Тема 1.5

Основные понятия алгебры логики

Функции алгебры логики (булевы функции)

№	Значения булевых функций в зависимости от значений аргументов x и y					Обозначение функции	Название функции
	x	0	0	1	1		
	y	0	1	0	1		
1	$F_0(x, y)$	0	0	0	0	0	*Константа ноль*
2	$F_1(x, y)$	0	0	0	1	$x \wedge y$	*Конъюнкция, логическое умножение, И, &, AND*
3	$F_2(x, y)$	0	0	1	0	$x \Delta y$	*Запрет по x, отрицание импликации*
4	$F_3(x, y)$	0	0	1	1	x	*Переменная x*
5	$F_4(x, y)$	0	1	0	0	$y \Delta x$	*Запрет по y, отрицание импликации*
6	$F_5(x, y)$	0	1	0	1	y	*Переменная y*

Функции алгебры логики (булевы функции)

7	$F_6(x, y)$	0	1	1	0	$x \oplus y$	***Сумма по модулю 2, логическая неравнозначность, М2, XOR***
8	$F_7(x, y)$	0	1	1	1	$x \vee y$	***Дизъюнкция, логическое сложение, ИЛИ, OR***
9	$F_8(x, y)$	1	0	0	0	$x \downarrow y$	***Стрелка Пирса, отрицание дизъюнкции, ИЛИ-НЕ, NOT OR***
10	$F_9(x, y)$	1	0	0	1	$x \equiv y$	***Эквивалентность***
11	$F_{10}(x, y)$	1	0	1	0	$\overline{y}$	***Отрицание, инверсия y, НЕ, NOT***
12	$F_{11}(x, y)$	1	0	1	1	$y \to x$	***Импликация от y к x***
13	$F_{12}(x, y)$	1	1	0	0	$\overline{x}$	***Отрицание, инверсия x, НЕ, NOT***
14	$F_{13}(x, y)$	1	1	0	1	$x \to y$	***Импликация от x к y***
15	$F_{14}(x, y)$	1	1	1	0	x / y	***Штрих Шеффера, отрицание конъюнкции, И-НЕ, NOT AND***
16	$F_{15}(x, y)$	1	1	1	1	1	***Константа единица***

Основные законы алгебры логики

1) Законы нулевого множества

$$0 \times a = 0$$

$$0 + a = a$$

$$0 \times a \times b \times c \times \ldots \times z = 0$$

2) Законы универсального множества

$$1 \times a = a$$

$$1 + a = 1$$

$$1 + a + b + c + \ldots + z = 1$$

3) Законы идемпотентности (повторения, тавтологии)

$$a \times a \times \ldots \times a = a$$

$$a + a + \ldots + a = a$$

4) Закон двойной инверсии

$$\overline{\overline{a}} = a$$

Основные законы алгебры логики

5) Законы дополнительности:

- закон логического противоречия $a \times \overline{a} = 0$

- закон исключенного третьего $a + \overline{a} = 1$

6) Коммутативные законы (законы перемещения)

$$a \times b = b \times a$$

$$a + b = b + a$$

7) Ассоциативные законы (законы сочетания)

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = a \times b \times c$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

8) Дистрибутивные законы (законы распределения):

- конъюнкции относительно дизъюнкции

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

- дизъюнкции относительно конъюнкции

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

Основные законы алгебры логики

9) Законы поглощения

$$a \times (a + b) = a \qquad a \times (\overline{a} + b) = a \times b$$

$$a + (a \times b) = a \qquad a + (\overline{a} \times b) = a + b$$

10) Законы склеивания (распространения)

$$(a \times b) + (a \times \overline{b}) = a \qquad (a + b) \times (a + \overline{b}) = a$$

11) Законы де Моргана (законы инверсии):

- для двух переменных

$$\overline{a \times b} = \overline{a} + \overline{b} \qquad \overline{a + b} = \overline{a} \times \overline{b}$$

- в общем виде

$$\overline{f(x, +, \times)} = f(\overline{x}, \times, +) \qquad \overline{(\ , \vee, \wedge)} = (\ \overline{\ }, \wedge, \vee)$$

Формы описания логических функций

1) Словесное

2) В виде таблиц истинности

x_2	x_1	x_0	$y = f(x_2,x_1,x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Формы описания логических функций

3) В виде последовательности десятичных чисел

$$F(x_2,x_1,x_0) = \Sigma(1,2,4,7) = \bigvee(1,2,4,7)$$

$$F(x_2,x_1,x_0) = \Pi(0,3,5,6) = \bigwedge(0,3,5,6)$$

4) В виде алгебраических выражений.

Операция замены аргументов одной функции другими, более простыми функциями называется *суперпозицией функций*

Элементарная конъюнкция

$$F(x,y,z) = x \times y \times \bar{z} = x \wedge y \wedge \bar{z}$$

Элементарная дизъюнкция

$$F(x,y,z) = x + y + \bar{z} = x \vee y \vee \bar{z}$$

Формы описания логических функций

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)

$$F(x,y,z) = x + (x \times y) + (\overline{x} \times \overline{y} \times z) + (x \times \overline{y} \times \overline{z}) =$$

$$= x \vee (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$$

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

$$F(x,y,z) = x \times (x + y) \times (\overline{y} + z) \times (\overline{x} + y + \overline{z}) =$$

$$= x \wedge (x \vee y) \wedge (\overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z})$$

Если в состав логического выражения входят наборы элементарных конъюнкций с одинаковым количеством переменных, связанные дизъюнкцией, то такая форма ФАЛ называется

совершенной дизъюнктивной нормальной формой **(СДНФ)**

Если в состав логического выражения входят наборы элементарных дизъюнкций с одинаковым количеством переменных, связанные конюнкцией, то такая форма ФАЛ называется

совершенной конъюнктивной нормальной формой **(СКНФ)**

Пример построения СДНФ и СКНФ

Значения аргументов			Значения функции	СДНФ	СКНФ
x_2	x_1	x_0	$f(x_2,x_1,x_0)$		
0	0	0	1	$\overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_0}$	
0	0	1	1	$\overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge x_0$	
0	1	0	0		$x_2 \vee \overline{x_1} \vee x_0$
0	1	1	1	$\overline{x_2} \wedge x_1 \wedge x_0$	
1	0	0	0		$\overline{x_2} \vee x_1 \vee x_0$
1	0	1	0		$\overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_0}$
1	1	0	0		$\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_0$
1	1	1	1	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	

Пример построения СДНФ и СКНФ

СДНФ

$$y = F(x_2, x_1, x_0) = (\overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_0}) \vee (\overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge x_0) \vee$$

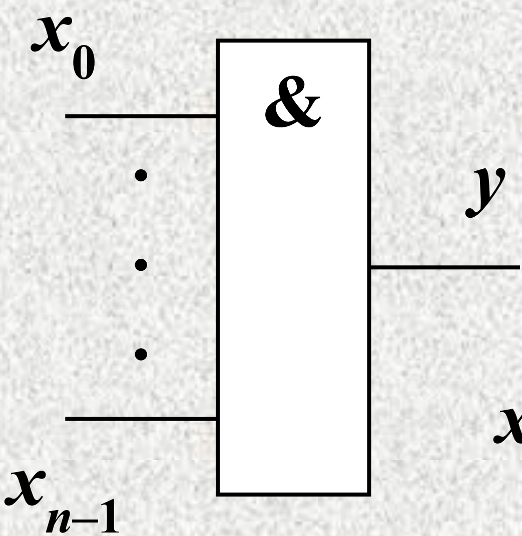
$$\vee (\overline{x_2} \wedge x_1 \wedge x_0) \vee (x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)$$

СКНФ

$$y = F(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee \overline{x_1} \vee x_0) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1 \vee x_0) \wedge$$

$$\wedge (\overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_0}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_0)$$

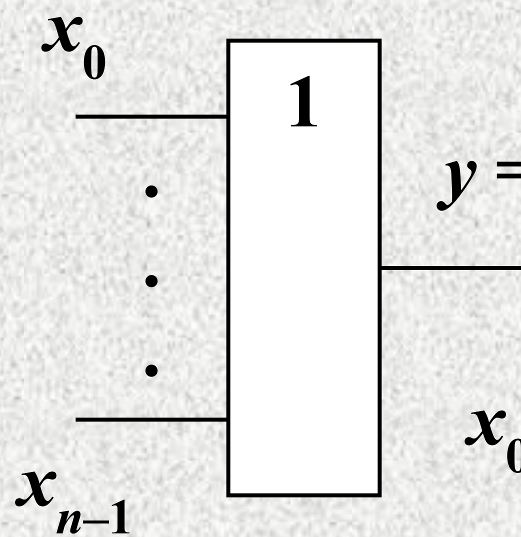
Логические элементы



$y = x_0 \times \ldots \times x_{n-1}$

$y = x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$

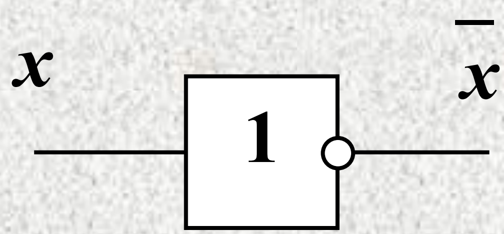
«И»



$y = x_0 + \ldots + x_{n-1}$

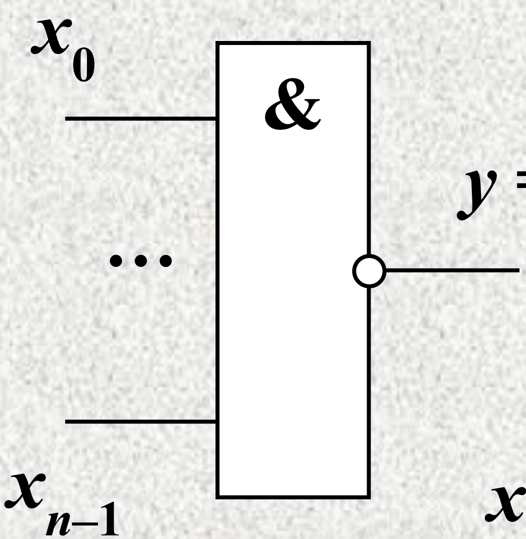
$y = x_0 \vee \ldots \vee x_{n-1}$

«ИЛИ»



«НЕ»

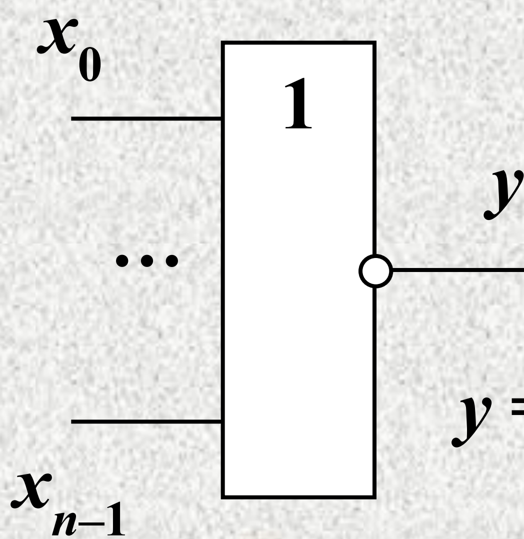
Логические элементы



$$y = \overline{x_0 \times \ldots \times x_{n-1}}$$

$$y = \overline{x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}}$$

«И-НЕ»



$$y = \overline{x_0 + \ldots + x_{n-1}}$$

$$y = \overline{x_0 \vee \ldots \vee x_{n-1}}$$

«ИЛИ-НЕ»

Тема 1.6

Логические основы ЭВМ

Минимизация булевых функций

Метод непосредственных преобразований

$$F(x_2,x_1,x_0)=(\overline{x_1}\wedge x_0)\vee(x_1\wedge\overline{x_0})\vee(x_1\wedge x_0)=$$

$$=\left|\text{по законам склеивания (10)}\quad\boxed{(a\wedge b)\vee(a\wedge\overline{b})=a}\right|=$$

$$=(\overline{x_1}\wedge x_0)\vee\boxed{(x_1\wedge\overline{x_0})\vee(x_1\wedge x_0)}=$$

$$=(\overline{x_1}\wedge x_0)\vee\boxed{(\boxed{x_1}\wedge\overline{x_0})\vee(\boxed{x_1}\wedge x_0)}=$$

$$=(\overline{x_1}\wedge x_0)\vee\boxed{(\boxed{x_1}\wedge\cancel{\overline{x_0}})\vee(\boxed{x_1}\wedge\cancel{x_0})}=$$

$$=(\overline{x_1}\wedge x_0)\vee\boxed{x_1}=\boxed{x_1\vee(\overline{x_1}\wedge x_0)}=$$

$$=\left|\text{по законам поглощения (9)}\quad\boxed{a\vee(\overline{a}\wedge b)=a\vee b}\right|=$$

$$=\boxed{x_1}\vee(\boxed{\overline{x_1}}\wedge x_0)=\boxed{x_1}\vee(\boxed{\cancel{\overline{x_1}}}\wedge x_0)=\boxed{x_1\vee x_0}$$

Минимизация булевых функций

Метод непосредственных преобразований

Для ранее построенной СДНФ

$$F(x_2, x_1, x_0) = \boxed{(\overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_0}) \vee (\overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge x_0) \vee (\overline{x_2} \wedge x_1 \wedge x_0) \vee (x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)} =$$

$$= \left| \text{по законам склеивания (распространения) (10)} \quad \boxed{(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a} \right| =$$

$$= \boxed{(\overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_0}) \vee (\overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \wedge x_0)} \vee \boxed{(\overline{x_2} \wedge x_1 \wedge x_0) \vee (x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)} =$$

$$= \boxed{(\boxed{\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}} \wedge \overline{x_0}) \vee (\boxed{\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}} \wedge x_0)} \vee \boxed{(\overline{x_2} \wedge \boxed{x_1 \wedge x_0}) \vee (x_2 \wedge \boxed{x_1 \wedge x_0})} =$$

$$= \boxed{(\boxed{\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}} \wedge \cancel{\overline{x_0}}) \vee (\boxed{\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}} \wedge \cancel{x_0})} \vee \boxed{(\cancel{\overline{x_2}} \wedge \boxed{x_1 \wedge x_0}) \vee (\cancel{x_2} \wedge \boxed{x_1 \wedge x_0})} =$$

$$= \boxed{\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}} \vee \boxed{\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}} = \boxed{(\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \vee (x_1 \wedge x_0)}$$

$$F(x_2, x_1, x_0) = (\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \vee (x_1 \wedge x_0)$$

Для ранее построенной СКНФ

$$F(x_2, x_1, x_0) = \boxed{(x_2 \vee \overline{x_1} \vee x_0) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1 \vee x_0) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_0}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_0)} =$$

$$= \left| \text{по законам склеивания (распространения) (10)} \quad \boxed{(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a} \right| =$$

$$= \boxed{(x_2 \vee \overline{x_1} \vee x_0)} \wedge \boxed{(\overline{x_2} \vee x_1 \vee x_0) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_0})} \wedge \boxed{(\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_0)} =$$

$$= \boxed{(x_2 \vee \boxed{\overline{x_1} \vee x_0}) \wedge (\overline{x_2} \vee \boxed{\overline{x_1} \vee x_0})} \wedge \boxed{(\boxed{\overline{x_2} \vee x_1} \vee x_0) \wedge (\boxed{\overline{x_2} \vee x_1} \vee \overline{x_0})} =$$

$$= \boxed{(\cancel{x_2} \vee \boxed{\overline{x_1} \vee x_0}) \wedge (\cancel{\overline{x_2}} \vee \boxed{\overline{x_1} \vee x_0})} \wedge \boxed{(\boxed{\overline{x_2} \vee x_1} \vee \cancel{x_0}) \wedge (\boxed{\overline{x_2} \vee x_1} \vee \cancel{\overline{x_0}})} =$$

$$= \boxed{\overline{x_1} \vee x_0} \wedge \boxed{\overline{x_2} \vee x_1} = \boxed{(\overline{x_1} \vee x_0) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1)} = \boxed{(\overline{x_2} \vee x_1) \wedge (\overline{x_1} \vee x_0)}$$

$$F(x_2, x_1, x_0) = (\overline{x_2} \vee x_1) \wedge (\overline{x_1} \vee x_0)$$

Минимизация булевых функций

Метод Карно-Вейча

x_2	x_1	x_0	$y = f(x_2, x_1, x_0)$	x_2	x_1	x_0	$y = f(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1

$\overline{x_0}$

$\overline{x_1}$

		0 0	1 0	1 1	0 1
	0	1	0		1
x_2	1				

Минимизация булевых функций

Метод Карно-Вейча

x_0

x_1

		0 0	1 0	1 1	0 1
	0	1	0	1	1
x_2	1	0	0	1	0

Свойства карты Карно:

- комбинации значений переменных для соседних клеток карты Карно различаются значением только одной входной переменной. При переходе с одной клетки в соседнюю клетку всегда изменяется значение только одной переменной на ее инверсное значение;

- соседними являются между собой крайние левые и крайние правые клетки карты, а также крайние верхние и крайние нижние клетки (как если бы карты были свернуты в цилиндры по вертикали и горизонтали).

- Все *единицы* (при записи функции в *дизъюнктивной* форме) и все *нули* (при записи функции в *конъюнктивной* форме) должны быть замкнуты в прямоугольные контуры.
- Единичные контуры могут содержать несколько единиц, но не должны содержать нулей. Нулевые контуры могут содержать несколько нулей, но не должны содержать единиц.
- Одноименные контуры могут накладываться один на другой, т.е. одна и та же единица (или ноль) может входить в несколько единичных (нулевых) контуров.
- Число клеток в контуре должно быть равно $2i$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, т.е. число клеток в контуре выражается числами 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, …
- Каждой *единичной клетке* отвечает *конъюнкция* входных переменных, которые определяют данную клетку. Каждой *нулевой клетке* отвечает *дизъюнкция инверсий* входных переменных, которые определяют данную клетку.
- Выражения, которые отвечают контурам, не содержат тех переменных, чьи границы пересекаются площадью, ограниченной данным контуром.
- Дизъюнктивная форма ФАЛ составляется в виде дизъюнкций конъюнкций, которые отвечают единичным контурам. Конъюнктивная форма ФАЛ составляется в виде конъюнкций дизъюнкций, которые отвечают нулевым контурам.
- Если каждой клетке отвечает свой контур, то результирующее выражение представляет собой СДНФ или СКНФ данной ФАЛ. Минимальной ДНФ или КНФ отвечает минимальное количество единичных или нулевых контуров.

Минимизация булевых функций

Метод Карно-Вейча

x_2 \ $x_1 x_0$	0 0	1 0	1 1	0 1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0

$\Rightarrow$

y_1 y_2 z_1 z_2

x_2 \ $x_1 x_0$	1 0	1 1	0 1	0 0
0	0	1	1	1
1	0	1	0	0

Минимальная ДНФ:

$$F(x_2, x_1, x_0) = y_1 \vee y_2$$

$$y_1 = \overline{x_2} \wedge \overline{x_1} \qquad y_2 = x_1 \wedge x_0$$

$$F(x_2, x_1, x_0) = (\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \vee (x_1 \wedge x_0)$$

Минимальная КНФ:

$$F(x_2, x_1, x_0) = z_1 \wedge z_2$$

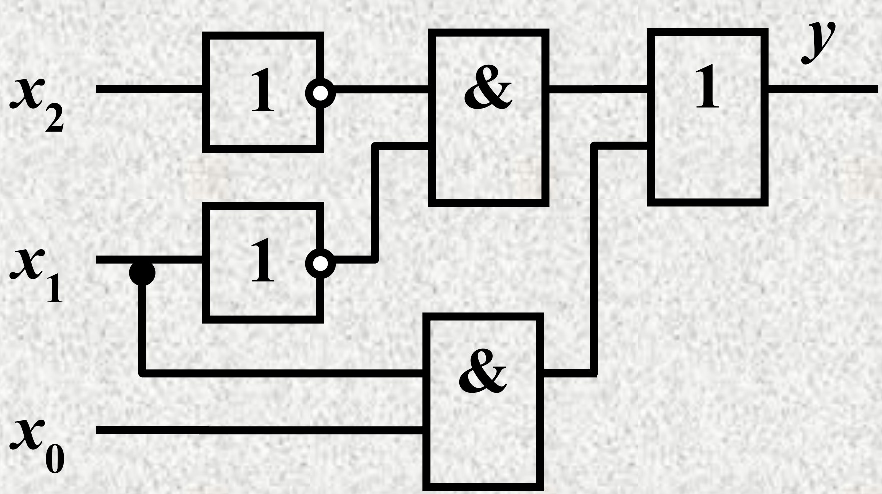
$$z_1 = \overline{x_2} \vee x_1 \qquad z_2 = \overline{x_1} \vee x_0$$

$$F(x_2, x_1, x_0) = (\overline{x_2} \vee x_1) \wedge (\overline{x_1} \vee x_0)$$

Построение логических схем

Минимальная ДНФ:

$$F(x_2, x_1, x_0) = (\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \vee (x_1 \wedge x_0)$$

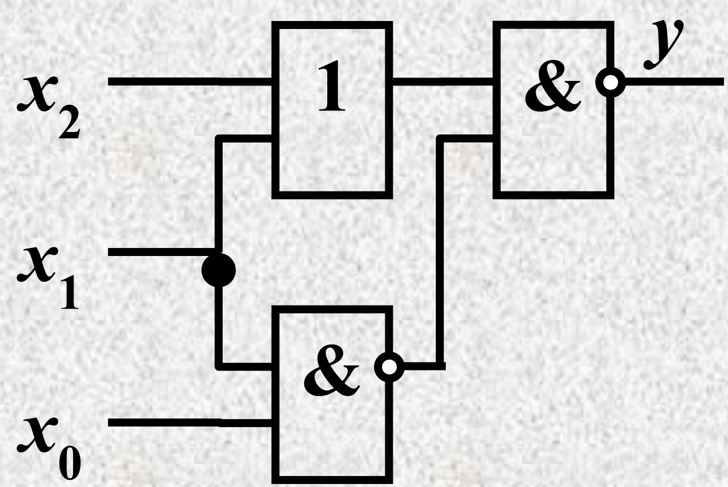


Преобразуем ДНФ:

$$y = \overline{\overline{(\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \vee (x_1 \wedge x_0)}} =$$

$$= \overline{\overline{(\overline{x_2} \wedge \overline{x_1})} \wedge \overline{(x_1 \wedge x_0)}} =$$

$$= \overline{(x_2 \vee x_1) \wedge \overline{(x_1 \wedge x_0)}}$$

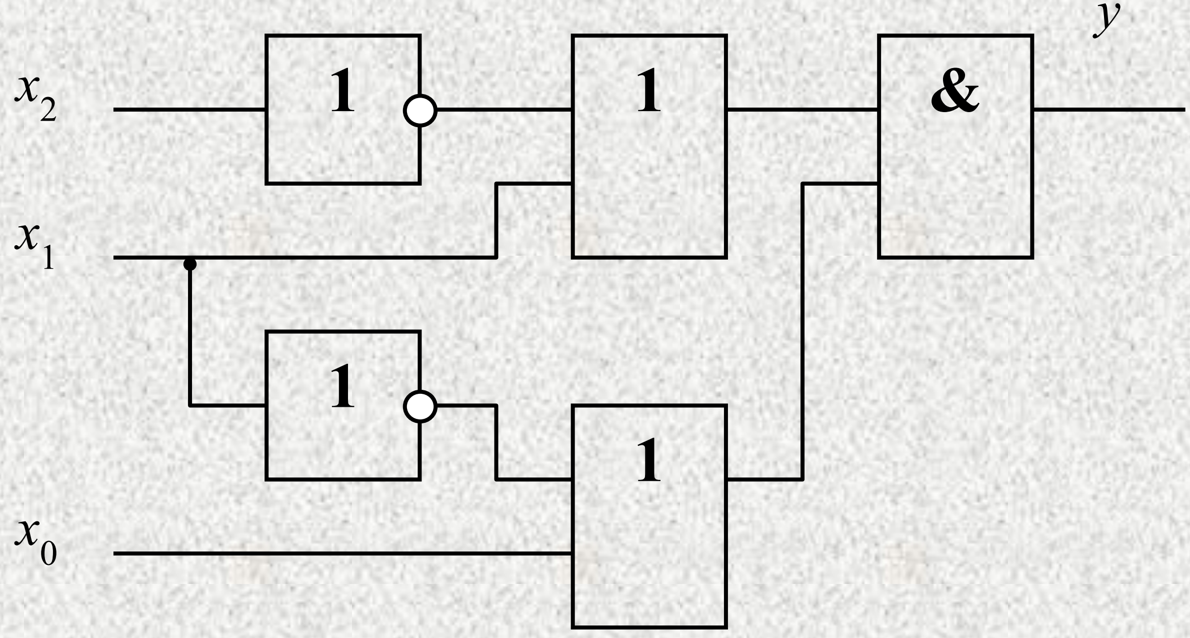


Построение логических схем

Минимальная КНФ:

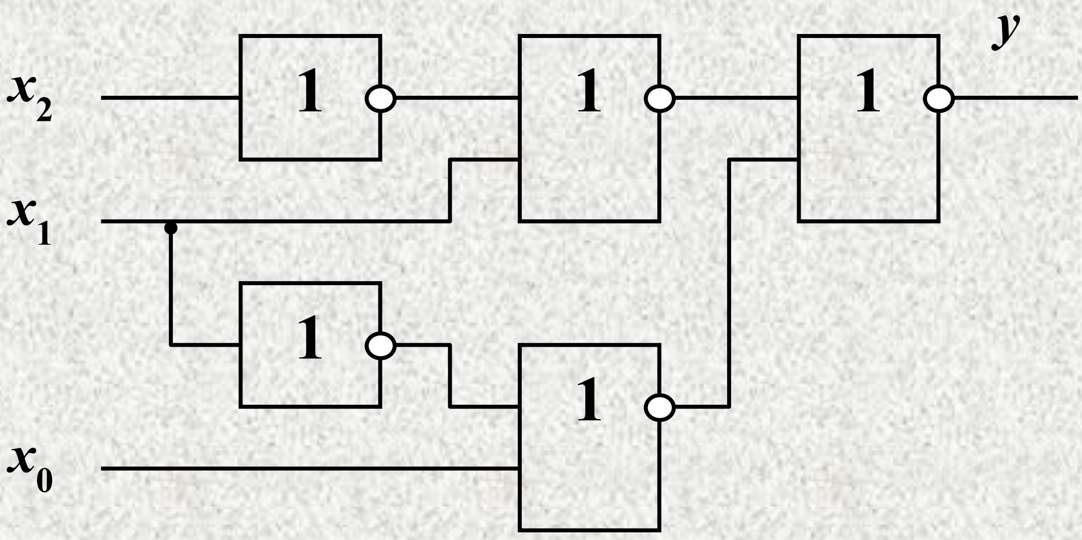
$$y = F(x_2, x_1, x_0) = (\overline{x_2} \vee x_1) \wedge (\overline{x_1} \vee x_0)$$

Цифровая схема реализации



*Применим к **КНФ** двойную инверсию:*

$$y = \overline{\overline{(\overline{x_2} \vee x_1) \wedge (\overline{x_1} \vee x_0)}} = \overline{\overline{(\overline{x_2} \vee x_1)} \vee \overline{(\overline{x_1} \vee x_0)}}$$



Кроме того, применив к последнему выражению для КНФ закон идемпотентности:

$$\overline{x_2} = \overline{x_2 \vee x_2} \qquad \overline{x_1} = \overline{x_1 \vee x_1}$$

можно реализовать КНФ с использованием только одного типа логических элементов.