

# Раздел 16

## Анализ собственных колебаний методом суперэлементов- подконструкций

# Раздел 16. Анализ собственных колебаний методом суперэлементов-подконструкций

• ЧТО ТАКОЕ СУПЕРЭЛЕМЕНТ?.....	16 - 4
• КАК СУПЕРЭЛЕМЕНТ-ПОДКОНСТРУКЦИЯ ЗАДАЕТСЯ В MSC.Nastran?.....	16 - 5
• ПРИМЕР – ШТАМПОВАННАЯ ДЕТАЛЬ.....	16 - 7
• ВХОДНОЙ ФАЙЛ.....	16 - 9
• ШТАМПОВАННАЯ ДЕТАЛЬ – СУПЕРЭЛЕМЕНТ 1.....	16 - 18
• ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ.....	16 - 19
• ТЕОРИЯ СТАТИЧЕСКОЙ КОНДЕНСАЦИИ.....	16 - 21
• ПРЕИМУЩЕСТВА МЕТОДА СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ.....	16 - 24
• НЕДОСТАТКИ МЕТОДА СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ.....	16 - 26
• РЕШЕНИЕ ОБЫЧНЫМ МЕТОДОМ.....	16 - 27
• АНАЛИЗ МЕТОДОМ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ.....	16 - 30
• СУПЕРПОЗИЦИЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ.....	16 - 37
• МЕТОДЫ РЕДУЦИРОВАНИЯ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.....	16 - 38
• СТЕПЕНИ РЕДУЦИРОВАНИЯ.....	16 - 39
• РЕДУЦИРОВАНИЕ ГАЙАНА (СТАТИЧЕСКОЕ).....	16 - 40
• СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕДУЦИРОВАНИЯ.....	16 - 41
• ПРЕИМУЩЕСТВА МЕТОДОВ РЕДУЦИРОВАНИЯ.....	16 - 42
• АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОЛЬКО СТАТИЧЕСКОГО РЕДУЦИРОВАНИЯ.....	16 - 43
• АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕДУЦИРОВАНИЯ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ.....	16 - 44

# Анализ собственных колебаний методом суперэлементов-подконструкций

ОПЕРАТОР SENQSET.....	16 - 46
ОПЕРАТОР SPOINT.....	16 - 47
ОПЕРАТОР QSET.....	16 - 48
ОПЕРАТОР QSET1.....	16 - 49
АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕДУЦИРОВАНИЯ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ.....	16 - 50
ОПЕРАТОР BSET.....	16 - 51
ОПЕРАТОР BSET1.....	16 - 52
ОПЕРАТОР CSET.....	16 - 53
ОПЕРАТОР CSET1.....	16 - 54
МЕТОД SMS С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ.....	16 - 56
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ.....	16 - 59
ВХОДНОЙ ФАЙЛ ДЛЯ АНАЛИЗА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ (SOL 103).....	16 - 69
РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА УПРУГОЙ МОДЕЛИ МЕТОДОМ SMS.....	16 - 70

# Что такое суперэлемент?

- **Физическое и математическое представления**
  - Физическое - подструктура: конечно-элементная модель части конструкции
  - Математическое – граничные матрицы: нагрузки, масса, демпфирование и жесткость редуцируются со всех внутренних узлов в наружные или граничные узлы
- **Другие типы анализа с использованием подконструкций**
  - Анализ с использованием циклической симметрии
  - Ввод матриц с помощью операторов GENEL и DMIG
- **Предусмотрено два способа описания суперэлементов**
  - Суперэлементы - подконструкции (обсуждаются в данном разделе)
  - Суперэлемент типа Main Bulk Data (см. Приложение D)

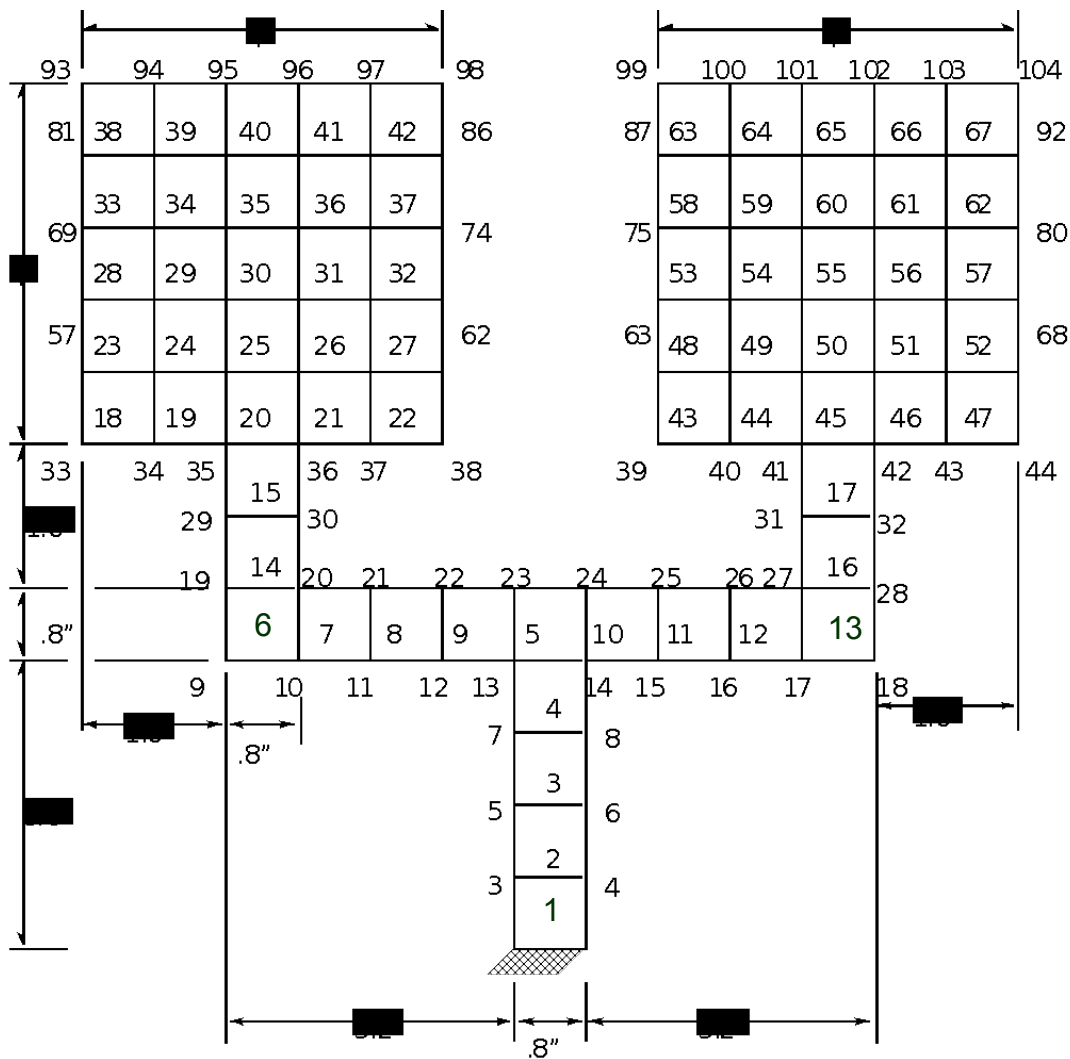
# Как суперэлемент-подконструкция задается в MSC.Nastran?

- Каждый суперэлемент полностью описывается в отдельной полностью самостоятельной секции Bulk Data.
- Суперэлемент этого типа обычно именуется как *часть* в Bulk Data Section.
- Описание каждого суперэлемента начинается с оператора
  - BEGIN [BULK] SUPER=m
- и заканчивается оператором
  - BEGIN [BULK] SUPER=n
- или оператором ENDDATA
- Основная секция Bulk Data Section включает полное описание остаточной структуры и других суперэлементов, не описанных как подконструкции. Эти суперэлементы (*не подконструкции*) могут описываться операторами SESET или SEELT. См. Приложение D для описания оператора SESET.
- По умолчанию, если расстояния между узлами, принадлежащими разным подконструкциям, меньше определенного допуска, соответствующие подконструкции будут соединены с помощью этих узлов.
- Вы можете переопределить величину допуска.

# Как суперэлемент-подконструкция задается в MSC.Nastran?

- Допускается дублирование номеров узлов, элементов, свойств и т.п. в различных подконструкциях.
- Каждая подконструкция может иметь свои нагрузки и свои модальные характеристики.
- Обеспечивается вывод изображения всей модели на графопостроитель.
- Суперэлемент может быть задан как копия (дубль) другого суперэлемента или введен извне.

# Пример – штампованная деталь



# Пример – штампованная деталь

- Узлы 1 и 2 закреплены
- Свойства материала:
- Сталь  $t = 0,05$  дюйма
- $E = 29 \times 10^6$  фунт силы/кв. дюйм
- $\nu = 0,3$
- $\rho = 0,283$  фунт массы/куб. дюйм  
(удельный вес)
- Приложенные нагрузки
  - Давление в 1 фунт силы/кв. дюйм на квадратные “области”
  - Нормальная сила в 2 дюйм силы к узлам 93 и 104
  - Противоположно направленные нормальные силы в 2 фунта силы к узлам 93 и 104



# Входной файл

```
$
$ file - fs1.dat
$
$ all 7 s.e. brought in using begin super
$ duplicate boundary grids id
$ each s.e. contains its own property description with
the same id
$ condensed subcase setup
$
$
-----$
id allsep1 dat
SOL 101
TIME 15
CEND
TITLE = S.E. SAMPLE PROBLEM 1
SUBTITLE = S.E. STATICS - RUN 1 - MULTIPLE LOADS
DISP = ALL
stress = all
oload = all
SET 999 = 0,1,2,3,4,5,6,7
SUPER = 999 $ ALL CASE CONTROL IS FOR ALL SUPERELEMENTS
PARAM,GRDPNT,1
SUBCASE 101
LABEL = PRESSURE LOAD
LOAD = 101
$
SUBCASE 201
LABEL = 2# NORMAL LOADS
LOAD = 201
$
SUBCASE 301
LABEL = OPPOSING LOADS
LOAD = 301
$
```

```
$
include 'plot.blk'
$
BEGIN BULK
$
CQUAD4 5      1      13      14      24      23
$
GRDSET
GRID 13      - .4      3.6      0.
GRID 14      .4      3.6      0.
GRID 23      - .4      4.4      0.
GRID 24      .4      4.4      0.
$
include 'prop1.blk'
$
begin super=1
$
include 'loadse1.blk'
include 'prop1.blk'
include 'se1.blk'
```

# Входной файл

```
$
begin super=2
$
include 'loadse2.blk'
include 'prop1.blk'
include 'se2.blk'
$
begin super=3
$
include 'prop1.blk'
include 'se3.blk'
$
begin super=4
$
include 'prop1.blk'
include 'se4.blk'
$
begin super=5
$
include 'prop1.blk'
include 'se5.blk'
$
begin super=6
$
include 'prop1.blk'
include 'se6.blk'
$
begin super=7
$
include 'prop1.blk'
include 'se7.blk'
$
enddata
```

# Входной файл

```
$
$   plot.blk
$
output (plot)
$
set 1 = all
axes z,x,y
view 0.,0.,0.
seupplot 0
ptitle = full structure
find scale, origin 1, set 1
plot set 1 origin 1 label both
$
$   deform plots
$
seplot 1
ptitle = superelement 1
find scale, origin 1, set 1
plot static deformation set 1 origin 1 label both
$
seplot 2
ptitle = superelement 2
find scale, origin 1, set 1
plot static deformation set 1 origin 1 label both
$
seplot 3
ptitle = superelement 3
find scale, origin 1, set 1
plot static deformation set 1 origin 1 label both
$
seplot 4
ptitle = superelement 4
find scale, origin 1, set 1
plot static deformation set 1 origin 1 label both
$
```

```
seplot 5
ptitle = superelement 5
find scale, origin 1, set 1
plot static deformation set 1 origin 1 label both
$
seplot 6
ptitle = superelement 6
find scale, origin 1, set 1
plot static deformation set 1 origin 1 label both
$
seplot 7
ptitle = superelement 7
find scale, origin 1, set 1
plot static deformation set 1 origin 1 label both
$
$
seplot 0
ptitle = superelement 0
find scale, origin 1, set 1
plot static deformation set 1 origin 1 label both
$
seupplot 0
ptitle = full structure
axes x,mz,y
find scale, origin 1, set 1
plot static deformation set 1 origin 1
$
```

# Входной файл

```

$
$   sel.blk
$
CQUAD4  18      1      33      34      46      45
CQUAD4  19      1      34      35      47      46
CQUAD4  20      1      35      36      48      47
CQUAD4  21      1      36      37      49      48
CQUAD4  22      1      37      38      50      49
CQUAD4  23      1      45      46      58      57
CQUAD4  24      1      46      47      59      58
CQUAD4  25      1      47      48      60      59
CQUAD4  26      1      48      49      61      60
CQUAD4  27      1      49      50      62      61
CQUAD4  28      1      57      58      70      69
CQUAD4  29      1      58      59      71      70
CQUAD4  30      1      59      60      72      71
CQUAD4  31      1      60      61      73      72
CQUAD4  32      1      61      62      74      73
CQUAD4  33      1      69      70      82      81
CQUAD4  34      1      70      71      83      82
CQUAD4  35      1      71      72      84      83
CQUAD4  36      1      72      73      85      84
CQUAD4  37      1      73      74      86      85
CQUAD4  38      1      81      82      94      93
CQUAD4  39      1      82      83      95      94
CQUAD4  40      1      83      84      96      95
CQUAD4  41      1      84      85      97      96
CQUAD4  42      1      85      86      98      97
$
GRDSET
$
6
$   boundary grids
$
GRID     35      -3.6      6.      0.
GRID     36      -2.8      6.      0.
$
GRID     33      -5.2      6.      0.
GRID     34      -4.4      6.      0.
GRID     37      -2.      6.      0.
GRID     38      -1.2      6.      0.
GRID     45      -5.2      6.8     0.
GRID     46      -4.4      6.8     0.
GRID     47      -3.6      6.8     0.
GRID     48      -2.8      6.8     0.
GRID     49      -2.      6.8     0.
GRID     50      -1.2      6.8     0.
GRID     57      -5.2      7.6     0.
GRID     58      -4.4      7.6     0.
GRID     59      -3.6      7.6     0.
GRID     60      -2.8      7.6     0.
GRID     61      -2.      7.6     0.
GRID     62      -1.2      7.6     0.
GRID     69      -5.2      8.4     0.
GRID     70      -4.4      8.4     0.
GRID     71      -3.6      8.4     0.
GRID     72      -2.8      8.4     0.
GRID     73      -2.      8.4     0.
GRID     74      -1.2      8.4     0.
GRID     81      -5.2      9.2     0.
GRID     82      -4.4      9.2     0.
GRID     83      -3.6      9.2     0.
GRID     84      -2.8      9.2     0.
GRID     85      -2.      9.2     0.
GRID     86      -1.2      9.2     0.
GRID     93      -5.2     10.     0.
GRID     94      -4.4     10.     0.
GRID     95      -3.6     10.     0.
GRID     96      -2.8     10.     0.
GRID     97      -2.      10.     0.
GRID     98      -1.2     10.     0.

```

6

**NAS102**

**Декабрь 2001, Стр. 16-12**

**MSC Moscow**

# Входной файл

```

$
$ se2.blk
$
CQUAD4 43 1 39 40 52 51
CQUAD4 44 1 40 41 53 52
CQUAD4 45 1 41 42 54 53
CQUAD4 46 1 42 43 55 54
CQUAD4 47 1 43 44 56 55
CQUAD4 48 1 51 52 64 63
CQUAD4 49 1 52 53 65 64
CQUAD4 50 1 53 54 66 65
CQUAD4 51 1 54 55 67 66
CQUAD4 52 1 55 56 68 67
CQUAD4 53 1 63 64 76 75
CQUAD4 54 1 64 65 77 76
CQUAD4 55 1 65 66 78 77
CQUAD4 56 1 66 67 79 78
CQUAD4 57 1 67 68 80 79
CQUAD4 58 1 75 76 88 87
CQUAD4 59 1 76 77 89 88
CQUAD4 60 1 77 78 90 89
CQUAD4 61 1 78 79 91 90
CQUAD4 62 1 79 80 92 91
CQUAD4 63 1 87 88 100 99
CQUAD4 64 1 88 89 101 100
CQUAD4 65 1 89 90 102 101
CQUAD4 66 1 90 91 103 102
CQUAD4 67 1 91 92 104 103

```

```

$
GRDSET
6
$
$ boundary grids
$
GRID 41 2.8 6. 0.
GRID 42 3.6 6. 0.
$

```

```

$
GRID 39 1.2 6. 0.
GRID 40 2. 6. 0.
GRID 43 4.4 6. 0.
GRID 44 5.2 6. 0.
$
GRID 51 1.2 6.8 0.
GRID 52 2. 6.8 0.
GRID 53 2.8 6.8 0.
GRID 54 3.6 6.8 0.
GRID 55 4.4 6.8 0.
GRID 56 5.2 6.8 0.
GRID 63 1.2 7.6 0.
GRID 64 2. 7.6 0.
GRID 65 2.8 7.6 0.
GRID 66 3.6 7.6 0.
GRID 67 4.4 7.6 0.
GRID 68 5.2 7.6 0.
GRID 75 1.2 8.4 0.
GRID 76 2. 8.4 0.
GRID 77 2.8 8.4 0.
GRID 78 3.6 8.4 0.
GRID 79 4.4 8.4 0.
GRID 80 5.2 8.4 0.
GRID 87 1.2 9.2 0.
GRID 88 2. 9.2 0.
GRID 89 2.8 9.2 0.
GRID 90 3.6 9.2 0.
GRID 91 4.4 9.2 0.
GRID 92 5.2 9.2 0.
GRID 99 1.2 10. 0.
GRID 100 2. 10. 0.
GRID 101 2.8 10. 0.
GRID 102 3.6 10. 0.
GRID 103 4.4 10. 0.
GRID 104 5.2 10. 0.
$

```

**NAS102**

**Декабрь 2001, Стр. 16-13**

**MSC Moscow**

# Входной файл

```
$
$   se3.blk
$
CQUAD4  14      1      19      20      30      29
CQUAD4  15      1      29      30      36      35
$
GRDSET                                     6
$
$   boundary grids
$
GRID    19              -3.6    4.4    0.
GRID    20              -2.8    4.4    0.
GRID    35              -3.6    6.     0.
GRID    36              -2.8    6.     0.
$
GRID    29              -3.6    5.2    0.
GRID    30              -2.8    5.2    0.
$
```

# Входной файл

```
$
$      se4.blk
$
CQUAD4 16      1      27      28
32      31
CQUAD4 17      1      31      32
42      41
$
GRDSET
6
$
$      boundary grids
$
GRID   27      2.8    4.4
0.
GRID   28      3.6    4.4
0.
GRID   41      2.8    6.
0.
GRID   42      3.6    6.
0.
$
GRID   31      2.8    5.2
0.
GRID   32      3.6    5.2
0.
$
```

```
$
$      se5.blk
$
CQUAD4 6      1      9      10      20      19
CQUAD4 7      1      10     11      21      20
CQUAD4 8      1      11     12      22      21
CQUAD4 9      1      12     13      23      22
$
GRDSET
$
$      boundary grids
$
GRID   19      -3.6   4.4    0.
GRID   20      -2.8   4.4    0.
GRID   13      -.4    3.6    0.
GRID   23      -.4    4.4    0.
$
GRID   9      -3.6   3.6    0.
GRID   10     -2.8   3.6    0.
GRID   11     -2.    3.6    0.
GRID   12     -1.2   3.6    0.
GRID   21     -2.    4.4    0.
GRID   22     -1.2   4.4    0.
$
```

6

# Входной файл

```
$
$      se6.blk
$
CQUAD4  10      1      14      15      25      24
CQUAD4  11      1      15      16      26      25
CQUAD4  12      1      16      17      27      26
CQUAD4  13      1      17      18      28      27
$
GRDSET
6
$
$      boundary grids
$
GRID    27      2.8      4.4      0.
GRID    28      3.6      4.4      0.
GRID    14      .4       3.6      0.
GRID    24      .4       4.4      0.
$
GRID    15      1.2      3.6      0.
GRID    16      2.       3.6      0.
GRID    17      2.8      3.6      0.
GRID    18      3.6      3.6      0.
$
GRID    25      1.2      4.4      0.
GRID    26      2.       4.4      0.
$
```

```
$
$      se7.blk
$
CQUAD4  1      1      1      2      4      3
CQUAD4  2      1      3      4      6      5
CQUAD4  3      1      5      6      8      7
CQUAD4  4      1      7      8      14     13
$
GRDSET
6
$
GRID    1      -.4      0.       0.
123456
GRID    2      .4       0.       0.
123456
GRID    3      -.4      0.9      0.
GRID    4      .4       0.9      0.
GRID    5      -.4      1.8      0.
GRID    6      .4       1.8      0.
GRID    7      -.4      2.7      0.
GRID    8      .4       2.7      0.
$
$      boundary grids
$
GRID    13     -.4      3.6      0.
GRID    14     .4       3.6      0.
$
```



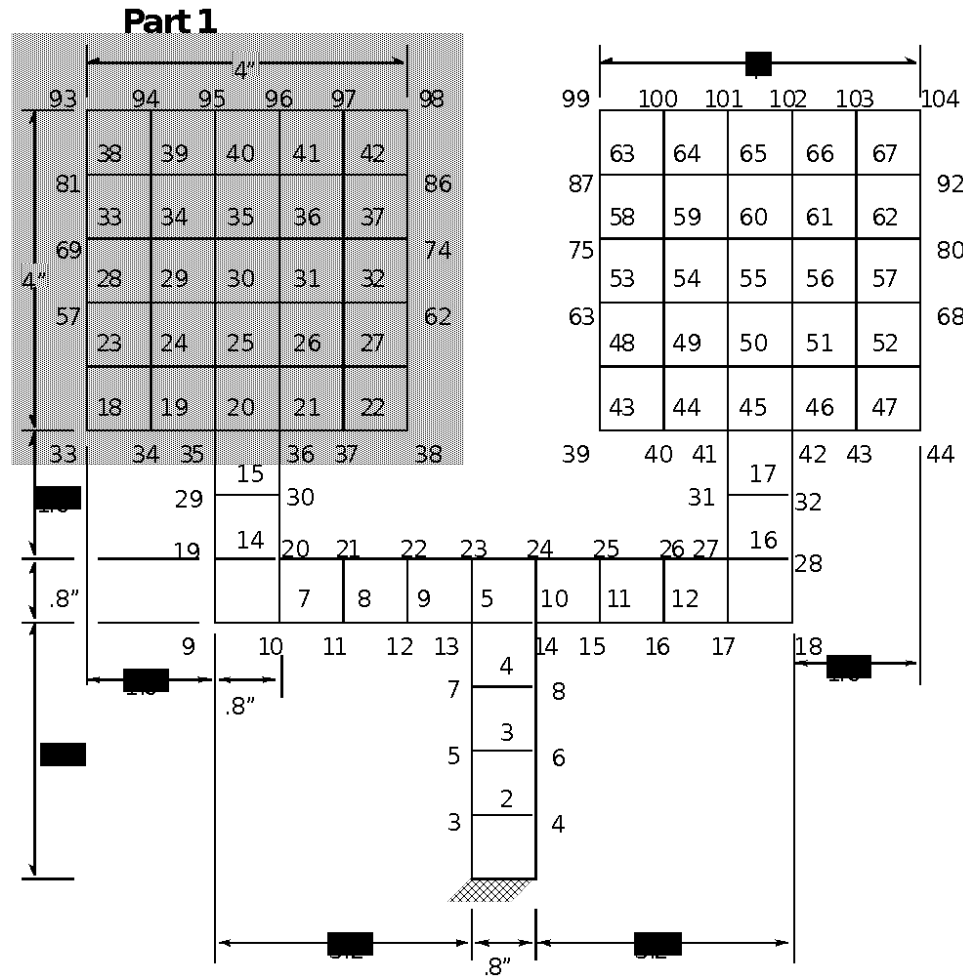
# Входной файл

```
$  
$ prop1.blk  
$  
MAT1,1,30.+6,,.3,.283  
PARAM,WTMASS,.00259  
PARAM,AUTOSPC,YES  
PSHELL,1,1,.05,1,,1  
$
```

```
⌘  
⌘ file - loadse1.blk  
⌘ loads on s.e. 1  
⌘  
⌘ LOAD CASE 1 - PRESSURE LOAD  
⌘  
PLOAD2,101,-1.,18,THRU,42  
⌘  
⌘ LOAD CASE 2 - 2 POINT LOADS AT CORNERS  
⌘  
FORCE,201,93,,2.,0.,0.,1.  
⌘  
⌘ LOAD CASE 3 - OPPOSING POINT LOADS AT  
CORNERS  
⌘  
FORCE,301,93,,2.,0.,0.,1.  
⌘
```

```
⌘  
⌘ file - loadse2.blk  
⌘ loads on s.e. 2  
⌘  
⌘ LOAD CASE 1 - PRESSURE LOAD  
⌘  
PLOAD2,101,-1.,43,THRU,67  
⌘  
⌘ LOAD CASE 2 - 2 POINT LOADS AT  
CORNERS  
⌘  
FORCE,201,104,,2.,0.,0.,1.  
⌘  
⌘ LOAD CASE 3 - OPPOSING POINT LOADS  
AT CORNERS  
⌘  
FORCE,301,104,,2.,0.,0.,-1.  
⌘
```

# Штампованная деталь – суперэлемент 1



# Этапы решения

- **Степени свободы (СС) каждого суперэлемента делятся на два поднабора:**
  - **Внешние СС (называемые A-set): сохраняются для дальнейшей обработки (решения) (для суперэлемента 1 - это узлы 35 и 36)**
  - **Внутренние СС: редуцируются в процессе обработки суперэлемента и не учитываются при дальнейшем решении (для суперэлемента 1 - это узлы 33, 34, 37, 38, 45-50, 57-62, 69-74, 81-86, 93-98).**

# Этапы решения

- Для каждого суперэлемента его поведение описывается матричными уравнениями, содержащими граничные (или внешние) СС.
  - Для каждого суперэлемента вычисляются матрицы размерности  $G$ -set.
  - Эти матрицы редуцируются в матрицы, представляющие свойства суперэлемента “с точки зрения” примыкающей части конструкции.
- На уровне остаточной структуры производится “сборка” всех граничных матриц.
  - Bulk Data Section для остаточной структуры содержит все “остальные” данные для части, не описанной как суперэлемент, и некоторые общие данные.
- Вычисляются перемещения остаточной структуры.
- Для каждого суперэлемента по граничным перемещениям определяются перемещения внутренних узлов.

# Теория статической конденсации

- После построения матриц и учета MPC и SPC,

- $K_{ff} U_f = P_f$

- O-Set - внутренние узлы (редуцируются)
- A-Set - внешние (или граничные) узлы (сохраняются)

- Разделение СС

- $$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oa} \\ K_{oa}^T & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_o \\ U_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_o \\ P_a \end{Bmatrix}$$

# Теория статической конденсации

- Верхнее уравнение умножается слева на  $K_{oo}^{-1}$

$$K_{oo}^{-1} [K_{oo} U_o + K_{oa} U_a] = K_{oo}^{-1} P_o$$

- Обозначим  $G_{oa} = -K_{oo}^{-1} K_{oa}$  (граничное преобразование)

- $U_o = K_{oo}^{-1} P_o$  (относительное перемещение)

- тогда  $U_o = U_o + G_{oa} U_a$  (суммарное внутреннее перемещение)

# Теория статической конденсации

- Подставим выражение для  $U_0$  в нижнее уравнение

$$K_{oa}^T [G_{oa} U_a + U_0^0] + \bar{K}_{aa} U_a = \bar{P}_a$$

- тогда  $K_{aa} = K_{oa}^T G_{oa} + \bar{K}_{aa}$  (граничная жесткость)

- и  $P_a = G_{oa}^T P_0 + \bar{P}_a$  (граничные нагрузки)

- Решение для остаточной структуры

$$U_a = K_{aa}^{-1} P_a \quad (\text{граничные перемещения})$$

# Преимущества метода суперэлементов

- Возможность решения задач, превосходящих по своим размерам, возможности Вашей ЭВМ.
- Меньшие затраты процессорного и общего времени (меньшие потери при неудачном решении, т.к. каждый суперэлемент может обрабатываться отдельно).
- Частичное изменение конструкции объекта предполагает только частичное выполнение нового решения.
- Большие возможности управления ресурсами ЭВМ.
- Пошаговый ввод информации
  - Организационные преимущества
  - Использование повторяемости компонентов
- Пошаговый вывод информации
  - Организационные преимущества
  - Улучшение понимания
- Компоненты конструкции могут моделироваться предприятиями - соисполнителями работ.



# Преимущества метода суперэлементов

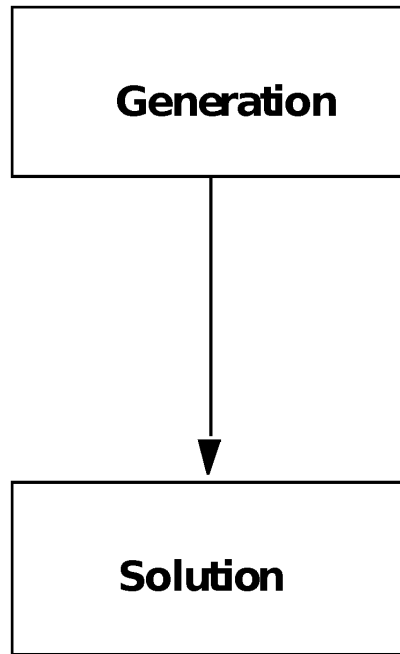
- Многошаговое редуцирование для динамического анализа
- Возможность выполнения глобально-локального анализа
- Возможность проведения исследований вариантов конструкции (“Что, если...”)

# Недостатки метода суперэлементов

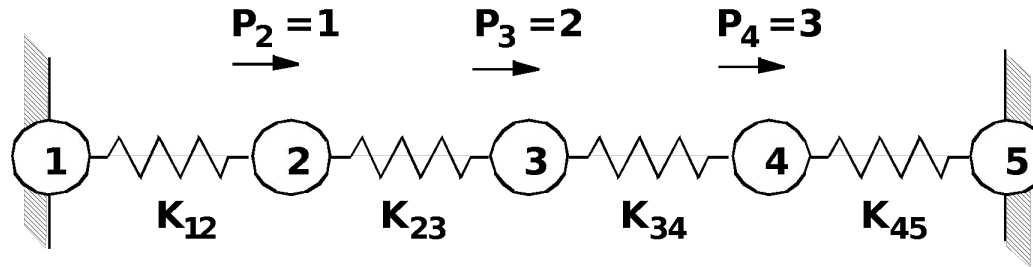
- Увеличение затрат ресурсов ЭВМ в связи с компиляцией модулей DMAP, манипуляциями с базами данных и их увеличением
- Применение статической конденсации при малой величине модели может свести “на нет” получаемую экономию.
- Остаточная структура не перенумеруется и ее матрица жесткости обычно плотно заполненная.
- Все суперэлементы должны быть линейными.
- Для массы и демпфирования аппроксимация при динамическом анализе должна быть выполнена методом статического редуцирования, методом синтеза модальных компонент или методом обобщенного динамического редуцирования.
- Автоматический рестарт возможен только в SOL 101 и последующих.

# Решение обычным методом

- Последовательность



# Решение обычным методом



$K_{xx} = \text{unit stiffness}$

- Генерация матриц

$$[K_{GG}] = \begin{bmatrix} K_{12} & -K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -K_{12} & K_{12} + K_{23} & -K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{23} & K_{23} + K_{34} & -K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{34} & K_{34} + K_{45} & -K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & -K_{45} & K_{45} \end{bmatrix}$$

$$[K_{GG}] = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 2.0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 2.0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

# Решение обычным методом

- Учет закреплений и решение

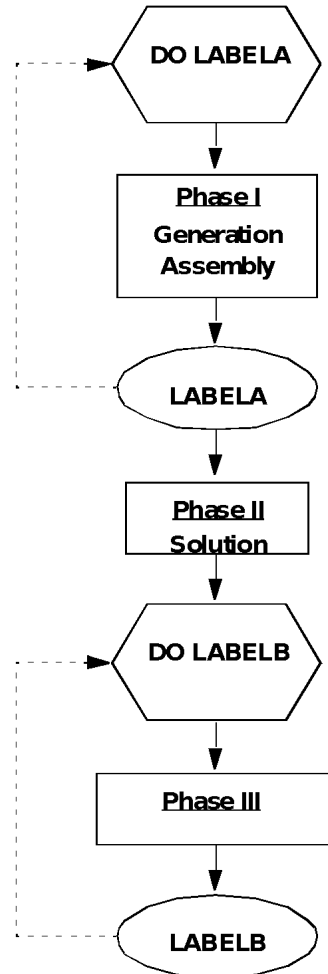
$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{12} + K_{23} & -K_{23} & 0 \\ -K_{23} & K_{23} + K_{34} & -K_{34} \\ 0 & -K_{34} & K_{34} + K_{45} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ 0 & -1.0 & 2.0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \end{Bmatrix}$$

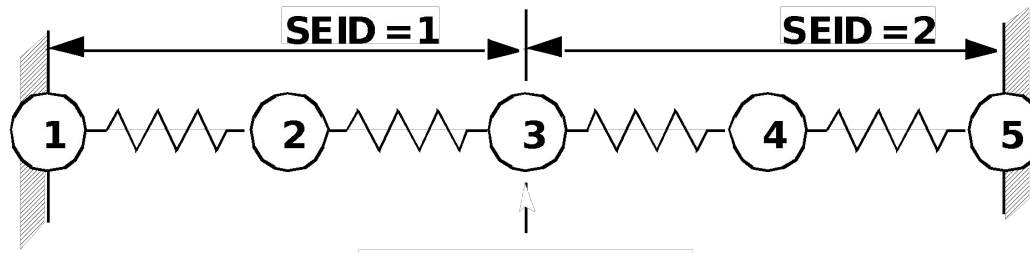
$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.5 \\ 4.0 \\ 3.5 \end{Bmatrix}$$

# Анализ методом суперэлементов

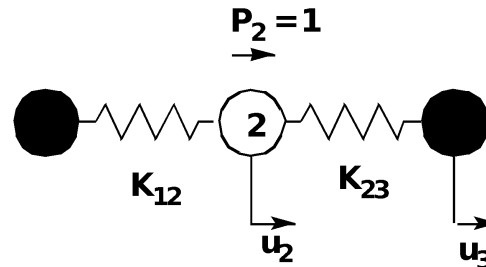
- Последовательность



# Анализ методом суперэлементов



Residual Structure



- Генерация SEID = 1

$$[K_{gg}]^1 = \begin{bmatrix} K_{12} & -K_{12} & 0 \\ -K_{12} & K_{12} + K_{23} & -K_{23} \\ 0 & -K_{23} & K_{23} \end{bmatrix}$$

# Анализ методом суперэлементов

$$\left\{ \mathbf{P}_g \right\}^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ -\mathbf{P}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Редуцирование SEID = 1
- Удаление закреплений:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{gg}]^1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{23} & -\mathbf{K}_{23} \\ -\mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{oo} & \mathbf{K}_{oa} \\ \mathbf{K}_{ao} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Вычисление граничных преобразований:

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}_{oa}]^1 &= -[\mathbf{K}_{oo}]^{-1}[\mathbf{K}_{oa}] \\ &= \frac{\mathbf{K}_{23}}{\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{23}} = 0.5 \end{aligned}$$



# Анализ методом суперэлементов

- Вычисление граничной жесткости:

$$[K_{aa}]^1 = [K_{aa} + K_{oa}^T G_{oa}]$$
$$K_{aa}^1 = \frac{K_{12}K_{23}}{K_{12} + K_{23}} = 0.5$$

- Вычисление граничных нагрузок:

$$\left\{ P_f \right\}^1 = \left\{ \begin{array}{c} P_2 \\ \bar{P}_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{array}{c} P_o \\ \bar{P}_a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ P_a \right\}^1 = \left\{ \bar{P}_a + G_{oa}^T P_o \right\}$$

$$P_3^1 = \bar{P}_3 + \frac{K_{23}}{K_{12} + K_{23}} P_2 = 0.5$$

# Анализ методом суперэлементов

- Аналогично SEID = 2

$$[K_{gg}]^2 = \begin{bmatrix} K_{34} & -K_{34} & 0 \\ -K_{34} & K_{34} + K_{45} & -K_{45} \\ 0 & -K_{45} & K_{45} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \mathbf{P}_g \right\}^2 = \begin{Bmatrix} \bar{P}_3^2 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

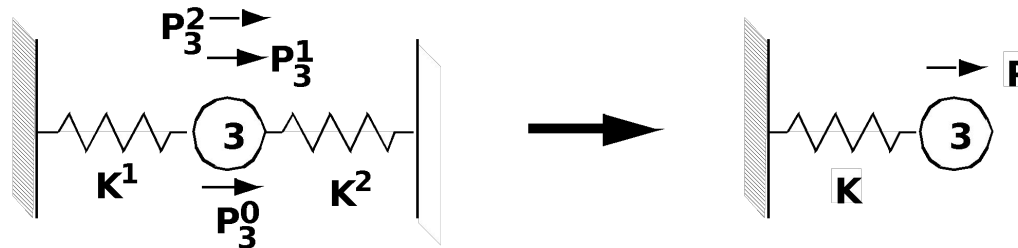
$$[G_{oa}]^2 = \frac{K_{34}}{K_{34} + K_{45}} = 0.5$$

$$[K_{aa}]^2 = \frac{K_{34}K_{45}}{K_{34} + K_{45}} = 0.5$$

$$P_3^2 = \cancel{\bar{P}_3^2}^0 + \frac{K_{34}}{K_{34} + K_{45}} P_2 = 1.5$$

# Анализ методом суперэлементов

- Остаточная структура



- “Сборка”

$$[K_{aa}] = [K_{aa}^1 + K_{aa}^2 + K_{gg}^0]$$

$$K = K^1 + K^2 = 1$$

$$\{P_a\} = \{P_a^1 + P_a^2 + P_g^0\}$$

$$P = P_3^1 + P_3^2 + P_3^0 = 4$$

- Решение

$$\{U_a\} = [K_{aa}]^{-1} \{P_a\}$$

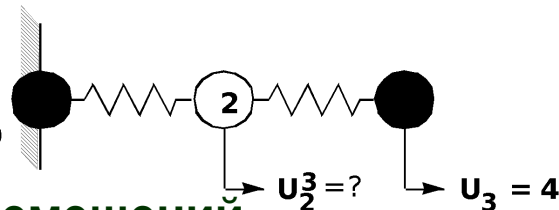
$$U_3^0 = \frac{P}{K} = 4$$

# Анализ методом суперэлементов

- Вычисление результатов для SEID = 1
- Вынужденное граничное перемещение.

$$\{U_o^a\} = [G_{oa}] \{U_a\}$$

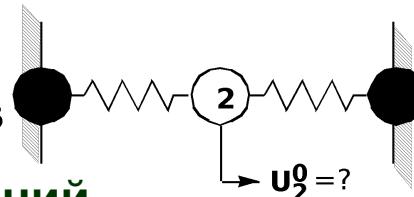
$$U_2^3 = \frac{K_{23}}{K_{12} + K_{23}} U_3 = 2.0$$



- Вычисление относительных перемещений.

$$\{U_o^0\} = [K_{oo}]^{-1} \{P_o\}$$

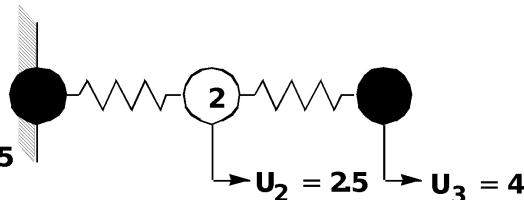
$$U_2^0 = \frac{1}{K_{12} + K_{23}} P_2 = 0.5$$



- Вычисление суммарных перемещений.

$$\{U_o\} = \{U_o^0\} + \{U_o^a\}$$

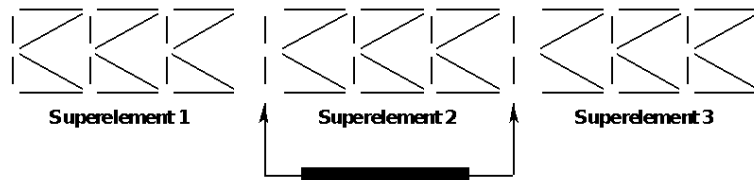
$$U_2 = \frac{K_{23} \times U_3 + P_2}{K_{12} + K_{23}} = 2.5$$



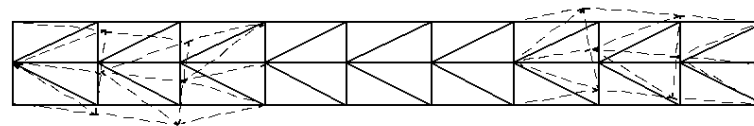
# Суперпозиция парциальных решений



A. Assembled Structure

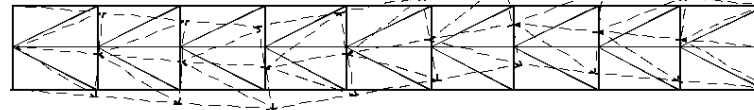


B. Partitioned Structure



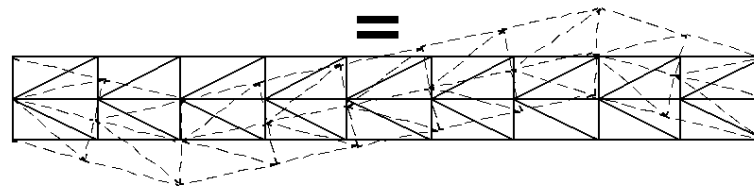
C. Partial Solution Due to External Loads

+



D. Partial Solution Due to Boundary Motion

=



E. Assembled Solution

# Методы редуцирования суперэлементов для динамического анализа

- **Статическое редуцирование**
  - Статическое редуцирование жесткости и редуцирование масс методом Гайана
- **Динамическое редуцирование**
  - Обобщенное динамическое редуцирование (GDR)
  - Синтез модальных компонент (CMS)
    - Аналитическое (SOL 103)

# Степени редуцирования

- **Статическое редуцирование (по умолчанию)**
  - Внутренние массы концентрируются в граничные узлы (редуцирование Гайана)
  - Свойства жестких тел сохраняются
  - Важные массы должны быть объявлены внешними (граничными)
- **Обобщенное динамическое редуцирование – в дополнение к статическому редуцированию**
  - Внутренние массы представляются приближенными (аппроксимирующими) собственными векторами
  - Приближенные собственные частоты и формы м.б. выведены в качестве промежуточных результатов
- **Редуцирование модальных компонент – в дополнение к статическому редуцированию**
  - Внутренние массы представляются точными собственными векторами компонент модели
  - Собственные векторы для каждого суперэлемента м.б. выведены

# Редуцирование Гайана (статическое)

- Основывается на жесткости
- Выполняется статическая конденсация жесткости

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{oo} & \mathbf{K}_{oa} \\ \mathbf{K}_{oa}^T & \bar{\mathbf{K}}_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_o \\ \mathbf{U}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_o \\ \mathbf{P}_a \end{Bmatrix}$$

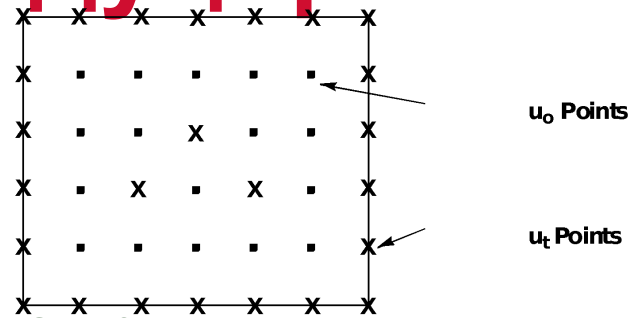
- Если  $\mathbf{P}_o = 0$ , тогда  $\{\mathbf{u}_o\} = [\mathbf{G}_{oa}] \{\mathbf{u}_a\}$ , где  $\mathbf{G}_{oa} = -[\mathbf{K}_{oo}^{-1}] [\mathbf{K}_{oa}]$
- Это преобразование обеспечивает переход от F-set к A-set

$$[\mathbf{K}_{aa}] = [\bar{\mathbf{K}}_{aa}] + [\mathbf{K}_{oa}]^T [\mathbf{G}_{oa}]$$

- Однако,  $\{\mathbf{U}_o\}$  (внутренние динамические эффекты) игнорируется
- При отсутствии масс, демпфирования и нагрузок, ассоциирующихся с внутренними узлами (O-set), аппроксимация отсутствует (нет погрешности).
- Если собственные частоты и частоты воздействия намного выше собственных частот остаточной структуры и частот воздействия, - точность высокая.



# Сравнение методов редуцирования



- Статическое редуцирование

$$\begin{Bmatrix} U_o \end{Bmatrix} = [G_{ot}] \begin{Bmatrix} U_t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U_o^0 \end{Bmatrix}$$

Local dynamic effects are ignored.

- Обобщенное динамическое редуцирование

$$\begin{Bmatrix} U_o \end{Bmatrix} = [G_{ot} \ G_{og}] \begin{Bmatrix} U_t \\ \dot{U}_g \end{Bmatrix}$$

- Аппроксимирующие собственные векторы представляют внутренние перемещения.
- Редуцирование модальных компонент

$$\begin{Bmatrix} U_o \end{Bmatrix} = [G_{ot} \ G_{og}] \begin{Bmatrix} U_t \\ \dot{U}_g \end{Bmatrix}$$

- Точные собственные векторы представляют внутренние перемещения.

# Преимущества методов редуцирования

- Преимущества метода Редуцирования модальных компонент над методом Статического редуцирования
  - Возможно использовать опытные результаты
  - Более точен при одинаковом количестве динамических СС
  - Идеален для *высоко* связанных и *несвязанных* конструкций
- Преимущества метода Статического редуцирования над методом Редуцирования модальных компонент
  - Дешевле
  - Менее сложный
  - Меньше проблем

# Анализ собственных колебаний с использованием только статического редуцирования

- Не требуется обобщенных переменных для суперэлементов (за исключением остаточной структуры – если для нее требуется обобщенное редуцирование или редуцирование модальных компонент)
- Масса, демпфирование и жесткость суперэлемента конденсируется статически во внешние СС.
- Операторы ASETi и QSETi могут быть указаны только в остаточной структуре.
- При отсутствии операторов ASETi все внутренние СС остаточной структуры сохраняются для анализа собственных колебаний.
- При наличии операторов ASETi, только соответствующие СС сохраняются для анализа собственных колебаний.
- Раздел Case Control Section аналогичен статическому анализу, требуется только дополнительно оператор METHOD в SUBCASE'е, относящемся к остаточной структуре. Может применяться оператор DYNRED.

# Анализ собственных колебаний с использованием динамического редуцирования суперэлементов

- Поведение суперэлемента описывается его реальными и/или “обобщенными” (GDR) модами в дополнении к статическим формам.
- Жесткость, масса и демпфирование суперэлемента трансформируются с использованием физических и модальных координат.
- Моды суперэлемента вычисляются при наличии операторов METHOD и/или DYNRED (GDR) в соответствующем SUBCASE’е.
- Количество мод суперэлемента задается операторами EIGR или EIGRL (DYNRED для обобщенного динамического редуцирования).
- Количество мод суперэлемента, передаваемых в остаточную структуру, определяется операторами SENQSET или QSETi и SPOINT.
- Если моды суперэлемента (СЭ) передаются для решения в другой СЭ, то надо использовать операторы QSETi и SPOINT. Операторы SPOINT должны соответствовать скалярным переменным в “нижнем” суперэлементе (соответствие определяется оператором SECONST).
- По умолчанию, моды суперэлемента вычисляются с фиксированными границами (в B-set). Этот прием известен как метод Крейга-Бамптона (Craig-Bampton).

# Анализ собственных колебаний с использованием динамического редуцирования суперэлементов

- Моды суперэлемента вычисляются в Фазе I в соответствие с операцией SEMR.
- Суперэлементы-копии должны иметь номера внешних узлов, аналогичные номерам граничных узлов суперэлемента-оригинала. Если СЭ-оригинал включает оператор SENQSET, тогда СЭ-копия должен иметь соответствующие СС для представления мод.

Superelement Internal Generalized Degree of Freedom

**SENQSET**

Defines number of internally generated scalar points for superelement dynamic reduction.

**Format:**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SENQSET	SEID	N							

**Example:**

SENQSET	110	45							
---------	-----	----	--	--	--	--	--	--	--

**Field**

**Contents**

SEID

Superelement identification number. See Remark 3.. (Integer<0 or Character="ALL")

N

Number of internally generated scalar points for dynamic reduction generalized coordinates. (Integer>0; Default=0)

**Remarks:**

1. SENQSET can only be specified in the main Bulk Data Section and is ignored after the BEGIN SUPER=n command.
2. SENQSET is only required if the user wants to internally generated scalar points used for dynamic reduction.
3. SEID="ALL" will automatically generate N q-set degrees of freedom for all superelements, except the residual structure (SEID=0). Specifying additional SENQSET entries for specific superelements will override the value of N specified on this entry.
4. If the user manually specifies q-set degrees of freedom using a SEQSETi or QSETi entries, then the internally generated scalar points will not be generated.LQ

---

Bulk Data Entry

Defines scalar points.

**Format**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SPOINT	ID1	ID2	ID3	ID4	ID5	ID6	ID7	ID8	

**Example**

SPOINT	3	18	1	4	16	2			
--------	---	----	---	---	----	---	--	--	--

**Alternate Format and Example**

SPOINT	ID1	"THRU"	ID2						
SPOINT	5	THRU	649						

**Field****Contents**

IDi Scalar point identification number. (0<Integer<1000000; For "THRU" option, ID1<ID2)

**Remarks:**

1. A scalar point defined by its appearance on the connection entry for a scalar element (see the CELASi, CMASSi, and CDAMPi entries) need not appear on an SPOINT entry.
2. All scalar point identification numbers must be unique with respect to all other structural, scalar, and fluid points. However, duplicate scalar point identification numbers are allowed in the input.
3. This entry is used primarily to define scalar points appearing in single-point or multipoint constraint equations to which no scalar elements are connected.
4. If the alternate format is used, all scalar points ID1 through ID2 are defined.
5. For a discussion of scalar points, see the *MSC.Nastran Reference Manual*, Section 5.6.

Defines generalized degrees of freedom (q-set) to be used for dynamic reduction or component mode synthesis

**Format:**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
QSET	ID1	C1	ID2	C2	ID3	C3	ID4	C4	

**Example:**

QSET	15	123456	1	7	9	2	105	6	
------	----	--------	---	---	---	---	-----	---	--

**Field****Contents**

IDi

Grid or scalar point identification number. (Integer&gt;0)

Ci

Component number. (Integer zero or blank for scalar points or any unique combination of the Integers 1 through 6 for grid points with no embedded blanks.)

**Remarks:**

1. Degrees of freedom specified on this entry form members of the mutually exclusive q-set. They may not be specified on other entries that define mutually exclusive sets. See the MSC.Nastran Quick Reference Guide, Appendix B for a list of these entries.
2. Degrees of freedom specified on QSET and QSET1 entries are automatically placed in the a-set.
3. When ASET, ASET1, QSET, and/or QSET1 entries are present, all degrees of freedom not otherwise constrained (e.g., SPCi or MPC entries) will be placed in the omitted set (o-set).



Defines generalized degrees of freedom (q-set) to be used for generalized dynamic reduction or component mode synthesis.

**Format:**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
QSET1	C	ID1	ID2	ID3	ID4	ID5	ID6	ID7		
		ID8	ID9	-etc.-						

**Example:**

QSET1	123456	1	7	9	22	105	6	22		
	52	53								

**Alternate Format and Example:**

QSET1	C	ID1	"THRU"	ID2						
QSET1	0	101	THRU	110						

**Field****Contents**

C Component number. (Integer zero or blank for scalar points or any unique combination of the Integers 1 through 6 for grid points with no embedded blanks.)

IDi Grid or scalar point identification number. (Integer>0; For THRU option, ID1<ID2.)

**Remarks:**

1. Degrees of freedom specified on this entry form members of the mutually exclusive q-set. They may not be specified on other entries that define mutually exclusive sets. See the MSC.Nastran Quick Reference Guide, Appendix B for a list of these entries.
2. Degrees of freedom specified on QSET and QSET1 entries are automatically placed in the a-set.
3. When ASET, ASET1, QSET, and/or QSET1 entries are present, all degrees of freedom not otherwise constrained (e.g., SPCi or MPC entries) will be placed in the omitted set (o-set).

# Анализ собственных колебаний с использованием динамического редуцирования суперэлементов

- При вычислении мод полностью незакрепленного суперэлемента все внешние СС д.б. перечислены в операторе CSETi.
  - Бездеформационные моды ( $f=0$  Гц) – линейные комбинации статических векторов и не должны быть редуцированы.
  - Одно из двух:
    - Не вычисляйте их ( $F1>0$  в операторах EIGR или EIGRL).
    - Вычисляйте и надейтесь, что программа удалит их (см. оператор PARAM, EPSRC в *MSC.Nastran Reference Manual*).
- “Смешанные” моды могут быть вычислены с использованием операторов CSETi и BSETi для задания закрепленных и незакрепленных степеней свободы.
  - При наличии “смешанных” мод с частотой 0 Гц с ними нужно “обращаться” аналогично случаю полностью незакрепленного суперэлемента.

Defines analysis set (a-set) degrees of freedom to be fixed (b-set) during generalized dynamic reduction or component mode synthesis calculations.

**Format**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
BSET	ID1	C1	ID2	C2	ID3	C3	ID4	C4	

**Example:**

BSET	2	135	14	6					
------	---	-----	----	---	--	--	--	--	--

**Field****Contents**

IDI Grid or scalar point identification number. (Integer>0)  
 Ci Component number. (Integer zero or blank for scalar points, or any unique combinations of the Integers 1 through 6 for grid points. No embedded blanks.)

**Remarks:**

1. If there are no CSETi or BSETi entries present, all a-set points are considered fixed during component mode analysis. If there are only BSETi entries present, any a-set degrees of freedom not listed are placed in the free boundary set (c-set). If there
2. Degrees of freedom specified on this entry form members of the mutually exclusive b-set. They may not be specified on other entries that define mutually exclusive sets. See the MSC.Nastran Quick Reference Guide, Appendix B for a list of these entries.
3. If PARAM,AUTOSPC is YES, then singular b-set and c-set degrees of freedom will be reassigned as follows:
  - a. If there are no o-set (omitted) degrees of freedom, then singular b-set and c-set degrees of freedom are reassigned to the s-set.
  - b. If there are o-set (omitted) degrees of freedom, then singular c-set degrees of freedom are reassigned to the b-set. Singular b-set degrees of freedom are not reassigned.

Defines analysis set (a-set) degrees of freedom to be fixed (b-set) during generalized dynamic reduction or component mode synthesis calculations.

**Format**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
BSET1	C	ID1	ID2	ID3	ID4	ID5	ID6	ID7		
		ID8	ID9	ID10	-etc.-					

**Example:**

BSET1	2	135	14	6	23	24	25	26		
	122	127								

**Alternate Format and Example**

BSET1	C	ID1	"THRU"	ID2						
BSET1	3	6	THRU	32						

**Field****Contents**

C	Component numbers. (Integer zero or blank for scalar points, or any unique combinations of the integers 1 through 6 for grid points with no embedded blanks.)
IDi	Grid or scalar point identification numbers. (Integer>0; For "THRU" option, ID1<ID2)

**Remarks:**

1. If there are no CSET1 or BSET1 entries present, all a-set points are considered fixed during component mode analysis. If there are only BSET1 entries present, any a-set degrees of freedom not listed are placed in the free boundary set (c-set). If there
2. Degrees of freedom specified on this entry form members of the mutually exclusive b-set. They may not be specified on other entries that define mutually exclusive sets. See the MSC.Nastran Quick Reference Guide, Appendix B for a list of these entries.
3. If PARAM,AUTOSPC is YES, then singular b-set and c-set degrees of freedom will be reassigned as follows:
  - a. If there are no o-set (omitted) degrees of freedom, then singular b-set and c-set degrees of freedom are reassigned to the s-set.
  - b. If there are o-set (omitted) degrees of freedom, then singular c-set degrees of freedom are reassigned to the b-set. Singular b-set degrees of freedom are not reassigned.

Defines analysis set (a-set) degrees of freedom to be free (c-set) during generalized dynamic reduction or component modes calculations.

**Format:**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CSET	ID1	C1	ID2	C2	ID3	C3	ID4	C4	

**Example:**

CSET	124	1	5	23	6	16			
------	-----	---	---	----	---	----	--	--	--

**Field****Contents**

IDi

Grid or scalar point identification number. (Integer&gt;0)

Ci

Component numbers. (Integer zero or blank for scalar points, or any unique combination of the Integers 1 through 6 for grid points with no embedded blanks.)

**Remarks:**

1. If there are no CSETi or BSETi entries present, all a-set degrees of freedom are considered fixed during component modes analysis. If there are only BSETi entries present, any a-set degrees of freedom not listed are placed in the free boundary set (c-set).
2. Degrees of freedom specified on this entry form members of the mutually exclusive c-set. They may not be specified on other entries that define mutually exclusive sets. See the MSC.Nastran Quick Reference Guide, Appendix B for a list of these entries.
3. If PARAM,AUTOSPC is YES then singular b-set and c-set degrees of freedom will be reassigned as follows:
  - a. If there are no o-set (omitted) degrees of freedom, then singular b-set and c-set degrees of freedom are reassigned to the s-set.
  - b. If there are o-set (omitted) degrees of freedom, then singular c-set degrees of freedom are reassigned to the b-set. Singular b-set degrees of freedom are not reassigned.

Bulk Data Entry

Defines analysis set (a-set) degrees of freedom to be free (c-set) during generalized dynamic reduction or component modes calculations.

**Format:**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CSET1	C	ID1	ID2	ID3	ID4	ID5	ID6	ID7		
		ID8	ID9	-etc.-						

**Example:**

CSET1	124	1	5	7	6	9	12	122		
	127									

**Alternate Formats and Examples:**

CSET1	C	ID1	"THRU"	ID2						
CSET1	3	6	THRU	32						

CSET1		"ALL"								
CSET1		ALL								

**Field****Contents**

C

Component number. (Integer zero or blank for scalar points, or any unique combination of the Integers 1 through 6 for grid points with no embedded blanks.)

ID<sub>i</sub>

Grid or scalar point identification number. (Integer>0; For THRU option, ID1<ID2)

**Remarks:**

1. If there are no CSET<sub>i</sub> or BSET<sub>i</sub> entries present, all a-set degrees of freedom are considered fixed during component modes analysis. If there are only BSET<sub>i</sub> entries present, any a-set degrees of freedom not listed are placed in the free boundary set (c-set)

(Continued)

Bulk Data Entry

2. Degrees of freedom specified on this entry form members of the mutually exclusive c-set. They may not be specified on other entries that define mutually exclusive sets. See the MSC.Nastran Quick Reference Guide, Appendix B for a list of these entries.
3. If PARAM,AUTOSPC is YES then singular b-set and c-set degrees of freedom will be reassigned as follows:
  - a. If there are no o-set (omitted) degrees of freedom, then singular b-set and c-set degrees of freedom are reassigned to the s-set.
  - b. If there are o-set (omitted) degrees of freedom, then singular c-set degrees of freedom are reassigned to the b-set. Singular b-set degrees of freedom are not reassigned.

# Метод СМЭ с закрепленными границами

- Описание методики (известной как метод Крейга-Бамптона)
- Степени свободы суперэлемента подразделяются на два набора (set'a). Первый набор (B-set) относится к граничным узлам. Второй набор – это внутренние степени свободы (O-set).
- Вычисляются “статические” моды, каждая из которых является перемещением суперэлемента вследствие единичного изменения одной из граничных степеней свободы (другие при этом остаются неподвижными). Т.о., количество “статических” мод равно количеству граничных СС (эти векторы в MSC.Nastran известны как GOAT)
- В матричном виде

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{ob} \\ K_{bo} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{ob} \\ \bar{I}_{bb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{P}_b \end{Bmatrix}$$

- (в действительности  $\bar{P}_b$  не прикладывается)

- Из первого уравнения

$$\begin{Bmatrix} \phi_{ob} \end{Bmatrix} = -[K_{oo}]^{-1}[K_{ob}] \begin{Bmatrix} \bar{I}_{bb} \end{Bmatrix} \quad (\text{GOAT})$$



# Метод CMS с закрепленными границами

- получаем “статические” моды:

$$\left\{ \varphi_b \right\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{ob} \\ \hline \mathbf{I}_{bb} \end{Bmatrix}$$

- Затем с использованием O-set определяются формы колебаний при закрепленных границах  $\{\varphi_{oo}\}$  (в MSC.Nastran известны как векторы GOAQ).

$$-\omega^2 \mathbf{K}_{oo} \left\{ \varphi_{oo} \right\} + \mathbf{K}_{oo} \left\{ \varphi_{oo} \right\} = \mathbf{0}$$

- Необходимое количество этих мод определяется пользователем. Моды колебаний + “статические” моды = обобщенные координаты.

$$\left\{ \varphi_G \right\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{ob} & \varphi_{oo} \\ \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

- Для получения “обобщенных” масс и жесткостей матрицы масс и жесткости суперэлемента умножаются на полученные моды

$$\mathbf{K}_G = \left\{ \varphi_G \right\}^T \mathbf{K}_{ff} \left\{ \varphi_G \right\}$$

$$\mathbf{M}_G = \left\{ \varphi_G \right\}^T \mathbf{M}_{ff} \left\{ \varphi_G \right\}$$

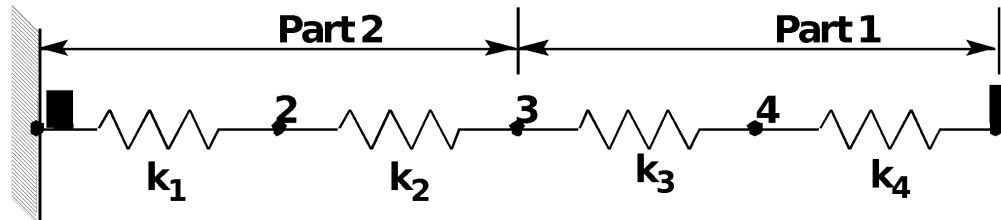
- где F-set - сумма B-set и O-set.

# Метод СМЭ с закрепленными границами

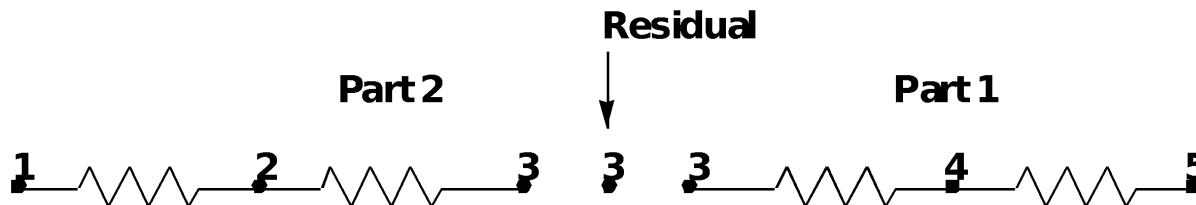
- “Обобщенные” матрицы включают физические СС, относящиеся к граничным узлам, и модальные координаты (при закрепленных границах суперэлемента).
- Полученные матрицы могут обрабатываться как и другие структурные матрицы а результаты – вычисляться обычным методом при модальном решении (обобщенные координаты умножаются на соответствующий вектор и участвуют в формировании *относительных* перемещений).
- Вычисляемые моды нормируются по величине (1,0) их максимальных перемещений (вне зависимости от метода нормирования, затребованного пользователем).

# Пример решения

- Пример использования метода Синтеза Модальных Компонентов (CMS)



- $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1.0$
- $m_1 = m_2 = m_4 = m_5 = 1.0$  ;  $m_3 = 1.0$



- Аналитическое решение для частот

$i$	1	2	3	4
$f_i$	0.0553	0.1592	0.2438	0.2991
$\lambda_i = \omega^2$	0.1206	1	2.3473	3.5321

# Пример решения

- Суперэлемент 1

$$K_{gg} = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ 0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad M_{gg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

- Узел 3 - граничный; решение для “статических” мод:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ 0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- где  $K_{oo} = \begin{bmatrix} 2.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$
- $K_{ob} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $= K_{oo}^{-1} \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix}$

# Пример решения

- где  $\varphi_{об} = - \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$

- $\varphi_b = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$

- Моды колебаний при закрепленных границах.

- Замечание: В MSC.Nastran используются моды, нормированные до значения 1,0 их максимального перемещения.
- Нормализация выполняется при решении собственной задачи.

$$\left[ -\omega^2 \mathbf{M}_{oo} + \mathbf{K}_{oo} \right] \left[ \phi_{oo} \right] = \mathbf{0} = \left\{ \begin{bmatrix} -\omega^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\omega^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \right\} \left[ \phi_{oo} \right]$$

# Пример решения

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 & -1 \\ -1 & 1 - \omega^2 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{matrix} \omega^2 = 0.3819, 2.618 \\ f = 0.098 \text{ Hz}, 0.2575 \text{ Hz} \end{matrix}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.6180 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \quad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.5257 \\ 0.8506 \end{Bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{Bmatrix} 0.5257 \\ 0.8506 \end{Bmatrix}} \right\} \text{Normalized to unit mass}$$

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} -1.0000 \\ 0.6180 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -0.8506 \\ 0.5257 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_{\infty} = \begin{bmatrix} 0.6180 & -1.0000 \\ 1.0000 & 0.6180 \end{bmatrix}$$

$$\phi_G = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 0 \\ 1.000 & 0.618 & -1.000 \\ 1.000 & 1.000 & 0.618 \end{bmatrix}$$

$$[\phi_G]^T [K_{gg}] [\phi_G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5279 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6180 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_{1001} \\ u_{1002} \end{matrix}$$

$$[\phi_G]^T [M_{gg}] [\phi_G] = \begin{bmatrix} 2.0000 & 1.6180 & -0.3820 \\ 1.6180 & 1.3820 & 0 \\ -0.3820 & 0 & 1.3820 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_{1001} \\ u_{1002} \end{matrix}$$

- где 1001 и 1002 – скалярные переменные, используемые для представления мод суперэлемента 1.

# Пример решения

- Суперэлемент 2

$$K_{gg} = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ 0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad M_{gg} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Apply constraint to grid point 1.

$$\phi_b = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_{oo}\} = \{1\} \quad \omega^2 = 2.0 \quad f = 0.2251 \quad [\phi_G] = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\phi_G]^T [K_{gg}] [\phi_G] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_{1005} \end{matrix}$$

$$[\phi_G]^T [M_{gg}] [\phi_G] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.50 \\ 0.50 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_{1005} \end{matrix}$$

- где 1005 - скалярная переменная, используемая для представления моды суперэлемента 2.

# Пример решения

- Остаточная структура
  - До добавления суперэлемента:

$$K_{gg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{gg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_{1001} \\ u_{1002} \\ u_{1005} \end{matrix}$$



# Пример решения

- Добавление суперэлемента 1

$$K_{gg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5279 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.618 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{gg} = \begin{bmatrix} 3.0000 & 1.6180 & -0.3820 & 0 \\ 1.6180 & 1.3820 & 0 & 0 \\ -0.3820 & 0 & 1.3820 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_{1001} \\ u_{1002} \\ u_{1005} \end{matrix}$$

# Пример решения

- Добавление суперэлемента 2

$$K_{gg} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5279 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.618 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$M_{gg} = \begin{bmatrix} 3.2500 & 1.6180 & -0.3820 & 0.5 \\ 1.6180 & 1.3820 & 0 & 0 \\ -0.3820 & 0 & 1.3820 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_{1001} \\ u_{1002} \\ u_{1005} \end{matrix}$$

# Пример решения

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5279 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.618 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$M_{ff} = \begin{bmatrix} 3.2500 & 1.6180 & -0.3820 & 0 \\ 1.6180 & 1.3820 & 0 & 0 \\ -0.3820 & 0 & 1.3820 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_{1001} \\ u_{1002} \\ u_{1005} \end{matrix}$$

- Решение  $\{K_{FF} - \omega^2 M_{ff}\}\{\phi_f\}$  дает  $\omega^2 = 0.1206, 1.0000, 2.3473, 3.5321$ .

$$\phi_f = \begin{Bmatrix} 0.42850 & -0.5773 & -0.2280 & 0.6565 \\ 0.23150 & 1.0937 & 0.3188 & -0.8619 \\ -0.00572 & 0.0986 & 0.5464 & 0.7012 \\ 0.01370 & -0.2887 & 0.7705 & -0.7568 \end{Bmatrix}$$

- Вычисление результатов (перемещение узлов для моды 1)

- Остаточная структура

$$\phi = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.4285 \end{Bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_3 \end{matrix}$$

# Пример решения

- Суперэлемент 2

$$\text{for exterior points } \phi_{2G} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.4285 \\ 0.0137 \end{Bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_3 \\ u_{1005} \end{matrix}$$

$$\phi_{21} = \{\phi_{G2}\} \{\phi_{2G}\} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 \\ 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.4285 \\ 0.0137 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2280 \\ 0.4285 \end{Bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

- Суперэлемент 1

$$\text{for exterior points } \phi_{1G} = \begin{Bmatrix} 0.4285 \\ 0.2315 \\ -0.00572 \end{Bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_{1001} \\ u_{1002} \end{matrix}$$

$$\phi_{11} = \{\phi_{G1}\} \{\phi_{1G}\} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0.6180 & -1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.6180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4285 \\ 0.2315 \\ -0.00572 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4285 \\ 0.5773 \\ 0.6565 \end{Bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{matrix}$$

# Входной файл для анализа собственных колебаний (SOL 103)

```
$
$   sesp1.dat
$
SOL 103
CEND
TITLE = SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING
PARTS
SPC = 1
DISP = ALL
PARAM,GRDPNT,0
PARAM,USETPRT,0
$
SUBCASE 1
LABEL = CMS FOR PART 1
SUPER = 1
METHOD=1 $
$
SUBCASE 2
LABEL = CMS FOR PART 2
SUPER = 2
METHOD = 2
$
SUBCASE 100
LABEL = SYSTEM MODES
SUPER = 0
METHOD = 100
$
BEGIN BULK
$
grid,3,,20.
conm2,13,3,,1.0
$
EIGRL,100,,,4
senqset,1,2
senqset,2,1

BEGIN SUPER = 1
$
EIGRL,1,,,2
grid,3,,20.
grid,4,,30.
grid,5,,40.
$
CELAS2,3,1.,3,1,4,1
CELAS2,4,1.,4,1,5,1
CONM2,14,4,,1.

CONM2,15,5,,1.
$
BEGIN SUPER = 2
$
EIGRL,2,,,1
grid,1,,0.
grid,2,,10.
grid,3,,20.
$
CELAS2,1,1.,1,1,2,1
CELAS2,2,1.,2,1,3,1
CONM2,11,1,,1.
CONM2,12,2,,1.
SPC1,1,123456,1
$
ENDDATA
```

# Результаты анализа упругой модели методом CMS

OUTPUT FROM SPRING MODEL CMS RUN

1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 25  
 0 SUPERELEMENT 1  
 0 SUBCASE 1

E I G E N V A L U E A N A L Y S I S S U M M A R Y (REIGL MODULE)

BLOCK SIZE USED ..... 1  
 NUMBER OF DECOMPOSITIONS ..... 1  
 NUMBER OF ROOTS FOUND ..... 2  
 NUMBER OF SOLVES REQUIRED ..... 3

1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 26  
 0 SUPERELEMENT 1  
 0 SUBCASE 1

MODE NO.	EXTRACTION ORDER	EIGENVALUE	R E A L E I G E N V A L U E S		GENERALIZED MASS	GENERALIZED STIFFNESS
			RADIANS	CYCLES		
1	1	3.819660E-01	6.180340E-01	9.836316E-02	1.000000E+00	3.819660E-01
2	2	2.618034E+00	1.618034E+00	2.575181E-01	1.000000E+00	2.618034E+00

# Результаты анализа упругой модели методом CMS

OUTPUT FROM SPRING MODEL CMS RUN

1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 38  
0 SUPERELEMENT 2  
0 SUBCASE 2

## E I G E N V A L U E A N A L Y S I S S U M M A R Y (REIGL MODULE)

BLOCK SIZE USED ..... 1  
NUMBER OF DECOMPOSITIONS ..... 1  
NUMBER OF ROOTS FOUND ..... 1  
NUMBER OF SOLVES REQUIRED ..... 2

1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 39  
0 SUPERELEMENT 2  
0 SUBCASE 2

MODE NO.	EXTRACTION ORDER	EIGENVALUE	R E A L E I G E N V A L U E S		GENERALIZED MASS	GENERALIZED STIFFNESS
			RADIANS	CYCLES		
1	1	2.000000E+00	1.414214E+00	2.250791E-01	1.000000E+00	2.000000E+00

# Результаты анализа упругой модели методом CMS

1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 48  
 0 SUPERELEMENT 0  
 0 SUBCASE 100

MODE NO.	EXTRACTION ORDER	EIGENVALUE	R E A L E I G E N V A L U E S		GENERALIZED MASS	GENERALIZED STIFFNESS
			RADIANS	CYCLES		
1	1	1.206148E-01	3.472964E-01	5.527393E-02	1.000000E+00	1.206148E-01
2	2	1.000000E+00	1.000000E+00	1.591549E-01	1.000000E+00	1.000000E+00
3	3	2.347296E+00	1.532089E+00	2.438395E-01	1.000000E+00	2.347296E+00
4	4	3.532089E+00	1.879385E+00	2.991135E-01	1.000000E+00	3.532089E+00

1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 49  
 0 SUPERELEMENT 0  
 0 SUBCASE 100  
 1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 50  
 0 SUPERELEMENT 0  
 0 SUBCASE 100

0\*\*\*USER INFORMATION MESSAGE---DATA RECOVERY FOR SUPERELEMENT 0 IS NOW INITIATED.

1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 51  
 0 SUPERELEMENT 0  
 0 SUBCASE 100

SYSTEM MODES

EIGENVALUE = 1.206148E-01

CYCLES = 5.527393E-02

R E A L E I G E N V E C T O R N O . 1

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
3	G	-4.285251E-01	.0	.0	.0	.0	.0



# Результаты анализа упругой модели методом CMS

```

1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 52
                                SUPERELEMENT 0
0 SYSTEM MODES                                SUBCASE 100
  EIGENVALUE = 1.000000E+00
  CYCLES = 1.591549E-01 REAL EIGENVECTOR NO. 2

  POINT ID. TYPE T1 T2 T3 R1 R2 R3
            3 G -5.773503E-01 .0 .0 .0 .0 .0
1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 53
                                SUPERELEMENT 0
0 SYSTEM MODES                                SUBCASE 100
  EIGENVALUE = 2.347296E+00
  CYCLES = 2.438395E-01 REAL EIGENVECTOR NO. 3

  POINT ID. TYPE T1 T2 T3 R1 R2 R3
            3 G 2.280134E-01 .0 .0 .0 .0 .0
1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 54
                                SUPERELEMENT 0
0 SYSTEM MODES                                SUBCASE 100
  EIGENVALUE = 3.532089E+00
  CYCLES = 2.991135E-01 REAL EIGENVECTOR NO. 4

  POINT ID. TYPE T1 T2 T3 R1 R2 R3
            3 G -6.565385E-01 .0 .0 .0 .0 .0
1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 55
                                SUPERELEMENT 0
0 SYSTEM MODES                                SUBCASE 100
1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 56
                                SUPERELEMENT 1
0 SYSTEM MODES                                SUBCASE 100
0***USER INFORMATION MESSAGE---DATA RECOVERY FOR SUPERELEMENT 1 IS NOW INITIATED.
1 SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS MAY 12, 1998 MSC.Nastran 7/17/97 PAGE 57
                                SUPERELEMENT 1
0 CMS FOR PART 1                                SUBCASE 1
  EIGENVALUE = 1.206148E-01
  CYCLES = 5.527393E-02 REAL EIGENVECTOR NO. 1

  POINT ID. TYPE T1 T2 T3 R1 R2 R3
            3 G -4.285251E-01 .0 .0 .0 .0 .0
            4 G -5.773503E-01 .0 .0 .0 .0 .0
            5 G -6.565385E-01 .0 .0 .0 .0 .0

```



# Результаты анализа упругой модели методом CMS

```

1  SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS                                MAY 12, 1998  MSC.Nastran  7/17/97  PAGE    63
                                SUPERELEMENT 2
0  CMS FOR PART 2
  EIGENVALUE = 1.206148E-01
  CYCLES = 5.527393E-02      R E A L  E I G E N V E C T O R  N O .          1

  POINT ID.   TYPE      T1          T2          T3          R1          R2          R3
        1     G         .0          .0          .0          .0          .0          .0
        2     G     -2.280134E-01    .0          .0          .0          .0          .0
        3     G     -4.285251E-01    .0          .0          .0          .0          .0
1  SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS                                MAY 12, 1998  MSC.Nastran  7/17/97  PAGE    64
                                SUPERELEMENT 2
0  CMS FOR PART 2
  EIGENVALUE = 1.000000E+00
  CYCLES = 1.591549E-01      R E A L  E I G E N V E C T O R  N O .          2

  POINT ID.   TYPE      T1          T2          T3          R1          R2          R3
        1     G         .0          .0          .0          .0          .0          .0
        2     G     -5.773503E-01    .0          .0          .0          .0          .0
        3     G     -5.773503E-01    .0          .0          .0          .0          .0
1  SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS                                MAY 12, 1998  MSC.Nastran  7/17/97  PAGE    65
                                SUPERELEMENT 2
0  CMS FOR PART 2
  EIGENVALUE = 2.347296E+00
  CYCLES = 2.438395E-01      R E A L  E I G E N V E C T O R  N O .          3

  POINT ID.   TYPE      T1          T2          T3          R1          R2          R3
        1     G         .0          .0          .0          .0          .0          .0
        2     G     -6.565385E-01    .0          .0          .0          .0          .0
        3     G     2.280134E-01    .0          .0          .0          .0          .0
1  SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS                                MAY 12, 1998  MSC.Nastran  7/17/97  PAGE    66
                                SUPERELEMENT 2
0  CMS FOR PART 2
  EIGENVALUE = 3.532089E+00
  CYCLES = 2.991135E-01      R E A L  E I G E N V E C T O R  N O .          4

  POINT ID.   TYPE      T1          T2          T3          R1          R2          R3
        1     G         .0          .0          .0          .0          .0          .0
        2     G     4.285251E-01    .0          .0          .0          .0          .0
        3     G     -6.565385E-01    .0          .0          .0          .0          .0
1  SAMPLE PROBLEM FOR CMS USING PARTS                                MAY 12, 1998  MSC.Nastran  7/17/97  PAGE    67

```

**NAS102**

**Декабрь 2001, Стр. 16-76**  
**MSC Moscow**

