



Алгебра логики



**Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания.**

# Возникновение логики



Понятие логики как науки появилось ещё в XIX в., т.е. задолго до появления науки информатики и компьютеров.

Элементы математической логики можно найти уже в работах древнегреческих философов. В XVII в. Г. В. Лейбниц высказал идею о том, что рассуждения могут быть сведены к механическому выполнению определенных действий по установленным правилам.

Однако как самостоятельный раздел математики логика начала формироваться только с середины XIX в..



Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания *"не"*, *"и"*, *"или"*, *"если... , то"*, *"тогда и только тогда"* и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются логическими связками.



**Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.**

**Логические связки "не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания.**

**Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются составными. Высказывания, не являющиеся составными, называются элементарными.**



Так, например, из элементарных высказываний “Петров — врач”, “Петров — шахматист” при помощи связки “и” можно получить составное высказывание “Петров — врач и шахматист”, понимаемое как “Петров — врач, хорошо играющий в шахматы”.

При помощи связки “или” из этих же высказываний можно получить составное высказывание “Петров — врач или шахматист”, понимаемое в алгебре логики как “Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно”.

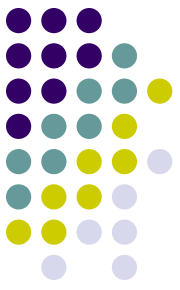
Истинность или ложность получаемых таким образом составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний.



Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение:

(1) Операция, выражаемая словом “не”, называется отрицанием и обозначается чертой над высказыванием (или знаком  $\neg$ ).

Высказывание истинно, когда  $A$  ложно, и ложно, когда  $A$  истинно. Пример. “Луна — спутник Земли” ( $A$ ); “Луна — не спутник Земли” ( $\neg A$ ).



(2) Операция, выражаемая связкой “и”, называется конъюнкцией (лат. conjunctio — соединение) или логическим умножением и обозначается точкой “•” (может также обозначаться знаками  $\cap$  или &).

Высказывание  $A \cdot B$  истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания  $A$  и  $B$  истинны. Например, высказывание

*“10 делится на 2 и 5 больше 3”*  
истинно, а высказывания

*“10 делится на 2 и 5 не больше 3”,*  
*“10 не делится на 2 и 5 больше 3”,*  
*“10 не делится на 2 и 5 не больше 3”*  
ложны.





(3) Операция, выражаемая связкой “или” (в неразделительном, неисключающем смысле этого слова), называется дизъюнкцией (лат. disjunctio — разделение) или логическим сложением и обозначается знаком  $\vee$  (или плюсом). Высказывание  $A \vee B$  ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания  $A$  и  $B$  ложны.

Например, высказывание

*“10 не делится на 2 или 5 не больше 3”*

ложно, а высказывания

*“10 делится на 2 или 5 больше 3”,*

*“10 делится на 2 или 5 не больше 3”,*

*“10 не делится на 2 или 5 больше 3”*

ИСТИННЫ.

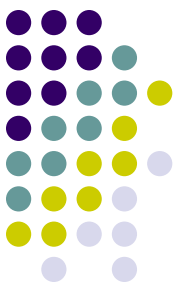


(4) Операция, выражаемая связками “если ..., то”, “из ... следует”, “... влечет ...”, называется импликацией (лат. *implicatio* — тесно связаны) и обозначается знаком  $\square$ .

Высказывание  $A \square B$  ложно тогда и только тогда, когда  $A$  истинно, а  $B$  — ложно.

Например, даны 2 высказывания: “данный четырёхугольник — квадрат” ( $A$ ) и “около данного четырёхугольника можно описать окружность” ( $B$ ).

Рассмотрим составное высказывание  $A \square B$ , понимаемое как “если данный четырёхугольник квадрат, то около него можно описать окружность”. Есть три варианта, когда высказывание  $A \square B$  истинно:



- **A** истинно и **B** истинно, то есть данный четырёхугольник квадрат, и около него можно описать окружность;
- **A** ложно и **B** истинно, то есть данный четырёхугольник не является квадратом, но около него можно описать окружность (разумеется, это справедливо не для всякого четырёхугольника);
- **A** ложно и **B** ложно, то есть данный четырёхугольник не является квадратом, и около него нельзя описать окружность.

**Ложен только один вариант: A истинно и B ложно, то есть данный четырёхугольник является квадратом, но около него нельзя описать окружность.**



(5) Операция, выражаемая связками “*тогда и только тогда*”, “*необходимо и достаточно*”, “*... равносильно ...*”, называется эквиваленцией или *двойной импликацией* и обозначается знаком  $\square$  или  $\sim$ .

Высказывание  $A \square B$  истинно тогда и только тогда, когда значения  $A$  и  $B$  совпадают.

# Существуют и другие логические операции:



- Операция, выражаемая связками “**если ..., то**”, “**из ... следует**”, “**... влечет ...**”, называется импликацией.
- Операция, выражаемая связками “тогда и только тогда”, “необходимо и достаточно”, “... равносильно ...”, называется эквиваленцией или двойной импликацией.
- Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание.
- Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию.



Любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой.

Формулы, принимающие значение “истина” при любых значениях истинности входящих в них переменных называются *тождественно истинными формулами или тавтологиями*.

Формулы, принимающие значение “ложно” при любых значениях истинности входящих в них переменных, называются *тождественно ложными формулами или противоречиями*.

Две формулы при одинаковых наборах значений входящих в них переменных, принимающие одинаковые значения, называются *равносильными*.



Логический элемент компьютера — это часть электронной логической схемы, которая реализует элементарную логическую функцию.

Таблица истинности это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

# Схема И

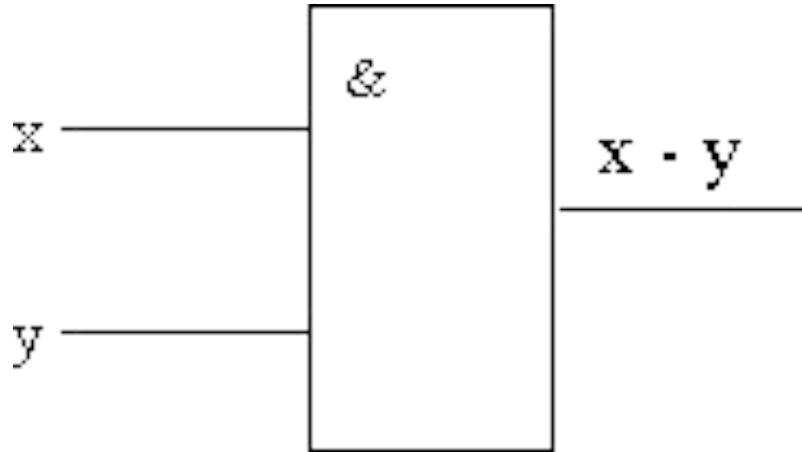


Схема И реализует конъюнкцию двух или более логических значений.

Единица на выходе схемы И будет тогда и только тогда, когда на всех входах будут единицы. Когда хотя бы на одном входе будет ноль, на выходе также будет ноль.



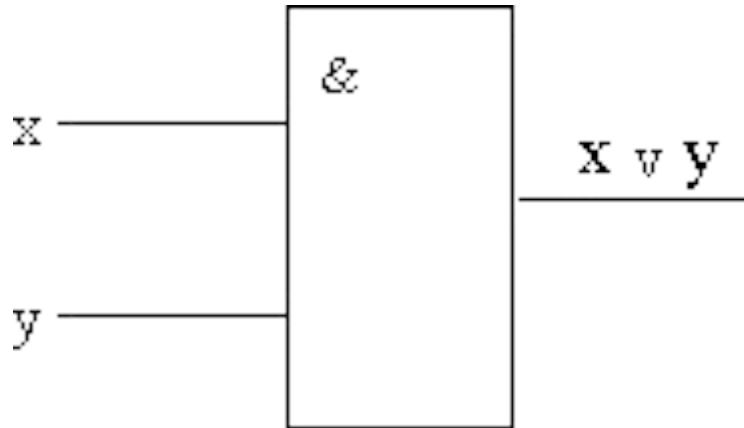
# Таблица истинности



| <b>x</b> | <b>y</b> | <b>x·y</b> |
|----------|----------|------------|
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b>   |
| <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b>   |
| <b>1</b> | <b>0</b> | <b>0</b>   |
| <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b>   |



# Схема ИЛИ



Когда хотя бы на одном входе схемы ИЛИ будет единица, на её выходе также будет единица.

Схема ИЛИ реализует дизъюнкцию двух или более логических значений.

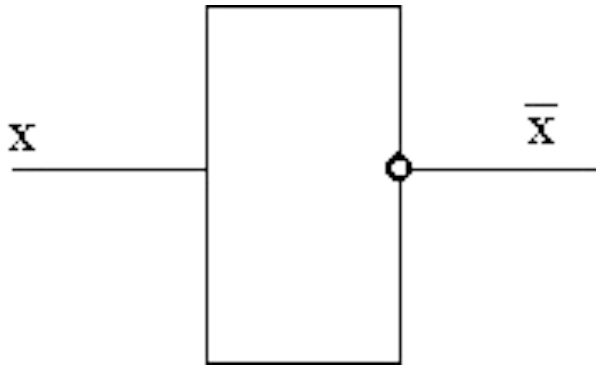
# Таблица истинности



| <b>x</b> | <b>y</b> | <b><math>x \vee y</math></b> |
|----------|----------|------------------------------|
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b>                     |
| <b>0</b> | <b>1</b> | <b>1</b>                     |
| <b>1</b> | <b>0</b> | <b>1</b>                     |
| <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b>                     |



# Схема НЕ



Если на входе схемы 0, то на выходе 1. Когда на входе 1, на выходе 0.

Схема НЕ (инвертор) реализует операцию отрицания.

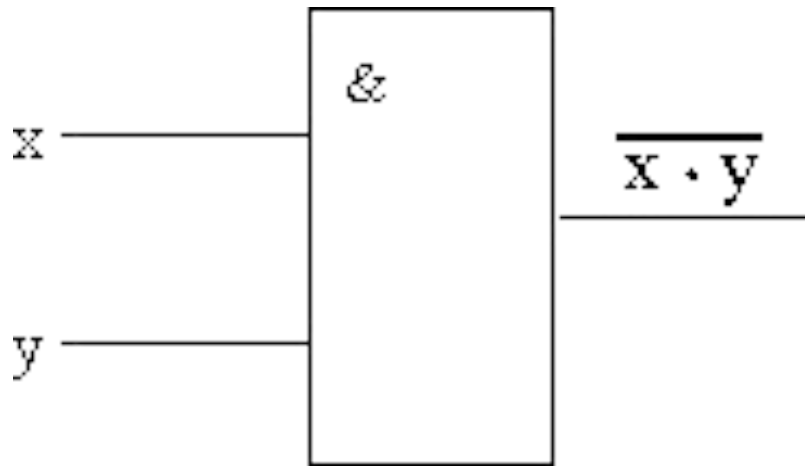
# Таблица истинности



| <b>x</b> | $\bar{x}$ |
|----------|-----------|
| <b>0</b> | <b>1</b>  |
| <b>1</b> | <b>0</b>  |



# Схема И-НЕ



**Схема И-НЕ состоит из элемента И и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы И.**

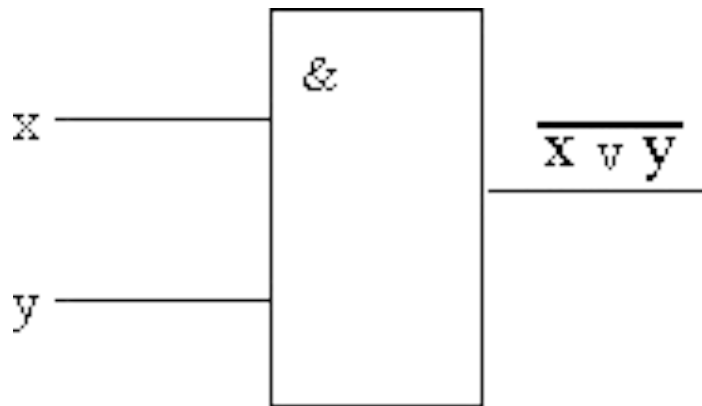
# Таблица истинности



| <b>x</b> | <b>y</b> | $\overline{x \cdot y}$ |
|----------|----------|------------------------|
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>1</b>               |
| <b>0</b> | <b>1</b> | <b>1</b>               |
| <b>1</b> | <b>0</b> | <b>1</b>               |
| <b>1</b> | <b>1</b> | <b>0</b>               |



# Схема ИЛИ - НЕ



**Схема ИЛИ-НЕ состоит из элемента ИЛИ и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы ИЛИ.**



# Таблица истинности



| <b>x</b> | <b>y</b> | $\overline{x \vee y}$ |
|----------|----------|-----------------------|
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>1</b>              |
| <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b>              |
| <b>1</b> | <b>0</b> | <b>0</b>              |
| <b>1</b> | <b>1</b> | <b>0</b>              |

# Преобразование выражений, состоящих из булевых функций



- от перестановки мест аргументов результат не изменяется  
 $A \& B = B \& A$
- существует следующий закон  
 $A \& (B \& C) = (A \& B) \& C$
- Также существуют некоторые тождества, опирающиеся на особые свойства функции, например:
  - 1)  $A \& (\sim A) = \text{ЛОЖЬ}$
  - 2)  $(\sim A) \& (\sim B) = \sim (A \vee B)$Аналогично, сложение и логическое «ИЛИ»:
- от перестановки мест аргументов результат не изменяется  
 $A \vee B = B \vee A$
- существует следующий закон  
 $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
- можно выносить общий множитель за скобки  
 $(A \& B) \vee (C \& B) = B \& (A \vee C)$   
И также некоторые собственные законы:
  - 1)  $A \vee (\sim A) = \text{ИСТИНА}$
  - 2)  $(\sim A) \vee (\sim B) = \sim (A \& B)$

# Самостоятельная работа №8



- Что такое алгебра логики?
- Перечислите основные логические операции?
- Что такое логический элемент компьютера?