год?

MMVI

Римская система счисления используется:

- для обозначения исторических дат (XX век);
- для обозначения важных событий (XXV Олимпийские игры);
- в литературе (нумерация глав);
- в оформлении документов (серия паспорта, ценных бумаг и др.);
- в декоративных целях (на циферблате часов) и т.д.



Попробуйте перемножить в римской нумерации:

LXXXVIII на **XXV** (88 на 25),

Недостатки непозиционных систем счисления:

- существует постоянная потребность введения новых знаков для записи больших чисел;
- отсутствуют формальные правила записи чисел;
- отсутствуют алгоритмы выполнения арифметических действий с многозначными числами;
- невозможно представлять дробные и отрицательные числа.

Позиционные системы счисления

Позиционной называют *систему счисления*, в которой числовое значение каждой цифры (ее вес) зависит от *номера ее позиции (разряда)* в последовательности цифр, представляющей число.

Используется определенное количество цифр, которые изображаются определенными символами.

Совокупность различных цифр, используемых в позиционной системе счисления для записи чисел, называется *алфавитом* системы счисления.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Позиционная десятичная система счисления

$$123 = 1*10^2 + 2*10^1 + 3*10^0 = 100 + 20 + 3$$

$$1023 = 1*10^3 + 0*10^2 + 2*10^1 + 3*10^0 = 1000 + 20 + 3$$

$$0,123 = 0,1 + 0,02 + 0,003 = 1*10^{-1} + 2*10^{-2} + 3*10^{-3}$$

Число **10** называют *основанием системы счисления*,
а степени десятки - *весами разрядов*.

Базис позиционной системы счисления — это последовательность чисел, каждое из которых задает значение цифры «по месту» или «вес» каждого разряда.

Базисы традиционных систем счисления:

Десятичная система: $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots, 10^n, \dots$

Двоичная система: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n, \dots$

Восьмеричная система: $1, 8, 8^2, 8^3, 8^4, \dots, 8^n, \dots$

$\dots, P^{-2}, P^{-1}, 1, P, P^2, P^3, \dots, P^n, \dots$

Знаменатель P геометрической прогрессии, члены которой образуют базис позиционной системы счисления, называется **основанием** системы.

Дополнительные определения

Число единиц какого-либо разряда, объединяемых в единицу более старшего разряда, называют *основанием позиционной системы счисления*.

Если количество таких цифр равно P , то система счисления называется P -ичной.

Основание системы счисления *совпадает с количеством цифр*, используемых для записи чисел в этой системе счисления .

R-ичные системы счисления

Система счисления	Основание	Количество цифр	Алфавит
Двоичная	2	2	0, 1
Троичная	3	3	0, 1, 2
Восьмеричная	8	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Шестнадцатеричная	16	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Количество цифр в алфавите позиционной системы равно *основанию* системы счисления.

$$45054 = 127776_8 = \text{AFFE}_{16} = 101011111111110_2$$

Представление чисел в P-ичных системах счисления

Развернутая форма записи числа

$$X = a_n * P^n + a_{n-1} * P^{n-1} + \dots + a_1 * P + a_0 + b_{-1} * P^{-1} + b_{-2} * P^{-2} + \dots + b_{-k} * P^{-k} + \dots$$

Свернутая форма записи числа

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 , b_{-1} b_{-2} \dots b_{-k} \dots$$

Любое вещественное число можно записать в любой P-ичной системе счисления в виде *суммы положительных и отрицательных степеней основания системы* с помощью ограниченного набора цифр и при том единственным образом.

Десятичное число **61** можно записать:

$$111101_2$$

$$2021_3$$

$$331_4$$

$$3D_{16}$$

$$10_{61}$$

$$\begin{aligned} 111101_2 &= 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = \\ &= 32 + 16 + 8 + 4 + 1 = \mathbf{61} \end{aligned}$$

$$2021_3 = 2*3^3 + 0*3^2 + 2*3^1 + 1*3^0 = 54 + 6 + 1 = \mathbf{61}$$

$$331_4 = 3*4^2 + 3*4^1 + 1*4^0 = 48 + 12 + 1 = \mathbf{61}$$

$$3D_{16} = 3*16^1 + 13*16^0 = 48 + 13 = \mathbf{61}$$

$$10_{61} = 1*61^1 + 0*61^0 = \mathbf{61}$$

Перечисление натуральных чисел по порядку в P-ичных системах счисления

P = 10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P = 2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
P = 3	1	2	10	11	12	20	21	22	100
P = 4	1	2	3	10	11	12	13	20	21
P = 5	1	2	3	4	10	11	12	13	14

$$P = 1 * P + 0$$

$$10_5 = 1 * 5^1 + 0 * 5^0 = 1 * 5 + 0 = 5$$

Достоинства позиционных систем счисления:

- ограниченное количество символов, необходимых для записи любых чисел;
- простота способа записи на материальном носителе (бумаге, камне, дереве и т.д.);
- удобство выполнения арифметических операций над числами;
- наглядность обучения основам работы с числами.