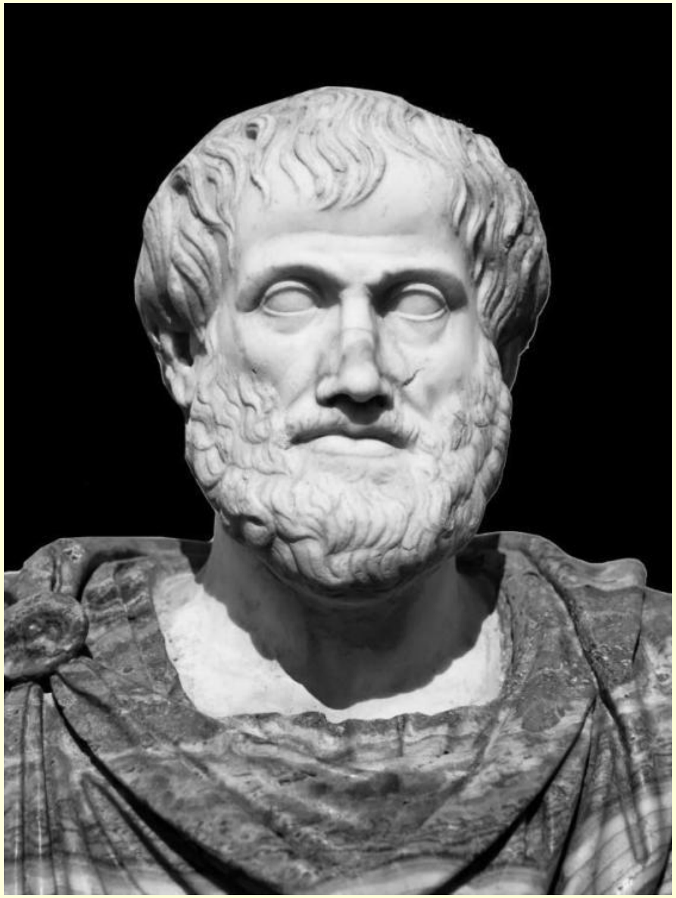
Алгебра высказываний

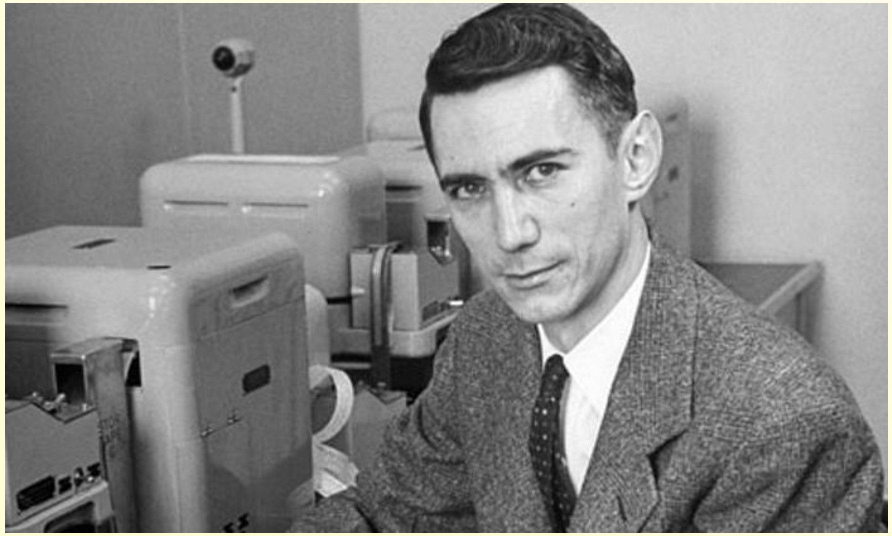
Урок 1

МБОУ СОШ №7 п.Коммаяк
Кировского района
Ставропольского края
Учитель высшей
квалификационной категории
Куликова Татьяна Ивановна



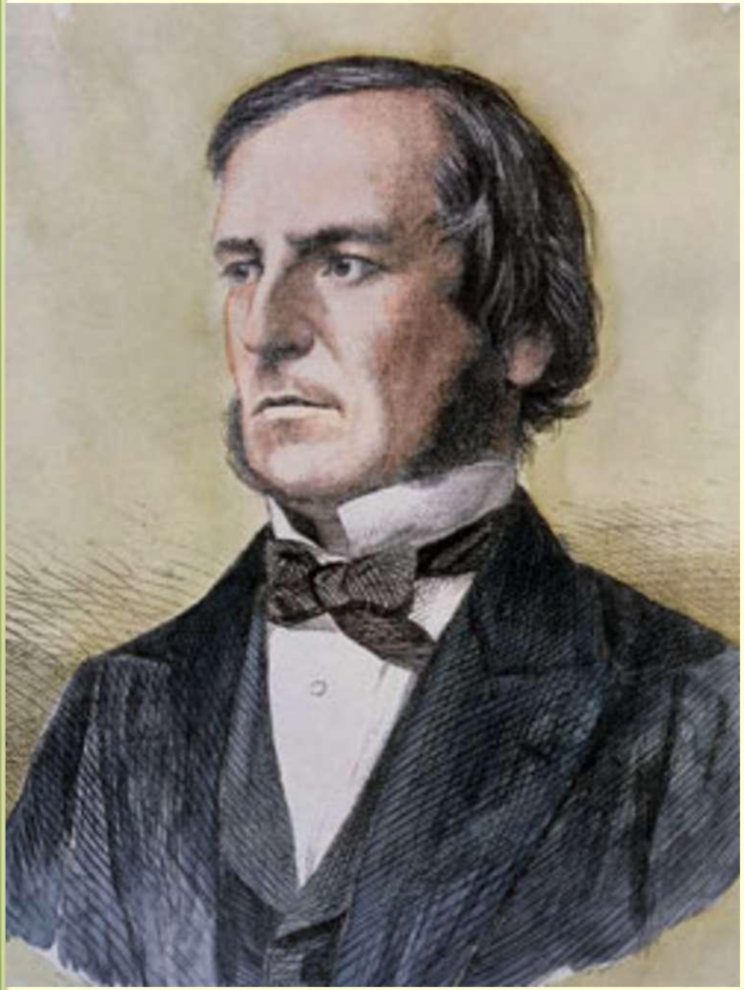
Еще живший в 384 - 322 г.г. до нашей эры древнегреческий ученый и философ Аристотель (Ἀριστοτέλης) пытался найти ответ на вопрос “Как мы рассуждаем”, изучал правила мышления. Он впервые дал систематическое изложение логики, подверг анализу человеческое мышление, его формы – понятие, суждение, умозаключение. Так возникла формальная логика.

Немецкий ученый и философ Готфрид - Вильгельм Лейбниц (Gottfried Wilhelm von Leibniz) (1646-1716) начал развивать идею формализации логики, размышляя о ее переводе "из словесного царства, полного неопределенностей, в царство математики, где отношения между объектами или высказываниями определяются совершенно точно". Лейбниц мечтал создать особый язык для выражения мыслей в чистом виде - lingua mentalis, с помощью которого можно было бы математически строго выразить любую мысль. При этом он уделял особое внимание двоичной системе счисления, считая ее основой основ для любого счета.



Claude Elwood Shannon (1916 - 2001).

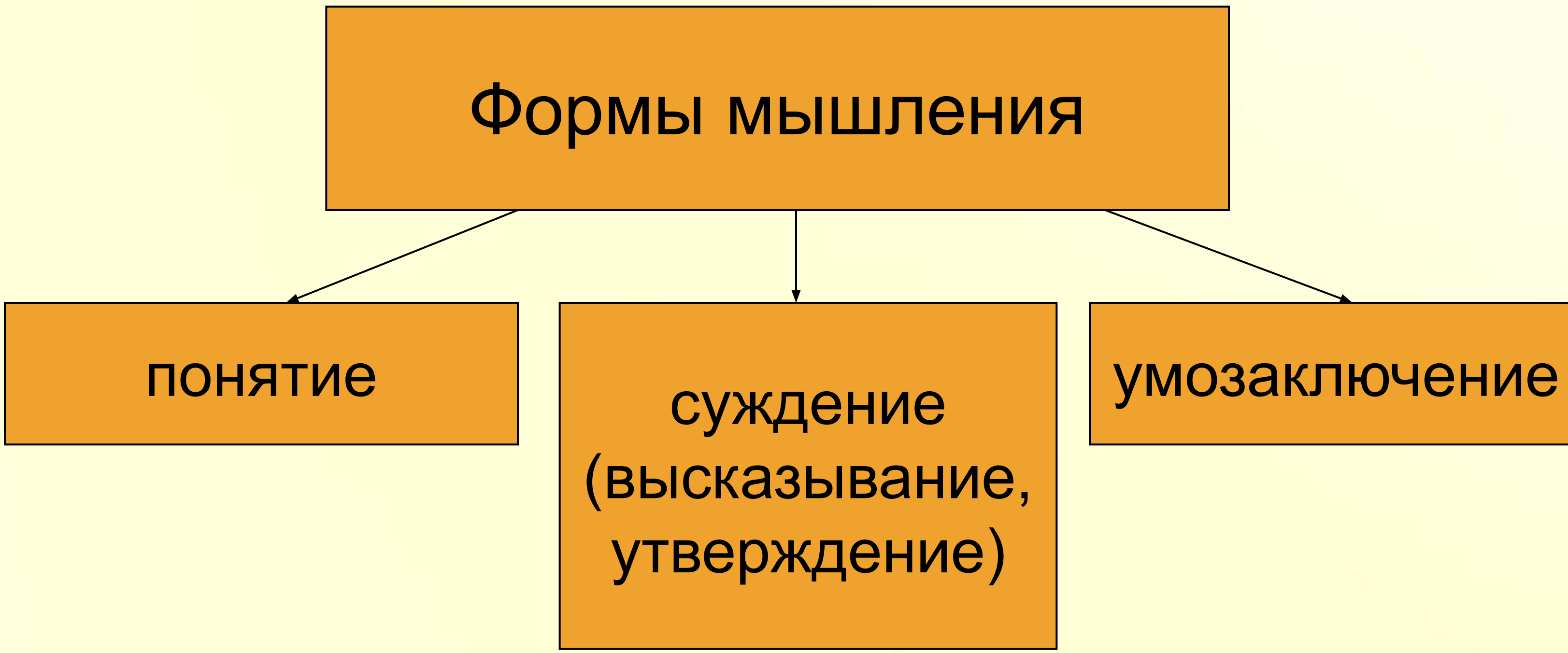
Является основателем теории информации, нашедшей применение в современных высокотехнологических системах связи. Шеннон внес огромный вклад в теорию вероятностных схем, теорию автоматов и теорию систем управления — области наук, входящие в понятие кибернетика.



Буль (Boole) Джордж (1815 — 1864) английский математик и логик. Не имея специального математического образования, в 1849 стал профессором математики в Куинс-колледже в Корке (Ирландия), где преподавал до конца жизни. Д. Буля почти в равной мере интересовали логика, математический анализ, теория вероятностей, этика Б. Спинозы, философские работы Аристотеля и Цицерона.

Алгебра в широком смысле этого слова – наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над различными математическими объектами (алгебра переменных и функций, алгебра векторов, алгебра множеств и т.д.).

Логика – это наука о формах и способах мышления



Понятие - это форма мышления, которая выделяет существенные признаки предмета или класса предметов, отличающие его от других.

Понятие выражается одним или несколькими словами.

Понятие имеет две стороны: содержание и объем.

Например: треугольник, компьютер, персональный компьютер, стол, дом и т.п.

Суждения - это форма мышления, в которой утверждается или отрицается связь между предметом и его признаком, отношения между предметами или факт существования предмета и которая может быть либо истинной, либо ложной. Языковой формой выражения суждения является повествовательное предложение. Вопросительные и побудительные предложения суждениями не являются.

Суждения рассматриваются не с точки зрения их смысла и содержания, а только с точки зрения их истинности или ложности. Истинным будет суждение, в котором связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных объектов. "Дважды два равно четырем" - истинное суждение, а вот "Процессор предназначен для печати" - ложное. Суждения могут быть простыми и сложными. "Весна наступила, и грачи прилетели" - сложное суждение, состоящее из двух простых.

КАКИЕ ИЗ ПРЕДЛОЖЕНИЙ ЯВЛЯЮТСЯ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ? ОПРЕДЕЛИТЕ ИХ ИСТИННОСТЬ

1. Число 6 – чётное.

Да

2. Посмотрите на доску.

Нет

3. Все роботы являются машинами.

Да

КАКИЕ ИЗ ПРЕДЛОЖЕНИЙ ЯВЛЯЮТСЯ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ? ОПРЕДЕЛИТЕ ИХ ИСТИННОСТЬ

4. У каждой лошади есть хвост.

Да

5. Внимание!

Нет

6. Кто отсутствует?

Нет

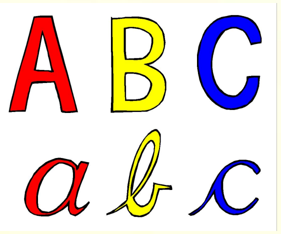
МОУ "Экономическая гимназия"
Никифорова Л.Г,

Умозаключение

Пример 1:заключение на основании двух посылок:

Посылка: все буквы - знаки.

Посылка: «А» - это буква.



Заключение: буква «А» - это знак.

Пример 2:заключение на основании трех посылок:

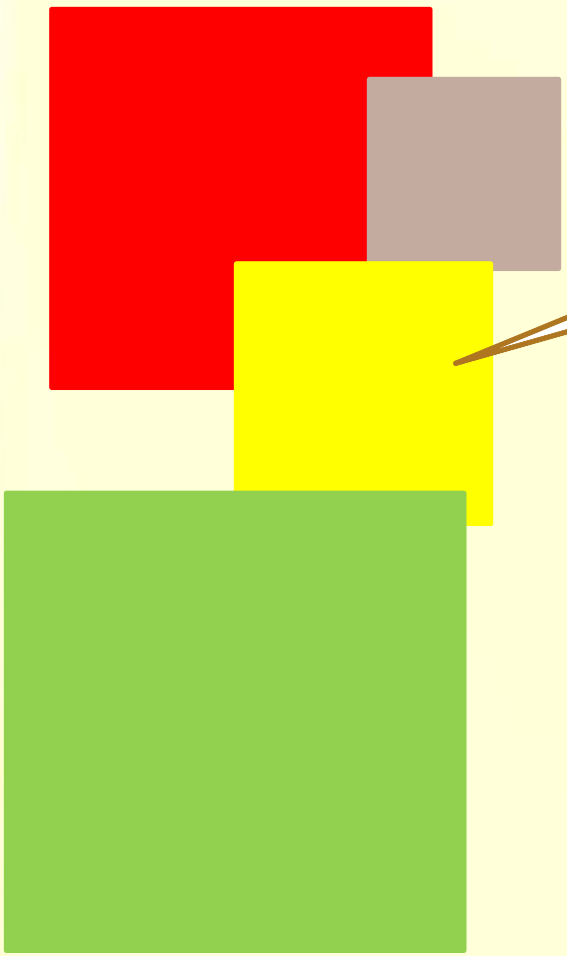
Посылка: Буква – это часть слова.

Посылка: Слово – часть предложения.

Посылка: Предложение – часть текста.

Заключение: буква «А» - это текста.

Умозаключение на основании одной посылки



«Все квадраты – геометрические фигуры»

«Некоторые геометрические фигуры - квадраты»

Объектами алгебры логики являются высказывания.

Алгебру логики интересует только один факт – истинно или ложно данное высказывание, что дает возможность определять истинность или ложность составных высказываний алгебраическими методами.

Простые высказывания в алгебре логики обозначаются заглавными латинскими буквами:

A= {Аристотель – основоположник логики};

B= {На яблонях растут бананы}.

Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному – 0.

Таким образом, A=1, B=0.

Составные высказывания на естественном языке образуются с помощью союзов, которые в алгебре высказываний заменяются на логические операции.

Логические операции задаются таблицами истинности и могут быть проиллюстрированы с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Логическая операция КОНЪЮНКЦИЯ (логическое умножение)

- в естественном языке соответствует союзу **И;**
- в алгебре высказываний обозначение **&**;
- в языках программирования обозначение **And**.

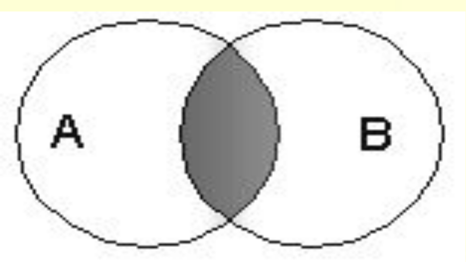
Конъюнкция – это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Таблица истинности

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В АЛГЕБРЕ МНОЖЕСТВ КОНЪЮНКЦИИ СООТВЕТСТВУЕТ ОПЕРАЦИЯ *ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОЖЕСТВ*, Т.Е. МНОЖЕСТВУ ПОЛУЧИВШЕМУСЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ УМНОЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ *А* И *В* СООТВЕТСТВУЕТ МНОЖЕСТВО, СОСТОЯЩЕЕ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ОДНОВРЕМЕННО ДВУМ МНОЖЕСТВАМ.

Диаграмма Эйлера-Венна



Логическая операция ДИЗЪЮНКЦИЯ (логическое сложение)

- в естественном языке соответствует союзу **ИЛИ;**
- в алгебре высказываний обозначение **V**;
- в языках программирования обозначение **Or**.

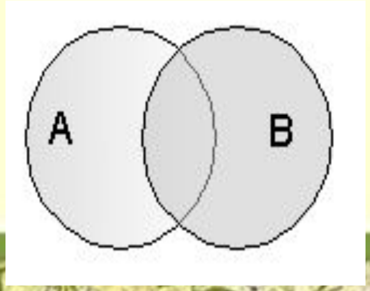
Дизъюнкция – это логическая операция, которая каждым двум простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны и истинным, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно.

Таблица истинности

A	B	AVB
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

В АЛГЕБРЕ МНОЖЕСТВ ДИЗЪЮНКЦИИ СООТВЕТСТВУЕТ ОПЕРАЦИЯ *ОБЪЕДИНЕНИЯ МНОЖЕСТВ*, Т.Е. МНОЖЕСТВУ ПОЛУЧИВШЕМУСЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ СЛОЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ *А* И *В* СООТВЕТСТВУЕТ МНОЖЕСТВО, СОСТОЯЩЕЕ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ЛИБО МНОЖЕСТВУ *А*, ЛИБО МНОЖЕСТВУ *В*.

Диаграмма Эйлера-Венна



Логическая операция ИНВЕРСИЯ (отрицание)

- в естественном языке соответствует словам **неверно, что…** и частице **не;**
- в алгебре высказываний обозначение $\bar{A}$;
- в языках программирования обозначение **Not**.

Отрицание – это логическая операция, которая каждому простому высказыванию ставит в соответствие составное высказывание, заключающееся в том, что исходное высказывание отрицается.

Таблица истинности

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

В АЛГЕБРЕ МНОЖЕСТВ ЛОГИЧЕСКОМУ ОТРИЦАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ОПЕРАЦИЯ *ДОПОЛНЕНИЯ ДО УНИВЕРСАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА*, Т.Е. МНОЖЕСТВУ ПОЛУЧИВШЕМУСЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОТРИЦАНИЯ МНОЖЕСТВА *А* СООТВЕТСТВУЕТ МНОЖЕСТВО , ДОПОЛНЯЮЩЕЕ ЕГО ДО УНИВЕРСАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА.

Диаграмма Эйлера-Венна

Логическая операция ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)

- в естественном языке соответствует обороту **если …, то …;**
- обозначение →.

Импликация – это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (1-ое высказывание) истинно, а следствие (2-ое высказывание) ложно.

Таблица истинности

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Логическая операция ЭКВИВАЛЕНЦИЯ (равнозначность)

- в естественном языке соответствует оборотам речи **тогда и только тогда; в том и только в том случае;**
- обозначение ↔, ~.

Эквиваленция – это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Таблица истинности

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логические операции имеют следующий приоритет:

- действия в скобках;
- инверсия (отрицание);
- &;
- V;
- →;
- ↔.

Алгебра высказываний
Урок 2

Повторение по теме «Дизъюнкция, конъюнкция, отрицание»

1. Найдите значения логических выражений:
а) (1v 1) v (1 v O);
б) ((1 v O) v 1) v 1;
в) (0 v 1) v (1 v 0);
г) (0 & 1) & 1;
е) ((1 v O) & (1 & l)) & (O v 1);
ж) ((1&O) v (1&O)) v 1;
з) ((1&1) v O) & (O v 1);
и) ((0&0) v0) & (1 v 1).

2. Даны два простых высказывания:
А = {2 • 2 = 4}, В = {2 • 2 = 5}.
Какие из высказываний истинны:
а) А; б) В; в) А&В; г)АvВ ; д) ¬А; е) А ∧ В; ж) А ∧ ¬В?

3. Даны простые высказывания:
А = {Принтер — устройство ввода информации},
В = {Процессор — устройство обработки информации},
С = {Монитор — устройство хранения информации},
D = {Клавиатура — устройство ввода информации}.
Определите истинность высказывания: (А & В) & (С v D).

Повторение по теме

«Импликация и эквивалентность»

1. Даны истинные высказывания: А= «на улице идет снег» и В = «нужно надеть шапку». Составьте высказывания: а) А=>В, б) В=>А, которые будут принимать ложные значения.

2. Даны истинные высказывания А = «Карлсон хочет варенье» и В = «Карлсон летает на свежем воздухе». Составьте истинные высказывания вида А <=> В.

3. Даны простые высказывания:
А = {Принтер — устройство ввода информации},
В = {Процессор — устройство обработки информации},
С = {Монитор — устройство хранения информации},
D = {Клавиатура — устройство ввода информации}.
Определите истинность составных высказываний:
а) (AvB) <=> (C&D); **б)** A↔ B.

4. Даны простые высказывания:
A = {5>3}, B = {2=3} и C = {4<2}.
Определите истинность составных высказываний
а) (A v B) & C => (A & C) v (B & C); **б)** (A & B) v C ↔ (A v C) & (A &B).

ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

Сложные высказывания можно записывать в виде формул. Для этого простые логические высказывания нужно обозначить как логические переменные буквами и связать их с помощью знаков логических операций. Такие формулы называются ***логическими выражениями.*** Например:

$$(A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B})$$

$$\overline{(A \vee B \& C)}$$

Чтобы определить значение логического выражения необходимо подставить значения логических переменных в выражение и выполнить логические операции. Операции в логическом выражении выполняются слева направо с учетом скобок в следующем порядке:

1. инверсия;
2. конъюнкция;
3. дизъюнкция;
4. импликация и эквивалентность.

Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются круглые скобки.

Таблицы истинности

Для каждого составного высказывания (логического выражения) можно построить *таблицу истинности*, которая определяет истинность или ложность логического выражения при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний (логических переменных).

При построении таблиц истинности целесообразно руководствоваться определенной последовательностью действий:

1) записать выражение и определить порядок выполнения операций
2) определить количество строк в таблице истинности. Оно равно количеству возможных комбинаций значений логических переменных, входящих в логическое выражение (определяется по формуле $Q=2^n$, где n - количество входных переменных)
3) определить количество столбцов в таблице истинности (= количество логических переменных + количество логических операций)
4) построить таблицу истинности, обозначить столбцы (имена переменных и обозначения логических операций в порядке их выполнения) и внести в таблицу возможные наборы значений исходных логических переменных.
5) заполнить таблицу истинности, выполняя базовые логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности

Теперь мы можем определить значение логической функции для любого набора значений логических переменных.

Например, построим таблицу истинности для логической функции:

$$F(A,B,C) = \overline{A} \& (B \vee C)$$

Количество входных переменных в заданном выражении равно трем *(A,B,C)*. Значит, количество входных наборов, а значит и строк $Q=2^3=8$. Количество столбцов равно 6 (3 переменные + 3 операции). Столбцы таблицы истинности соответствуют значениям исходных выражений *A,B,C*, промежуточных результатов $\overline{A}$ и (*B* V *C*), а также искомого окончательного значения сложного арифметического выражения

$$\overline{A} \& (B \vee C)$$

$$F(A,B,C) = \overline{A} \& (B \vee C)$$

A	B	C	$\overline{A}$	B V C	$\overline{A} \& (B \vee C)$

$$F(A,B,C) = \bar{A} \,\&\, (B \vee C)$$

A	B	C	$\bar{A}$	B V C	$\bar{A} \,\&\, (B \vee C)$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

A	B	C	$\overline{A}$	B V C	$\overline{A} \& (B \vee C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Задание. Постройте таблицу истинности для данного логического выражения:

$$(A \vee B) \& (\overline{A} \vee B)$$

ТОЖДЕСТВЕННАЯ ИСТИНА

$$x \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$$

Переменные		Промежуточные логические формулы					Формула
x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \cdot y$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$x \cdot y \vee \overline{x \vee y}$	$x \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

При всех наборах значений переменных x и y формула принимает значение 1, то есть является тождественно истинной.

ТОЖДЕСТВЕННАЯ ЛОЖЬ

$$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$$

Переменные		Промежуточные логические формулы				Формула
x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{y}$	$x \cdot \overline{y}$	$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

При всех наборах значений переменных x и y формула принимает значение 0, то есть является тождественно ложной.

ВЫПОЛНИМАЯ ФОРМУЛА

$$\overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{x} \cdot z$$

Переменные			Промежуточные логические формулы					Формула
x	y	z	$\bar{y}$	$x \vee \bar{y}$	$\overline{x \vee \bar{y}}$	$\bar{x}$	$\bar{x} \cdot z$	$\overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{x} \cdot z$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

Формула в некоторых случаях принимает значение 1, а в некоторых — 0, то есть является выполнимой.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

1. Выучить определения, знать обозначения.

2. Даны высказывания:

A = {На улице светит солнце},

B = {На улице дождь},

C = {На улице пасмурная погода},

B = {На улице идет снег}.

Составьте два сложных высказывания, одно из которых в любой ситуации всегда будет ложным, а другое истинным.

2. Построить таблицу истинности следующих выражений:

$$F = A \vee B \,\&\, \overline{A}$$

$$M = \overline{C \vee D} \,\&\, \overline{D}$$

$$A = (S \,\&\, F) \Rightarrow (\overline{S \vee F})$$

$$P = A \,\&\, B \vee \overline{C}$$