



Алгебра логики



Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания.

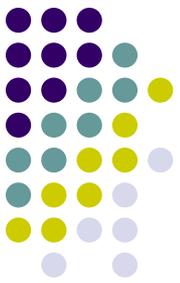
Возникновение логики



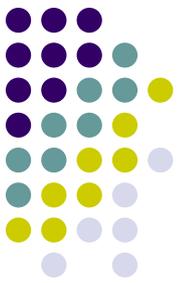
Понятие логики как науки появилось ещё в XIX в., т.е. задолго до появления науки информатики и компьютеров.

Элементы математической логики можно найти уже в работах древнегреческих философов. В XVII в. Г. В. Лейбниц высказал идею о том, что рассуждения могут быть сведены к механическому выполнению определенных действий по установленным правилам.

Однако как самостоятельный раздел математики логика начала формироваться только с середины XIX в..



Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания *"не"*, *"и"*, *"или"*, *"если... , то"*, *"тогда и только тогда"* и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются логическими связками.



Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Логические связки "не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания.

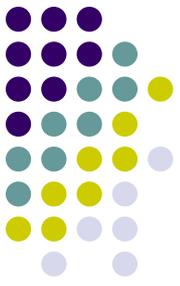
Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются составными. Высказывания, не являющиеся составными, называются элементарными.



Так, например, из элементарных высказываний “Петров — врач”, “Петров — шахматист” при помощи связки “и” можно получить составное высказывание “Петров — врач и шахматист”, понимаемое как “Петров — врач, хорошо играющий в шахматы”.

При помощи связки “или” из этих же высказываний можно получить составное высказывание “Петров — врач или шахматист”, понимаемое в алгебре логики как “Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно”.

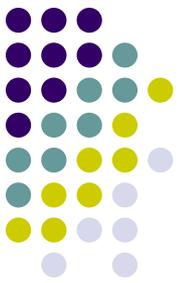
Истинность или ложность получаемых таким образом составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний.



Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение:

(1) Операция, выражаемая словом “не”, называется отрицанием и обозначается чертой над высказыванием (или знаком \neg).

Высказывание истинно, когда А ложно, и ложно, когда А истинно. Пример. “Луна — спутник Земли” (А); “Луна — не спутник Земли” ($\neg A$).



(2) Операция, выражаемая связкой “и”, называется конъюнкцией (лат. conjunctio — соединение) или логическим умножением и обозначается точкой “•” (может также обозначаться знаками \cap или &).

Высказывание $A \cdot B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны. Например, высказывание

“10 делится на 2 и 5 больше 3”
истинно, а высказывания

“10 делится на 2 и 5 не больше 3”,
“10 не делится на 2 и 5 больше 3”,
“10 не делится на 2 и 5 не больше 3”
ложны.



(3) Операция, выражаемая связкой “или” (в неразделительном, неисключающем смысле этого слова), называется дизъюнкцией (лат. disjunctio — разделение) или логическим сложением и обозначается знаком \vee (или плюсом). Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Например, высказывание

“10 не делится на 2 или 5 не больше 3”

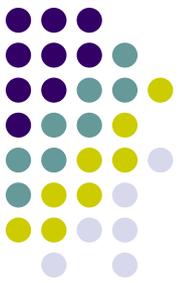
ложно, а высказывания

“10 делится на 2 или 5 больше 3”,

“10 делится на 2 или 5 не больше 3”,

“10 не делится на 2 или 5 больше 3”

ИСТИННЫ.

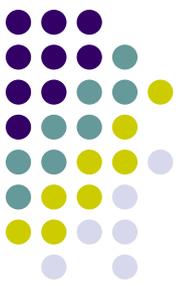


(4) Операция, выражаемая связками “если ..., то”, “из ... следует”, “... влечет ...”, называется импликацией (лат. *implicatio* — тесно связаны) и обозначается знаком \square .

Высказывание $A \square B$ ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B — ложно.

Например, даны 2 высказывания: “данный четырёхугольник — квадрат” (A) и “около данного четырёхугольника можно описать окружность” (B).

Рассмотрим составное высказывание $A \square B$, понимаемое как “если данный четырёхугольник квадрат, то около него можно описать окружность”. Есть три варианта, когда высказывание $A \square B$ истинно:



- **A** истинно и **B** истинно, то есть данный четырёхугольник квадрат, и около него можно описать окружность;
- **A** ложно и **B** истинно, то есть данный четырёхугольник не является квадратом, но около него можно описать окружность (разумеется, это справедливо не для всякого четырёхугольника);
- **A** ложно и **B** ложно, то есть данный четырёхугольник не является квадратом, и около него нельзя описать окружность.

Ложен только один вариант: A истинно и B ложно, то есть данный четырёхугольник является квадратом, но около него нельзя описать окружность.



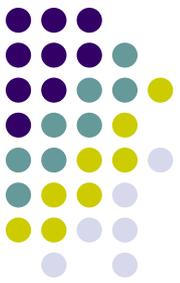
(5) Операция, выражаемая связками “*тогда и только тогда*”, “*необходимо и достаточно*”, “*... равносильно ...*”, называется эквиваленцией или *двойной импликацией* и обозначается знаком \square или \sim .

Высказывание $A \square B$ истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают.

Существуют и другие логические операции:



- Операция, выражаемая связками **“если ..., то”**, **“из ... следует”**, **“... влечет ...”**, называется импликацией.
- Операция, выражаемая связками **“тогда и только тогда”**, **“необходимо и достаточно”**, **“... равносильно ...”**, называется эквиваленцией или двойной импликацией.
- Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание.
- Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию.

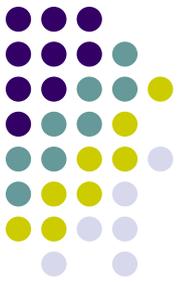


Любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой.

Формулы, принимающие значение “истина” при любых значениях истинности входящих в них переменных называются *тождественно истинными формулами или тавтологиями*.

Формулы, принимающие значение “ложно” при любых значениях истинности входящих в них переменных, называются *тождественно ложными формулами или противоречиями*.

Две формулы при одинаковых наборах значений входящих в них переменных, принимающие одинаковые значения, называются *равносильными*.



Логический элемент компьютера — это часть электронной логической схемы, которая реализует элементарную логическую функцию.

Таблица истинности это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

Схема И

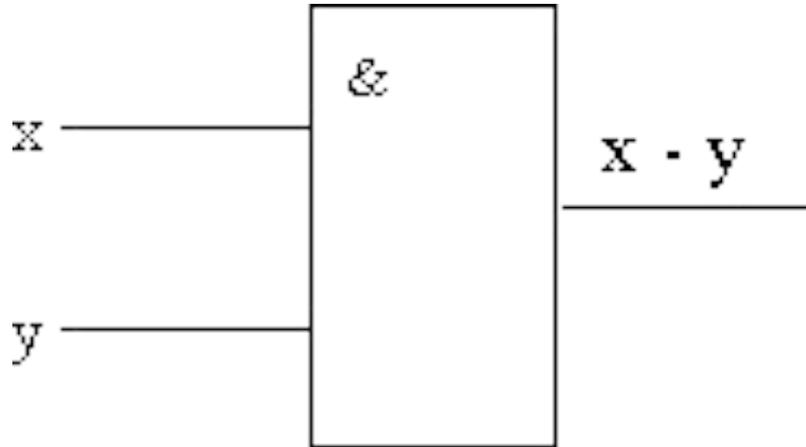


Схема И реализует конъюнкцию двух или более логических значений.

Единица на выходе схемы И будет тогда и только тогда, когда на всех входах будут единицы. Когда хотя бы на одном входе будет ноль, на выходе также будет ноль.

Таблица истинности



x	y	x·y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

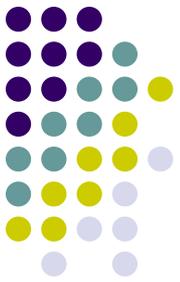
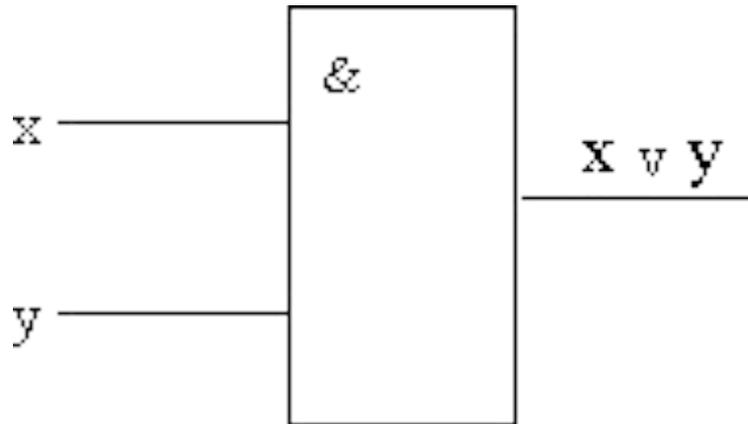


Схема ИЛИ



Когда хотя бы на одном входе схемы ИЛИ будет единица, на её выходе также будет единица.

Схема ИЛИ реализует дизъюнкцию двух или более логических значений.

Таблица истинности



x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

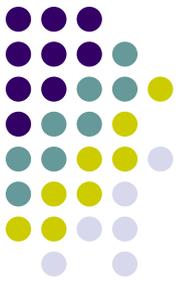
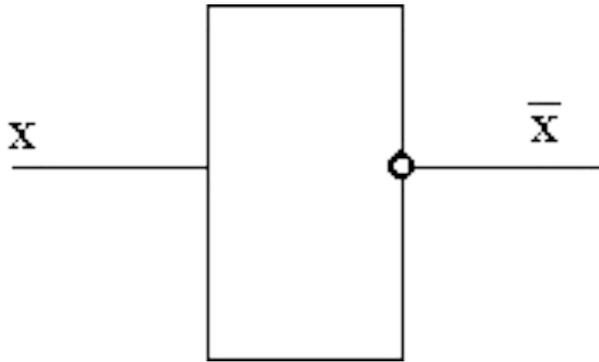


Схема НЕ



Если на входе схемы 0, то на выходе 1. Когда на входе 1, на выходе 0.

Схема НЕ (инвертор) реализует операцию отрицания.

Таблица истинности



x	\bar{x}
0	1
1	0

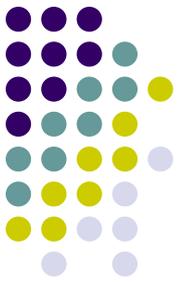


Схема И-НЕ

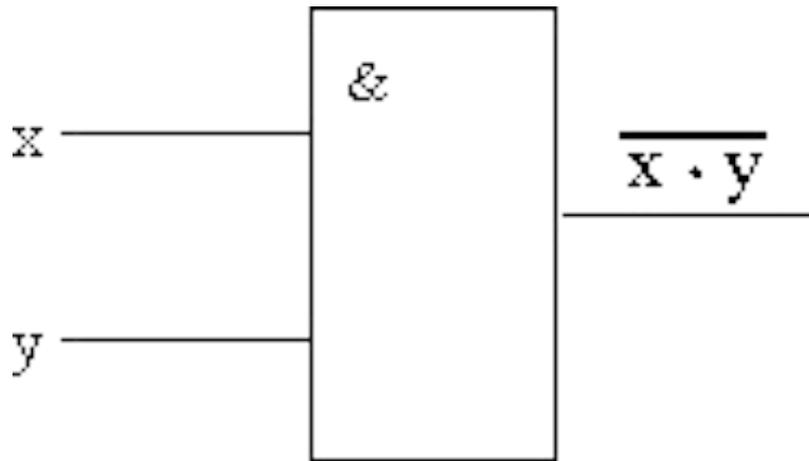
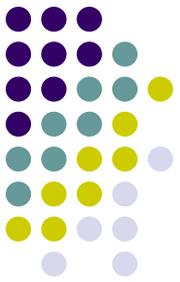


Схема И-НЕ состоит из элемента И и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы И.

Таблица истинности



x	y	$\overline{x \cdot y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

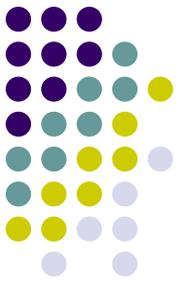


Схема ИЛИ - НЕ

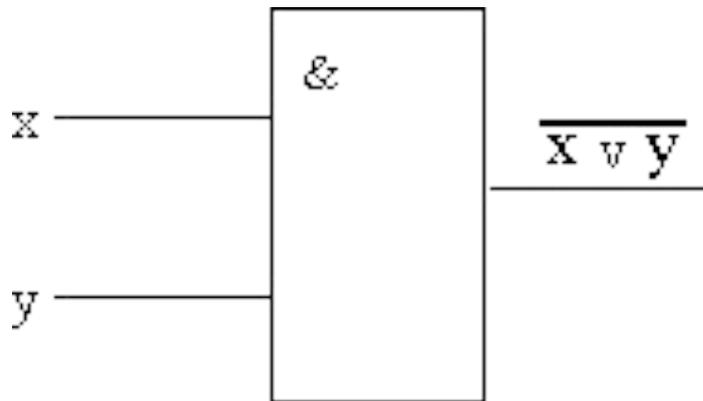


Схема ИЛИ-НЕ состоит из элемента ИЛИ и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы ИЛИ.

Таблица истинности



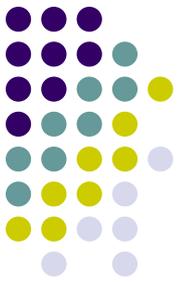
x	y	$\overline{x \vee y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Преобразование выражений, состоящих из булевых функций



- от перестановки мест аргументов результат не изменяется
 $A \& B = B \& A$
- существует следующий закон
 $A \& (B \& C) = (A \& B) \& C$
- Также существуют некоторые тождества, опирающиеся на особые свойства функции, например:
 - 1) $A \& (\sim A) = \text{ЛОЖЬ}$
 - 2) $(\sim A) \& (\sim B) = \sim (A \vee B)$Аналогично, сложение и логическое «ИЛИ»:
- от перестановки мест аргументов результат не изменяется
 $A \vee B = B \vee A$
- существует следующий закон
 $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
- можно выносить общий множитель за скобки
 $(A \& B) \vee (C \& B) = B \& (A \vee C)$
И также некоторые собственные законы:
 - 1) $A \vee (\sim A) = \text{ИСТИНА}$
 - 2) $(\sim A) \vee (\sim B) = \sim (A \& B)$

Самостоятельная работа №8



- Что такое алгебра логики?
- Перечислите основные логические операции?
- Что такое логический элемент компьютера?