

Алгоритмы на графах

Определение наличия циклов в графе

*Югов Иван Олегович
МОУ Гимназия №10, г. Тверь*

Домашнее задание

1. Какое максимальное количество рёбер может быть в ориентированном ациклическом графе с n вершинами?
2. Может ли быть так, что правильным результатом топологической сортировки графа оказывается любой порядок его вершин?
3. Решить задачу о производстве деталей с помощью DFS.
4. Как использовать топологическую сортировку для определения наличия циклов в графе?

Циклы и топологическая сортировка

Если граф ациклический, то можно выполнить топологическую сортировку.

Если в графе есть циклы, то топологическая сортировка невозможна.

Как с помощью топологической сортировки определить наличие циклов в графе?

Pascal

```
Cycles := False;  
for i := 1 to n do  
  for j := 1 to n do  
    if A[i, j] and  
      (order[j] > order[i]) then  
      Cycles := True;
```

C

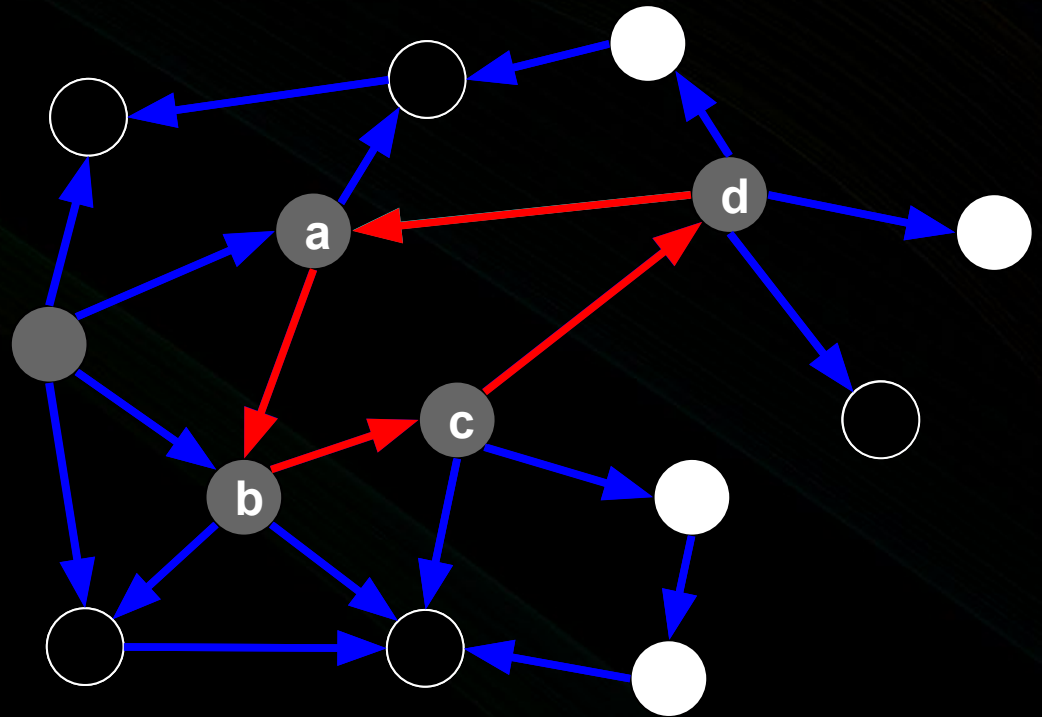
```
Cycles = FALSE;  
for(i = 0; i < n; i++)  
  for(j = 0; j < n; j++)  
    if(A[i, j] &&  
      (order[j] > order[i]))  
      Cycles = TRUE;
```

Поиск циклов в графе

Используем DFS для нахождения графа.

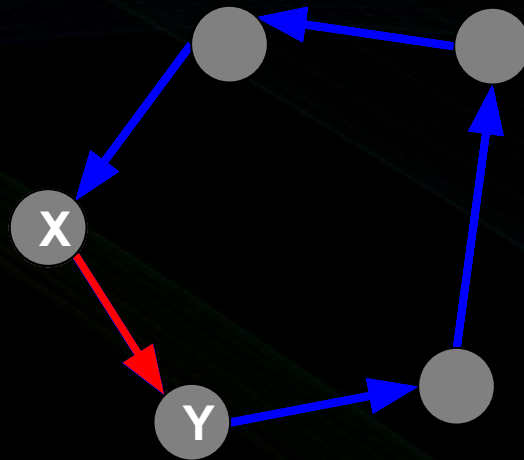
Если из текущей вершины есть путь в серую вершину, то имеем цикл.

Если в графе есть цикл, то почему DFS обязательно его найдёт?



Поиск циклов в графе

Рассмотрим цикл и момент, когда покидаем первую вершину в нём.



Возвращаться будем из вершины X в вершину Y , поочерёдно окрашивая вершины в цикле в чёрный цвет.

Поиск циклов в графе

Как определить сам цикл?

Сделаем стек. При заходе в вершину помещаем её в стек, при выходе — забираем её оттуда.

- массив `stack` длины `n` — стек вершин;
- `sp` — указатель вершины стека (число элементов в нём).

Pascal

```
sp := 0;

Push(v):
  Inc(sp);
  stack[sp] := v;

Pop:
  Dec(sp);
```

C

```
sp = 0;

Push(v):
  stack[++sp - 1] = v;

Pop:
  sp--;
```

Поиск циклов в графе

Pascal

```
for i := 1 to n do
  color[i] := WHITE;
rm := False; found := False; DFS(1);

DFS(v):
  color[v] := GRAY; Push(v);
  for u - сосед v do
    if not Found then
      if color[u] = WHITE then
        DFS(u)
      else
        if color[u] = GRAY then
          begin
            Found := True;
            cc := u; rm := True;
          end;
        if Found then
          <запомнить текущую вершину>;
          color[v] := BLACK; Pop;
```

C

```
for(i = 0; i < n; i++)
  color[i] = WHITE;
rm = Found = FALSE; DFS(0);

DFS(v):
  color[v] = GRAY; Push(v);
  for(u - сосед v)
    if(!Found)
      if(color[u] == WHITE)
        DFS(u);
      else
        if(color[u] == GRAY)
          {
            rm = Found = TRUE;
            cc = u;
          };
    if(Found)
      <запомнить текущую вершину>;
      color[v] = BLACK; Pop;
```

Поиск циклов в графе

Как запомнить все вершины, из которых
выходим?

Сделаем второй стек. Если цикл найден, то помещаем во второй стек все покидаемые вершины, пока не встретим вершину *cc*.

- массив *stack2* длины *n* — стек вершин в прямом порядке;
- *sp2* — указатель вершины второго стека.

Pascal

```
sp2 := 0;
```

<запомнить текущую вершину>:

```
if rm then
```

```
begin
```

```
  rm := rm and (v <> cc);
```

```
  Inc(sp2); stack2[sp2] := v;
```

```
end;
```

C

```
sp2 = 0;
```

<запомнить текущую вершину>:

```
if(rm)
```

```
{
```

```
  rm &= v != cc;
```

```
  stack[++sp - 1] = v;
```

```
};
```


Поиск циклов в графе

В первой строке файла *input.txt* заданы целые n и m — соответственно число вершин и число рёбер ориентированного графа ($1 \leq n \leq 10\,000$, $0 \leq m \leq 50\,000$). В следующих m строках файла заданы пары номеров вершин, соединённых рёбрами.

В файл *output.txt* вывести последовательность номеров вершин, соответствующих любому циклу в графе. Если граф ациклический, то вывести 0.

Ограничение по времени — 1 сек.

Ограничение по памяти — 16 Мб.

Домашнее задание

1. Верно ли утверждение, что из всех циклов в графе, проходящих через начальную вершину, DFS прежде всего находит цикл минимальной длины? Привести доказательство или контрпример.
2. Решить задачу об определении наличия циклов в ориентированном графе проверкой рёбер: в выходной файл вывести 1, если в графе есть циклы, и 0 в противном случае.
3. Выполнить п. 2 для неориентированного графа.
4. Решить задачу об отыскании цикла в ориентированном графе с помощью DFS без использования второго стека.