



# Алгоритмы внутренних точек с приближенным решением вспомогательной задачи

**Филатов А.Ю.**

к.ф.-м.н., ИСЭМ СО РАН, ИГУ (Иркутск)

**Пержабинский С.М.**

ИСЭМ СО РАН (Иркутск)

[http://polnolunie.baikal.ru/me/mat\\_prog.htm](http://polnolunie.baikal.ru/me/mat_prog.htm),

<http://matec.isu.ru>

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ  
(проект 05-01-00587а)



## Исторический экскурс

1939 – линейное программирование (Канторович).

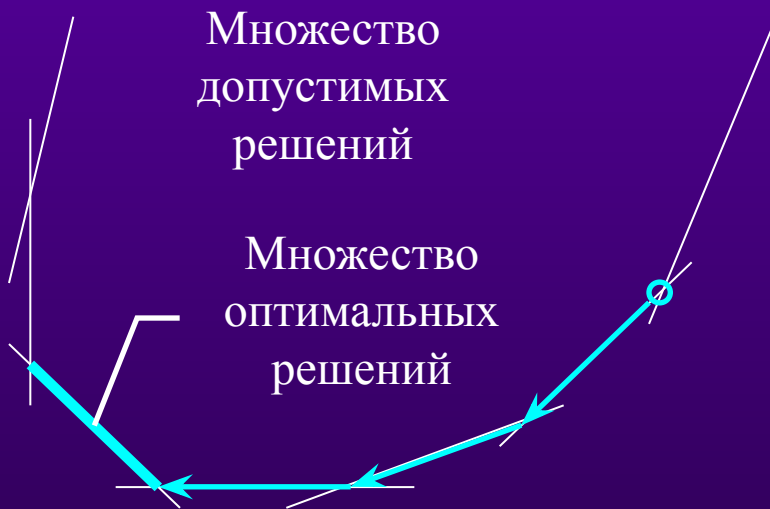
1947 – симплекс-метод (Данциг).

1967 – метод внутренних точек (Дикин).

1984 – полиномиальный МВТ (Кармаркар).

1990-е - 2007 – эффективные программные реализации.

CPlex (<http://maximal-usa.com>), BPMPD (<http://sztaki.hu>), MOSEK (<http://mosek.com>), HOPDM (<http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/software/hopdm.html>)



Траектория симплекс-метода



Траектория методов внутренних точек



## Пара взаимно-двойственных задач линейного программирования

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}, \quad \mathbf{X} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (1)$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{u} \rightarrow \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}}, \quad \mathbf{U} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^m: \mathbf{g}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (2)$$

### Основные классы алгоритмов внутренних точек

- Аффинно-масштабирующие алгоритмы.
- Алгоритмы центрального пути.
- Алгоритмы скошенного пути.
- Комбинированные алгоритмы.
  
- Прямые алгоритмы.
- Двойственные алгоритмы.
- Прямо-двойственные алгоритмы.



## Аффинно-масштабирующие алгоритмы внутренних точек

**Стартовое приближение:**  $\mathbf{x}^1 > \mathbf{0}$

**Итеративный переход:**  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda^k \Delta \mathbf{x}^k$

**Задача поиска направления корректировки:**

$$\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta x_j^2 / d_j^k \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}^k, \quad \mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^k \quad (3)$$

**Шаг корректировки:**

$$\lambda^k = \gamma \min_{j: \Delta x_j^k < 0} \left( -x_j^k / \Delta x_j^k \right) \quad (4)$$

**Способы выбора весовых коэффициентов:**

$$d_j^k = (x_j^k)^2, \quad j = 1, \dots, n; \quad (5)$$

$$d_j^k = \min \left\{ (x_j^k)^p, N \right\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad p \geq 1; \quad (6)$$

$$d_j^k = x_j^k / \max \left\{ \varepsilon, g_j(\mathbf{u}^{k-1}) \right\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \varepsilon > 0. \quad (7)$$



## Алгоритмы центрального пути (имеют полиномиальные оценки)

**Логарифмическая барьерная функция:**

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu \sum_{j=1}^n \ln x_j \rightarrow \min, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (8)$$

**Задача поиска направления корректировки:**

$$\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} - \mu^k \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j}{x_j^k} + \frac{1}{2} \mu^k \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j^2}{(x_j^k)^2} \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A}\Delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (9)$$

## Комбинированные алгоритмы (используют параметризацию)

**Задача поиска направления корректировки:**

$$\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} - \mu \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j}{x_j^k} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j^2}{(x_j^k)^2} \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A}\Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}^k \quad (10)$$



## Решение вспомогательной задачи

### Аффинно-масштабирующие алгоритмы:

$$\mathbf{u}^{k+1} = (\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{c} + \mathbf{r}^k), \quad \mathbf{X}_k = \text{diag}\{x_j^k\} \quad (11)$$

$$\Delta x_j^k = -(x_j^k)^2 g_j(\mathbf{u}^{k+1}) \quad (12)$$

### Алгоритмы центрального пути:

$$\mathbf{u}^{k+1} = (\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{c} - \mu^k\mathbf{b}) \quad (13)$$

$$\Delta x_j^k = x_j^k - \frac{1}{\mu^k} (x_j^k)^2 g_j(\mathbf{u}^{k+1}) \quad (14)$$

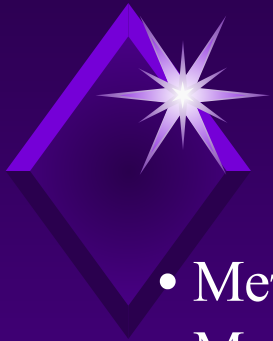
$$\mu^{k+1} = (1 - 0,5/\sqrt{n})\mu^k \quad (15)$$

### Комбинированные алгоритмы:

$$\mathbf{u}^{k+1}(\mu) = (\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{X}_k^2\mathbf{c} + \mathbf{r}^k - \mu\mathbf{b}) \quad (16)$$

$$\Delta x_j^k(\mu) = \mu x_j^k - (x_j^k)^2 g_j(\mathbf{u}^{k+1}(\mu)) \quad (17)$$

$$\lambda^k(\mu) = \gamma \min_{j:\Delta x_j^k(\mu)<0} (-x_j^k/\Delta x_j^k(\mu)) \quad (18)$$



## Методы решения вспомогательной задачи $\mathbf{AD}_k \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{b}}$

- Метод Гаусса.
- Метод Халецкого (метод квадратного корня).
- Метод сопряженных направлений.
- Метод Зейделя.
- Другие приближенные итеративные методы.

### Предпосылки использования приближенных итеративных методов

- На первых итерациях достаточно искать приближенное направление корректировки  $\Delta \mathbf{x}^k$ , используя вектор  $\mathbf{u}^k$ , для которого  $\mathbf{AD}_k \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{b}}^k \neq \mathbf{b}^k$ .
- В финале вычислительного процесса, диагональная матрица  $\mathbf{D}_k$  изменяется по итерациям очень незначительно, имеется хорошее стартовое приближение  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^{k-1}$ .



## Метод сопряженных направлений

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{b}} \Leftrightarrow f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{b}}^T\mathbf{u} \rightarrow \min_{\mathbf{u}}$$

**Итеративный переход:**

$$\mathbf{u}^t = \mathbf{u}^{t-1} + \alpha_t \Delta \mathbf{u}^t$$

**Направление корректировки:**

$$\Delta \mathbf{u}^t = \nabla f(\mathbf{u}^{t-1}) - \beta_t \Delta \mathbf{u}^{t-1} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{t-1} - \tilde{\mathbf{b}} - \beta_t \Delta \mathbf{u}^{t-1}$$

**Шаг, определяющий вариант метода:**

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_t = \frac{(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{t-1} - \tilde{\mathbf{b}})^T \tilde{\mathbf{A}}\Delta \mathbf{u}^{t-1}}{(\Delta \mathbf{u}^{t-1})^T \tilde{\mathbf{A}}\Delta \mathbf{u}^{t-1}}$$

**Шаг корректировки:**

$$f(\mathbf{u}^{t-1} + \alpha \Delta \mathbf{u}^t) \rightarrow \min_{\alpha}, \quad \alpha_t = -\frac{(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{t-1} - \tilde{\mathbf{b}})^T \Delta \mathbf{u}^t}{(\Delta \mathbf{u}^t)^T \tilde{\mathbf{A}}\Delta \mathbf{u}^t}$$





# Экспериментальное исследование

Число итераций, необходимое для решения задач при  $n=1,2t$

Размерность $t$	Число итераций			Среднекв. отклонение
	Минимал.	Максимал.	Среднее	
10	10	10	10	0
30	30	61	39,78	6,98
50	47	71	56,98	5,58
100	71	89	79,06	4,17
300	187	253	219,48	14,04

Число итераций, необходимое для решения задач при  $n=1,5t$

Размерность $t$	Число итераций			Среднекв. отклонение
	Минимал.	Максимал.	Среднее	
10	10	10	10	0
30	24	35	29,04	2,11
50	34	44	39,26	1,93
100	47	58	51,14	1,98
300	55	65	60,54	2,35

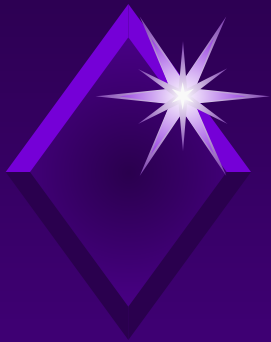


## Параметры управления алгоритмом

- Вариант приближенного метода.
- $\varepsilon$  – параметр в условии останова  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} < \varepsilon$ .
- $\delta$  – параметр в условии перехода с точного на приближенный метод  $\|\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{k-1} - \tilde{\mathbf{b}}\| / \|\tilde{\mathbf{b}}\| < \delta$ .
- $K$  – максимальное число выполняемых подряд итераций приближенного метода.
- $t$  – число внутренних итераций приближенного метода.
- Процедуры корректировки формул (3), (10) и формул вычисления максимального шага на фазе 1.

$$\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta x_j^2 / d_j^k \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}^k / \tilde{\lambda}^k,$$

$\tilde{\lambda}^k$  – прогноз шага корректировки.



*Спасибо  
за внимание!*