

# Ассиметричное шифрование

# Определение

---

Способ шифрования, в котором для шифрования и расшифровывания применяются различные ключи, причём один не может быть простым способом получен из другого.



# Открытый и закрытый ключи

---

- Открытый(публичный) ключ – это ключ, который известен каждому и не является секретной частью алгоритма шифрования. С его помощью, любой желающий может зашифровать сообщение.
- Закрытый ключ – это часть алгоритма, которая является секретной, только обладая этим ключом можно расшифровать сообщение, полученное с помощью открытого ключа и криптографического преобразования.

## Другими словами

---

- Любой желающий может с помощью открытого ключа зашифровать своё послание и отправить его владельцу секретного ключа
- Имеет место следующее преобразование:
  - Сообщение + открытый ключ пользователя = шифртекст
  - Шифртекст + секретный ключ пользователя = сообщение

# Односторонняя (вычислительно необратимая функция)

---

- Функция реализующая преобразование, которое сложно обратить, без знания некоторой секретной информации.

# Вариант алгоритма асимметричного шифрования

---

1. Выбрать два простых числа  $p$  и  $q$
2. Вычислить  $N=p \cdot q$
3. Выбрать  $E$ , такое, что

$$\text{НОД}(E, (p-1) \cdot (q-1)) = 1$$

1. Найти  $D$ , такое, что

$$D = E^{-1} \pmod{(p-1) \cdot (q-1)}$$

Т.е.

$$D \cdot E = 1 \pmod{(p-1) \cdot (q-1)}$$

$p$	$q$	$N$	$E$	$D$
Держать в строгом секрете или забыть вовсе	Держать в строгом секрете или забыть вовсе	Держать в общем доступе, для зашифровывания	Держать в общем доступе, для зашифровывания	Держать в строгом секрете

# Вариант алгоритма асимметричного шифрования

---

□ Положим

□  $p=7$

□  $q=11$

□ Тогда

□  $N=77$

□  $E=13$

□  $D=37$

□ Следовательно для зашифровывания числа 8

$$8^{13} \pmod{77} = 50$$

□ А для расшифровывания

$$50^{37} \pmod{77} = 8$$



## Это так, потому что

---

- Все сравнимые по модулю числа, мы считаем равными друг другу
- При возведении числа в степени в степень, степени умножаются

$$(2^2)^3 = (4)^3 = 64 = (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$$

- Произведение числа с обратным ему, в кольце вычетов даёт 1
- Следовательно

$$m^e = m^e \pmod{N}$$

$$(m^e)^d = m^{e \cdot d} = m^{e \cdot d} \pmod{N} = m^1$$



## В чём проблема

---

- Эффективность такого рода алгоритмов базируется на сложности некоторых математических проблем, так в данном случае эксплуатируется сложность разложения числа на простые множители.
- В тоже время перемножение двух простых чисел для получения числа  $N$  не представляется сложной задачей
- Без знания  $p$  и  $q$  не возможно найти обратное (« $d$ ») к известному « $e$ », т.к. зная « $e$ » можно вычислить обратное к нему, только зная модуль, а он в свою очередь равен  $(p-1) \cdot (q-1)$ , найти это значение, можно только зная  $p$  и  $q$ , но чтобы их найти, надо разложить  $N$  на простые множители

## Экскурс в прошлое (или откуда $(p-1) \cdot (q-1)$ )

---

- Число элементов кольца вычетов взаимнопростых с модулем, даётся ф-ей Эйлера ( $\varphi(N)$ )
- По аналогии с Малой теоремой Ферма, теорема Лагранжа в частности позволяет нам утверждать, что

$$N = p \cdot q$$

$$\varphi(N) = (p-1) \cdot (q-1)$$

$$e^{(p-1) \cdot (q-1)-1} = e^{-1} \pmod{((p-1) \cdot (q-1))}$$

# Как происходит шифрование

- Открытый текст разбивается на блоки длины меньше  $N$
- Например текст «срут» можно разбить так

с	р	у	р	т
3	18	25	16	20

- Каждый блок зашифровывается по вышеописанной схеме, т.е.

$N=77$	$E=13$	$D=37$
Модуль	Открытый ключ	Закрытый ключ

- Первые два ( $N, E$ ) известны всем,  $D$  - хранится в тайне

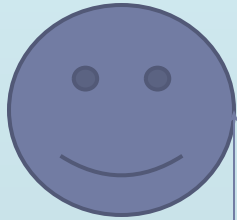
# Процедура шифрования

С	3	$3^{13}(\text{mod } 77)$	38
Р	18	$18^{13}(\text{mod } 77)$	46
У	25	$25^{13}(\text{mod } 77)$	60
Р	16	$16^{13}(\text{mod } 77)$	37
Т	20	$20^{13}(\text{mod } 77)$	69
Итоговое сообщение			{38,46,60,37,69}

# Процедура расшифровывания

38	$38^{37} \pmod{77}$	3	C
46	$46^{37} \pmod{77}$	18	R
60	$60^{37} \pmod{77}$	25	Y
37	$37^{37} \pmod{77}$	16	P
69	$69^{37} \pmod{77}$	20	T
Итоговое сообщение		{C,R,Y,P,T}	

# Как выглядит переписка при использовании шифрования с закрытым ключом

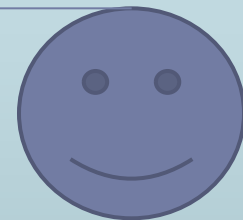


Алиса

А Алиса расшифрует его ответ своим закрытым ключом

Сообщение зашифрованное  
открытым ключом Боба

Потом он  
зашифрует ответ  
для Алисы, её  
открытым ключом



Боб

Алиса и Боб обмениваются  
открытыми ключами по не  
защищённому каналу

У себя на компьютере Боб расшифрует  
его своим закрытым ключом и прочтёт

# Как работает ЭЦП



Алиса

В данном случае закрытый ключ используется для зашифровывания, а открытый для расшифровывания

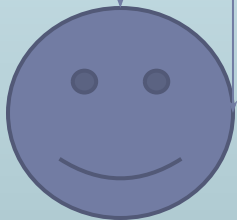
Её важный документ



ХЭШ её важного документа



Зашифрованный Алисиным закрытым ключом ХЭШ



Боб

Боб расшифрует ХЭШ документа открытым ключом Алисы, а потом вычислит ХЭШ документа, который пришёл вместе с зашифрованным. Если значения ХЭШ функций совпадут, БОБ может быть уверен в подлинности документа.

# *Знать*

---

- Что такое вычислительно необратимые ф-и
- Что такое асимметричное шифрование
- Что такое закрытый и открытый ключи
- Знать приведённый в презентации примитив RSA
- Уметь объяснять почему это работает
- Знать как происходит процесс шифрования
- Уметь строить простые примеры зашифровывания аналогичные приведённым в презентации



# Атаки на симметричные шифры

---

- В нашем примере длина ключа не могла превысить

$$2^6 = 64 < N = 77 > 2^7 = 128$$

- Т.е. ключ представляется 7 битами, в свою очередь длина шифруемого блока не могла превышать 6 бит.