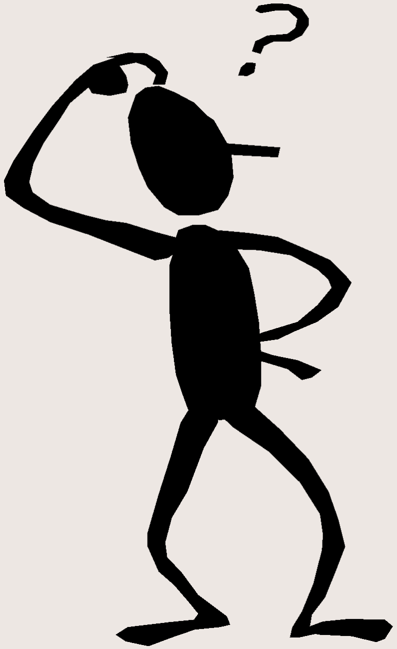
Алгебра логики



Логика

Логика – это наука о формах и законах человеческой мысли, о законах доказательных рассуждений, изучающая методы доказательств и опровержений, т. е. методы установления истинности или ложности одних высказываний (утверждений) на основе истинности или ложности других высказываний.

Алгебра логики

- Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания.

Создателем алгебры логики является живший в XIX веке английский математик Джордж Буль, в честь которого эта алгебра названа булевой алгеброй высказываний.

Основные логические связки

Связка	Название	Обозначение	Полученное высказывание	Математическая запись
И	конъюнкция	&, ∧, •	А И В	**А & В, А ∧ В, А • В**
ИЛИ	дизъюнкция	∨, +	А ИЛИ В	**А ∨ В, А + В**
НЕ	отрицание, инверсия	-, ⌉, ~	НЕ А	**- В, ⌉А, ~А**
ЕСЛИ … ТО	импликация	→, ⊃	ЕСЛИ А, ТО В	**А → В, А ⊃ В**
ЛИБО … ЛИБО	исключающее или, неравнозначность	⊕, Δ, ≠	ЛИБО А ЛИБО В	**А ⊕ В, А Δ В, А ≠ В**
ЕСЛИ И ТОЛЬКО	эквивалентность, равнозначность	≡, ~	А, ЕСЛИ И ТОЛЬКО ЕСЛИ В	**А ≡ В, А ~ В**

Таблица истинности

Таблица истинности логической формулы выражает соответствие между всевозможными наборами значений переменных и значениями формулы.

Таблица истинности

- Для формулы, которая содержит две переменные, таких наборов значений переменных всего четыре: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1).
- Если формула содержит три переменные, то возможных наборов значений переменных восемь:
- (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1),
- (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1).
- Количество наборов для формулы с четырьмя переменными равно шестнадцати и т.д.

Основные логические операции

- **КОНЪЮНКЦИЯ**

- Соответствует союзу **И**;
- Обозначение **&**;
- В языках программирования **and**;
- Название: **Логическое умножение**.

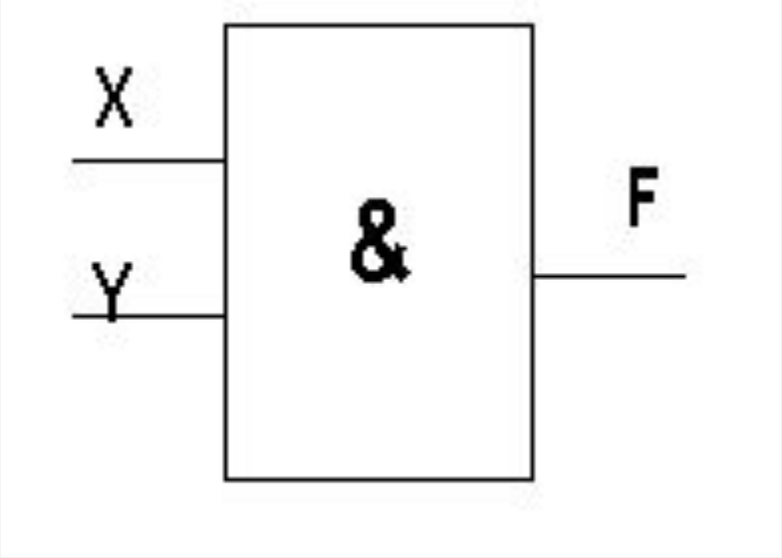


Таблица истинности для И

A	B	F= A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Основные логические операции

ДИЗЪЮНКЦИЯ

Соответствует союзу ИЛИ;

Обозначение V;

В языках программирования or;

Название: Логическое сложение.

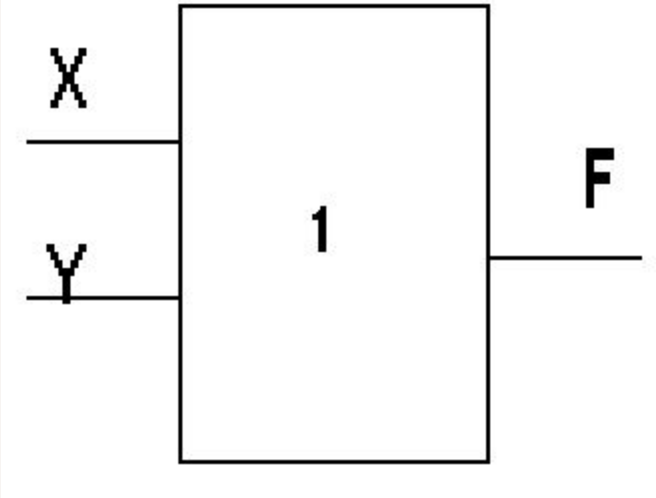


Таблица истинности для ИЛИ

A	B	F= AvB
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Основные логические операции

ИНВЕРСИЯ

Соответствует союзу **НЕ**;

Обозначение $\overline{A}$;

В языках программирования **not**;

Название: **Отрицание**.

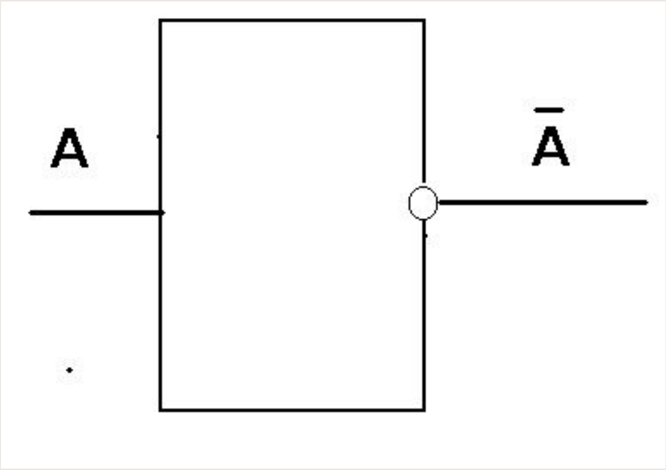


Таблица истинности для НЕ

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Таблица истинности для эквивалентности

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Порядок выполнения логических операций

Порядок выполнения логических операций задается круглыми скобками.

Но для уменьшения числа скобок договорились считать, что сначала выполняется операция отрицания (“не”), затем конъюнкция (“и”), после конъюнкции — дизъюнкция (“или”) и в последнюю очередь — импликация →.

Логическая формула

- *Определение логической формулы:*
- Всякая логическая переменная и символы “истина” (“1”) и “ложь” (“0”) — формулы.
- Если A и B — формулы, то $\overline{A}$, (A • B),

(A v B), (A → B), (A ↔ B) — формулы.

Тавтология

- Некоторые формулы принимают значение “истина” при любых значениях истинности входящих в них переменных. Например, формула A v $\overline{A}$
- Такие формулы называются тождественно истинными формулами или тавтологиями.
- Высказывания, которые формализуются тавтологиями, называются логически истинными высказываниями.

Тождественная истина

$$x \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$$

Переменные		Промежуточные логические формулы					Формула
x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \cdot y$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$x \cdot y \vee \overline{x \vee y}$	$x \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

При всех наборах значений переменных x и y формула принимает значение 1, то есть является тождественно истинной.

Тождественная ложь

В качестве другого примера рассмотрим формулу $A \cdot \bar{A}$, которой соответствует, например, высказывание “Катя самая высокая девочка в классе, и в классе есть девочки выше Кати”. Очевидно, что эта формула ложна, так как либо A, либо $\bar{A}$ обязательно ложно.

Такие формулы называются тождественно ложными формулами или противоречиями.

Высказывания, которые формализуются противоречиями, называются логически ложными высказываниями.

Тождественная ложь

$$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$$

Переменные		Промежуточные логические формулы				Формула
x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{y}$	$x \cdot \overline{y}$	$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

При всех наборах значений переменных x и y формула принимает значение 0, то есть является тождественно ложной.

Выполнимая формула

$$\overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{x} \cdot z$$

Переменные			Промежуточные логические формулы					Формула
x	y	z	$\bar{y}$	$x \vee \bar{y}$	$\overline{x \vee \bar{y}}$	$\bar{x}$	$\bar{x} \cdot z$	$\overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{x} \cdot z$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

Формула в некоторых случаях принимает значение 1, а в некоторых — 0, то есть является выполнимой.

Основные законы алгебры логики

Позволяют производить тождественные преобразования логических выражений:

Закон	Для ИЛИ	Для И
Переместительный	$x \vee y = y \vee x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Сочетательный	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Распределительный	$x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$	$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$
Правила де Моргана	$\overline{x \vee y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$	$\overline{x \cdot y} = \bar{y} \vee \bar{x}$
Идемпотенции	$x \vee x = x$	$x \cdot x = x$
Поглощения	$x \vee (x \cdot y) = x$	$x \cdot (x \vee y) = x$
Склеивания	$(x \cdot y) \vee (\bar{x} \cdot y) = y$	$(x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee y) = y$
Операция переменной с ее инверсией	$x \vee \bar{x} = 1$	$x \cdot \bar{x} = 0$
Операция с константами	$x \vee 0 = x, x \vee 1 = 1$	$x \cdot 1 = x, x \cdot 0 = 0$
Двойного отрицания	$\bar{\bar{x}} = x$	