Алгоритмы на графах

Определение наличия циклов в графе

Югов Иван Олегович
МОУ Гимназия №10, г. Тверь

Домашнее задание

1. Какое максимальное количество рёбер может быть в ориентированном ациклическом графе с n вершинами?
2. Может ли быть так, что правильным результатом топологической сортировки графа оказывается любой порядок его вершин?
3. Решить задачу о производстве деталей с помощью DFS.
4. Как использовать топологическую сортировку для определения наличия циклов в графе?

Циклы и топологическая сортировка

Если граф ациклический, то можно выполнить топологическую сортировку.

Если в графе есть циклы, то топологическая сортировка невозможна.

Как с помощью топологической сортировки определить наличие циклов в графе?

Pascal

```
Cycles := False;
for i := 1 to n do
 for j := 1 to n do
  if A[i, j] and
        (order[j] > order[i]) then
   Cycles := True;
```

C

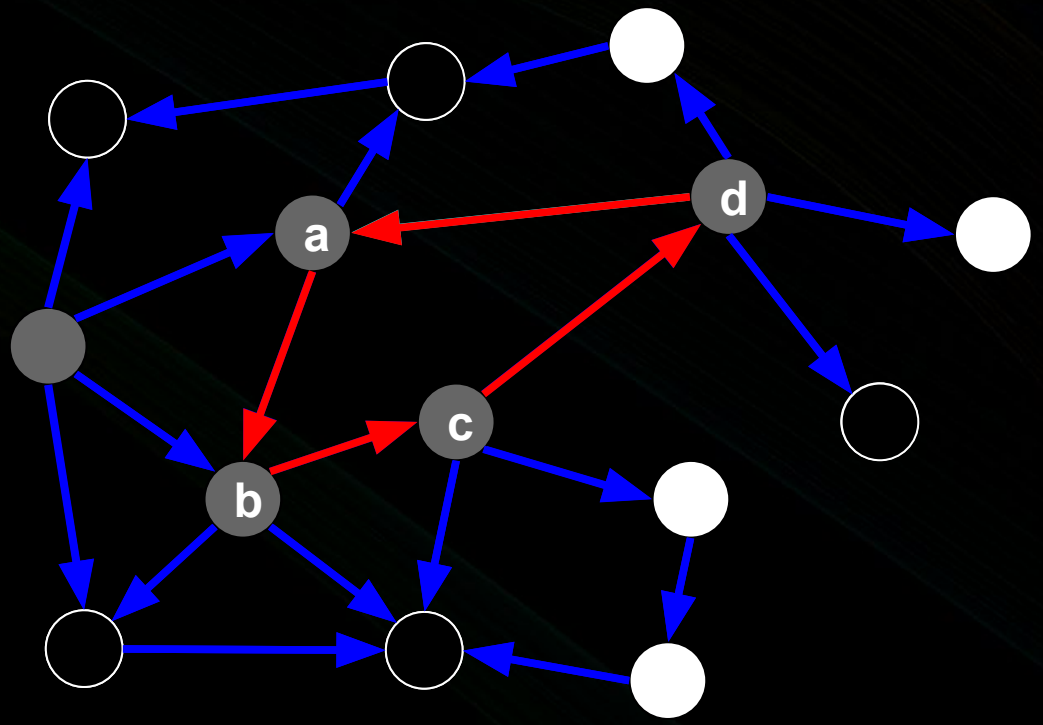
```
Cycles = FALSE;
 for(i = 0; i < n; i++)
  for(j = 0; j < n; j++)
   if(A[i, j] &&
        (order[j] > order[i]))
    Cycles = TRUE;
```

Поиск циклов в графе

Используем DFS для нахождения графа.

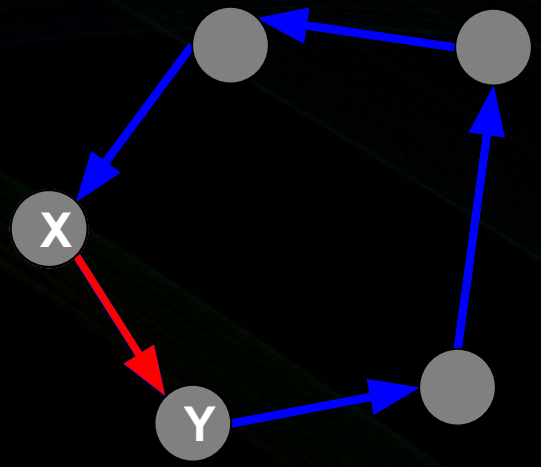
Если из текущей вершины есть путь в серую вершину, то имеем цикл.

Если в графе есть цикл, то почему DFS обязательно его найдёт?



Поиск циклов в графе

Рассмотрим цикл и момент, когда покидаем первую вершину в нём.



Возвращаться будем из вершины *X* в вершину *Y*, поочерёдно окрашивая вершины в цикле в чёрный цвет.

Поиск циклов в графе

Как определить сам цикл?

Сделаем стек. При заходе в вершину помещаем её в стек, при выходе — забираем её оттуда.

- массив stack длины n — стек вершин;
- sp — указатель вершины стека (число элементов в нём).

Pascal

```
sp := 0;

Push(v):
    Inc(sp);
    stack[sp] := v;

Pop:
    Dec(sp);
```

C

```
sp = 0;

Push(v):
    stack[++sp - 1] = v;

Pop:
    sp--;
```

Поиск циклов в графе

Pascal

```
for i := 1 to n do
 color[i] := WHITE;
rm := False; found := False; DFS(1);

DFS(v):
       color[v] := GRAY; Push(v);
       for <u - сосед v> do
        if not Found then
         if color[u] = WHITE then
          DFS(u)
         else
          if color[u] = GRAY then
          begin
           Found := True;
           cc := u; rm := True;
         end;
       if Found then
        <запомнить текущую вершину>;
       color[v] := BLACK; Pop;
```

C

```
for(i = 0; i < n; i++)
 color[i] = WHITE;
rm = Found = FALSE; DFS(0);

DFS(v):
       color[v] = GRAY; Push(v);
       for(<u - сосед v>)
        if(!Found)
         if(color[u] == WHITE)
          DFS(u);
         else
       if(color[u] == GRAY)
          {
           rm = Found = TRUE;
           cc = u;
          };
       if(Found)
        <запомнить текущую вершину>;
       color[v] = BLACK; Pop;
```

Поиск циклов в графе

Как запомнить все вершины, из которых выходим?

Сделаем второй стек. Если цикл найден, то помещаем во второй стек все покидаемые вершины, пока не встретим вершину cc.

- массив stack2 длины n — стек вершин в прямом порядке;
- sp2 — указатель вершины второго стека.

Pascal

```
sp2 := 0;

<запомнить текущую вершину>:
    if rm then
    begin
     rm := rm and (v <> cc);
     Inc(sp2); stack2[sp2] := v;
    end;
```

C

```
sp2 = 0;

<запомнить текущую вершину>:
    if(rm)
    {
     rm &= v != cc;
     stack[++sp - 1] = v;
    };
```

Поиск циклов в графе

В первой строке файла *input.txt* заданы целые n и m — соответственно число вершин и число рёбер ориентированного графа ($1 \le n \le 10\,000$, $0 \le m \le 50\,000$). В следующих m строках файла заданы пары номеров вершин, соединённых рёбрами.

В файл *output.txt* вывести последовательность номеров вершин, соответствующих любому циклу в графе. Если граф ациклический, то вывести 0.

Ограничение по времени — 1 сек.

Ограничение по памяти — 16 Мб.

Домашнее задание

1. Верно ли утверждение, что из всех циклов в графе, проходящих через начальную вершину, DFS прежде всего находит цикл минимальной длины? Привести доказательство или контрпример.
2. Решить задачу об определении наличия циклов в ориентированном графе проверкой рёбер: в выходной файл вывести 1, если в графе есть циклы, и 0 в противном случае.
3. Выполнить п. 2 для неориентированного графа.
4. Решить задачу об отыскании цикла в ориентированном графе с помощью DFS без использования второго стека.