ЛоГИкА

БАЗОВЫЙ КУРС ИНФОРМАТИКИ

Компьютер имеет то преимущество перед мозгом, что им пользуются

Габриэль Лауб

ЛОГИКА

ТЕМЫ

Формы мышления

ЛОГИКА — наука, изучающая законы и формы мышления; учение о способах рассуждений и доказательств.

ПОНЯТИЕ — форма мышления, в которой отражаются существенные признаки отдельного предмета или класса однородных предметов. Понятия в языке выражаются словами.

СУЖДЕНИЕ — это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о предметах, признаках или их отношениях.

УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ — форма мышления, посредством которой из одного или нескольких суждений, называемых посылками, мы по определенным правилам вывода получаем суждение-заключение.

ТЕМЫ

ВЫСКАЗЫВАНИЯ

ПОНЯТИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

АЛГЕБРА ЛОГИКИ (или Булева алгебра) **оперирует с ЛОГИЧЕСКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ – высказываниями** и **суждениями (предикатами)**

ВЫСКАЗЫВАНИЯ – это конкретные частные утверждения, о которых можно судить, истинно оно или ложно. В естественных языках высказывания выражаются ***повествовательными*** **предложениями.**

ПРИМЕРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ:

1. Земля- планета солнечной системы.
2. $5 \times 5 = 25$
3. Яблоки растут на хвойных деревья
4. Вода – жидкость
5. $2 > 3$

ПОНЯТИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

СУЖДЕНИЯ **(предикаты)** – это утверждения о переменных.

Примеры суждений:

1. Р – простое число
2. Х + У > 0
3. N – четное число

Суждения становятся высказываниями, если переменным придать числовые значения (пример: 3 – простое число).

Логические переменные могут принимать только два значения:

ИСТИННА - 1 или ЛОЖЬ – 0

ПОНЯТИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В приведенных предложениях выделите высказывания:

1. Москва расположена между Киевом и Одессой.
2. Есть ли на свете человек, который мог объять необъятное?
3. Я земной шар чуть не весь обошел!
4. Солнце есть спутник земли.
5. Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей, то он прямоугольный.
6. 2+3=4
7. Сегодня отличная погода.
8. Железо – металл.
9. Если один угол в треугольнике прямой, то треугольник будет тупоугольным.
10. Который час?
11. Да здравствует 1 сентября!
12. Здесь нет высказываний.

ТЕМЫ

ЛОГИКА

КВАНТОРЫ

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

КВАНТОРЫ

- Выражение «для всякого х» в логике называется *квантором всеобщности* по переменной х

КВАНТОР ВСЕОБЩНОСТИ $\forall$ (все, всякий, каждый).

Пример: Все следователи – юристы. Все кошки являются рыбами.

ИСТИННОСТЬ ВЫСКАЗЫВАНИЯ С КВАНТОРОМ ОБЩНОСТИ УСТАНАВЛИВАЕТСЯ ПУТЕМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, А ПОКАЗАТЬ ЛОЖНОСТЬ МОЖНО, ПРИВЕДЯ КОНТРПРИМЕР.

- Выражение «существует х такое, что …» в логике называется *квантором существования* по переменной х

КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ $\exists$(некоторые, существуют).

Пример: Некоторые следователи имеют высшее образование. Некоторые студенты – отличники.

ИСТИННОСТЬ ВЫСКАЗЫВАНИЯ С КВАНТОРОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТАНАВЛИВАЕТСЯ ПРИ ПОМОЩИ КОНТРЕКТНОГО ПРИМЕРА, А ЧТОБЫ УБЕДИТЬСЯ В ЛОЖНОСТИ НЕОБХОДИМО ПРОВЕСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

К
О
Н
Ъ
Ю
Н
К
Ц
И
Я

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

КОНЪЮНКЦИЯ

Соединение двух логических переменных с помощью союза «И» называется логическим умножением или КОНЪЮНКЦИЕЙ

Эта операция обозначается символами «$\wedge$» или «**&**».
В программировании эту операцию обозначают «**AND**».

Таблица истинности

X	**Y**	**X$\wedge$Y**
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Пример: X – «На столе лежит ручка»
Y – «На столе лежит карандаш»
X$\wedge$Y – «На столе лежит ручка и на столе лежит карандаш»

ДИЗЪЮНКЦИЯ

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

ДИЗЪЮНКЦИЯ

Соединение двух логических переменных с помощью союза «ИЛИ» называется логическим сложением или ДИЗЪЮНКЦИЕЙ.

Эта операция обозначается символами «$\vee$» или «+».
В программировании эту операцию обозначают «**OR**».

Таблица истинности

X	Y	XVY
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пример: X – «В библиотеке можно взять книгу»
Y – «В библиотеке можно просмотреть журнал»
X$\vee$Y – «В библиотеке можно взять книгу или в библиотеке можно просмотреть журнал»

СТРОГАЯ ДИЗЪЮНКЦИЯ

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

СТРОГАЯ ДИЗЪЮНКЦИЯ

Соединение двух логических переменных с помощью союза «ЛИБО…ЛИБО» называется ИСКЛЮЧАЮЩИМ ИЛИ или **СТРОГОЙ ДИЗЪЮНКЦИЕЙ.**

Эта операция обозначается символами «$\dot{\vee}$» или «$\oplus$».
В программировании эту операцию обозначают «**XOR**».

Таблица истинности

X	Y	X⊕Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Пример: X – «В библиотеке можно взять книгу»
Y – «В библиотеке можно просмотреть журнал»
X⊕Y – «В библиотеке можно взять либо книгу, либо в библиотеке можно просмотреть журнал»

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

ИНВЕРСИЯ

И
Н
В
Е
Р
С
И
Я

Присоединение частицы НЕ к логической переменной называется логическим отрицанием или ИНВЕРСИЕЙ.

Эта операция обозначается символами «□ » или «¬».
В программировании эту операцию обозначают «**NOT**».

Таблица истинности

¬X	**X**
0	**1**
1	**0**

Пример: X – «Точка О является центром круга»

Инверсия: «Точка О не является центром круга»

И М П Л И К А Ц И Я

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

ИМПЛИКАЦИЯ

Соединение двух логических переменных с помощью союза «ЕСЛИ…, ТО…» называется логическим следованием или ИМПЛИКАЦИЕЙ.

Эта операция обозначается символами «→» или «⊃».
В программировании саму логическую операцию обозначают «**IMP**», а союз «если…,то…» заменяют связкой «**IF…THEN**…».

Таблица истинности

X – *условие* (посылка) Y– *заключение* (следствие)

X	Y	X→Y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример: X – «Треугольник равносторонний»
Y – «Треугольник равноугольный»
X⇒Y – «Если треугольник равносторонний, то он равноугольный»

«Из лжи – все, что угодно».

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Соединение двух логических переменных с помощью союза «…ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА» называется логическим равенством или ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬЮ.

Эта операция обозначается символами «≡» или «↔». В программировании саму логическую операцию обозначают «EQV».

Таблица истинности

X	Y	X↔Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример: X – «Компьютер может производить вычисления»

Y – «Компьютер включен»

Эквивалентность: ««Компьютер может производить вычисления тогда и только тогда, когда компьютер включен»

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Порядок выполнения операций

Инверсия

Конъюнкция

Дизъюнкция, строгая дизъюнкция

Импликация

Эквивалентность

Для изменения указанного порядка используются круглые скобки.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

1. **Дайте название каждой логической операции:**

а) Если две прямые параллельны, то они пересекаются.

б) Произведение равно нулю тогда и только тогда когда один из множителей равен нулю.

в) Завтра я не пойду в школу.

г) Зимой мы обычно ходим на лыжах или катаемся на коньках на нашем пруду.

д) Я сделал домашнюю работу и получил за нее «пять».

е) Принтер либо устройство вывода информации, либо устройство хранения информации.

2. Постройте отрицания приведенных ниже высказываний:

а) водитель автомобиля не имеет права ехать на красный свет;
б) существует параллелограмм с прямым углом;
в) любое простое число нечетно;
г) на улице сухо;
д) в школу поставили новые компьютеры.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

3. **Для каждой из приведенных формул придумайте по два высказывания:**

   а) $(A \wedge B) \Rightarrow C$ *б)* $\square B \vee C$ *в)* $(B \wedge C) \vee \square A$

4. **Определите вид сложного высказывания, записав его структурной формулой**

   а) *ни сна, ни отдыха измученной душе;*

   б) что неясно представляешь, то неясно и высказываешь;

   в) зимой мы поедем в деревню или остановимся в городе;

   г) прямо – ближе, обдуманно – быстрее.

ТЕМЫ

ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Любое составное высказывание можно рассматривать как логическую функцию **$F(x_1,x_2,\ldots, x_n)$**, аргументами которой являются логические переменные $x_1,x_2,\ldots, x_n$ (простые высказывания). Сама функция и аргументы могут принимать только два различных значения: «истина» (1) и «ложь» (0). Выше были рассмотрены функции двух аргументов: логическое умножение, логическое сложение, логическое отрицание, логическое равенство, логическое следование. Каждая логическое функция двух аргументов имеет четыре возможных набора значений аргументов. По формуле $N=2^4=16$ мы можем определить, какое количество различных логических функций двух аргументов может существовать. Таким образом, существует 16 различных логических функций двух аргументов, каждая из которых задается своей таблицей истинности.

Аргу-менты		**Логические функции**															
A	B	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

ТЕМЫ

ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

Формула имеет нормальную форму, если в ней отсутствуют знаки эквивалентности, импликации, двойного отрицания, при этом знаки отрицания находятся только при переменных.

1) закон тождества $A=A$

2) закон двойного отрицания $(\neg(\neg A))=A$

3) **закон противоречия** $A \wedge (\neg A) = 0$

4) закон исключения третьего $A \vee (\neg A) = 1$

5) $A \rightarrow B = (\neg A) \vee B$

6) $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee ((\neg A) \vee (\neg B))$

$A \leftrightarrow B = ((\neg A) \vee B) \wedge (A \vee (\neg B))$

7) коммутативный закон: $A \wedge B = B \wedge A$

$A \vee B = B \vee A$

8) ассоциативный закон: $((A \wedge B) \wedge C) = (A \wedge (B \wedge C))$

$((A \vee B) \vee C) = (A \vee (B \vee C))$

9) дистрибутивный закон: $(A \wedge (B \vee C)) = ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

$(A \vee (B \wedge C)) = ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

10) закон поглощения: $A \wedge (A \vee B) = A$

$A \vee (A \wedge B) = A$

11) закон идемпотентности: $A \wedge A = A$

$A \vee A = A$

12) законы исключения констант: $A \wedge 1 = A$
$A \vee 1 = 1$

$A \wedge 0 = 0$ $A \vee 0 = A$

13) отрицание конъюнкций: $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$

14) отрицание дизъюнкций: $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$

15) закон исключения: $(A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge B) = B$

$(A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee B) = B$

ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

В соответствии с законами логики определите результаты высказываний:

а) в соседней комнате сейчас находится какой-то человек или неверно, что в соседней комнате сейчас находится какой-то человек;

б) неверно, что на столе лежит ручка или на столе лежит карандаш;

в) завтра будет вьюга и будет дождь или завтра не будет вьюги и будет дождь;

г) не является истинным, что Юра этого не делал.

ТЕМЫ

ЗАДАЧИ

ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НУЖНО:

1. **Внимательно изучить условие.**
2. **Выделить элементарные высказывания и обозначить их – как принято –большими латинскими буквами.**
3. **Записать условие задачи на языке алгебры логики, соединив простые высказывания в сложные при помощи логических операций.**
4. **Полученное выражение упростить, используя законы логики.**
5. **Выбрать решение – набор значений простых высказываний, при котором выражение является истинным.**
6. **Проверить, удовлетворяет ли полученное решение условию задачи.**

ЗАДАЧИ

✔ **Найдите значения логических выражений:**

а) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0) = 1 \vee 1 = 1$; б) $((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1$;

в) $(0 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$; г) $(0 \wedge 1) \wedge 1$;

д) $1 \wedge (1 \wedge 1) \wedge 1$; е) $((1 \vee 0) \wedge (1 \wedge 1)) \wedge (0 \vee 1)$.

✔ **Даны два простых высказывания:**

$A=\{2 \cdot 2=4\}$, $B=\{2 \cdot 2=5\}$.

Какие из составных высказываний истинны:

а) $\neg A$; б) $\neg B$;

в) $A \wedge B$; г) $A \vee B$;

д) $A \Rightarrow B$; е) $A \Leftrightarrow B$?

✔ **Даны простые высказывания:**

A={Принтер – устройство ввода информации}

B={Процессор – устройство обработки информации}

C={Монитор – устройство хранения информации}

D={Клавиатура – устройство ввода информации}

Определите истинность составных высказываний:

а) $(A \wedge B) \wedge (C \vee D)$; б) $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge C)$;

В) $(A \vee B) \Leftrightarrow (C \wedge D)$; г) $\neg A \Leftrightarrow \neg B$.

ЗАДАЧИ

- **Выполните поразрядное логическое сложение двоичных чисел**
  а) 100 и 110; б) 1010 и 1000; в) 101010 и 111111.
- **Даны три числа в различных системах счисления:**
  а) $A=20_{10}$, $B=11_{16}$, $C= 30_8$.
  Переведите A, B, C в двоичную систему счисления и выполните поразрядно логические операции ($A \vee B \wedge C$). Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Решение: $20_{10} = 10100_2$ $11_{16}=10001_2$ $30_8 =11000_2$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee B \wedge C$
1	1	1	1	1
0	0	1	0	0
1	0	0	0	1
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0

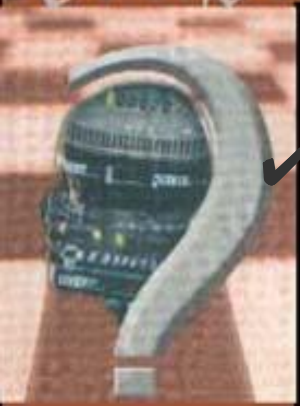
б) $A=30_{10}$, $B=AF_{16}$, $C= 56_8$.

ЗАДАЧИ

✔ **Составьте таблицу истинности для выражений:**

$A \vee B \wedge C$; $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A	B	C	B∧C	A∨B∧	A∨B	A∨ C	(A∨B)∧
1	1	1	1	1			
1	0	0	0	1			
0	1	0	0	0			
0	0	1	0	0			
1	1	0	0	1			
1	0	1	0	1			
0	1	1	1	1			
0	0	0	0	0			



ЗАДАЧИ

- **Даны два сложных высказывания:**

а) если одно слагаемое делится на 3 и сумма делится на 3, то и другое слагаемое делится на 3;

б) если одно слагаемое делится на 3,а другое слагаемое не делится на 3, то сумма не делится на 3.

Формализуйте эти высказывания и составлением таблиц истинности докажите, что полученные формулы эквивалентны.

<u>Решение:</u> Высказывание А - одно слагаемое делится на 3

Высказывание В - другое слагаемое делится на 3

Высказывание С - сумма делится на 3

$F = A \wedge C \Rightarrow B \leftrightarrow A \wedge \neg B \Rightarrow \neg C$

A	B	C	¬B	¬C	A ∧ C	A∧ C ⇒ B	A ∧¬B	A∧¬B ⇒¬C	A∧C⇒B⇔A∧¬B ⇒¬C
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1

ЗАДАЧИ

- **Даны два сложных высказывания:**

  а) если a>b и (b>0 или b=0), то a>0;

  б) если a>b и a>0, то b>0 или b=0.

  Формализуйте эти высказывания и составлением таблиц истинности докажите, что полученные формулы эквивалентны.

- **Докажите с помощью таблиц истинности равносильность следующих логических выражений:**

  а) $(A \Rightarrow B) \& (A \vee \neg B)$

  б) $(A \Leftrightarrow B) \& (\neg A \& \neg B)$

ЗАДАЧИ

- **Каждую из приведенных формул упростите так, чтобы знак отрицания был отнесен только к простым высказываниям:**

а) ¬(A ∨ B) ∧ □C = □A ∧ □B ∧ □C

б) ¬(□A ∨ B)

в) ¬(A ∧ □B) ∨ □C

- **Используя законы логики упростите выражения:**

а) A ∨ (B ∧ A) = A ∨ (A ∧ B) = A

б) C ∨ (A ∧ B) ∨ (□A ∧ B)

в) A ∧ (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)

г) (A ∧ B ∧ C) ∨ (A ∧ B ∧ □C)

д) (A ∨ □A) ∧ B

ЗАДАЧИ

✔ **Определите, кто из подозреваемых участвовал в преступлении, если известно:**

1) *Если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал;*

2) *Если Иванов не участвовал, то Сидоров не участвовал.*

Решение: F=□И∨П⇒С ∧ □И ⇒□С ответ: Иванов

И	П	С	□И	□С	□И∨П	□И∨П⇒С	□И ⇒□С	F
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0

ЗАДАЧИ

- **Аня, Вика и Сергей решили пойти в кино. Учитель, хорошо знавший ребят, высказал предположения:**

1. *Аня пойдет в кино только тогда, когда пойдут Вика и Сергей;*
2. *Аня и Сергей пойдут в кино вместе или же оба останутся дома;*
3. *Чтобы Сергей пошел в кино, необходимо, чтобы пошла Вика*.

Когда ребята пошли в кино, оказалось, что учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинными оказались только два. Кто из ребят пошел в кино?

- **В нарушении правил обмена валюты подозреваются четыре работника банка – A, B, C, D. Известно, что:**

1. *Если A нарушил, то и B нарушил правила обмена валюты.*
2. *Если B нарушил, то и C нарушил или A не нарушал.*
3. *Если D не нарушал, то A нарушил, а C не нарушал.*
4. *Если D нарушил, то и A нарушил.*

Кто из подозреваемых нарушил правила обмена валюты?

ТЕМЫ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К помощи логики человек прибегает очень часто: распутывая противоречивые показания, составляя различные расписания и во многих других случаях.

Среди задач, для решения которых привлекается ЭВМ, немало таких, которые по традиции принято называть логическими. Кто не знает шуточной задачи о перевозке волка, козы и капусты с одного берега на другой! В такой задаче властвует не арифметика, а умение правильно рассуждать.

В жизни некоторые суждения и связи между ними бывают столь противоречивыми, что такие твердые логические орешки не под силу раскусить даже вдумчивому математику. Тогда на помощь в решении таких логических задач привлекают ЭВМ. Необходимо подчеркнуть, что умение использовать логические операции (**AND, OR, NOT, EQV, IMP) повышают эффективность программирования. Именно формируя условия в операторе условной передачи управления (IF…THEN), программист использует логические операции.**

В основе теории создания и работы дискретных преобразователей информации (вентили, сумматоры, триггеры и т.д.) лежат аппарат алгебры логики, сведения о двоичной арифметике и теории кодирования. **«Электронные мозги ошибаются гораздо тоньше»**

ТЕМЫ

Пясецкая Анна Андреевна

Учитель информатики и ИКТ МОУ Черкасской средней школы