

ЧИСЛО «ПИ» И СПОСОБЫ ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЯ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Автор: Орехова Екатерина, ученица
II класса, МКОУ Плесской СОШ,
обучающаяся в объединении
«Программирование» МКОУ ДОД
ЦДЮТ

Научный руководитель: Юдин
Андрей Борисович, учитель
математики МКОУ Плесской
СОШ, педагог дополнительного
образования МКОУ ДОД ЦДЮТ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

- ▶ **Выяснить, каким способом можно составить алгоритмы для нахождения числа π с помощью компьютера и узнать, какой способ поможет более точно вычислить это число.**

ЗАДАЧИ РАБОТЫ

- ▶ Ознакомиться с историей числа Пи
- ▶ Найти необходимые формулы для вычисления числа Пи
- ▶ Преобразовать найденные формулы в алгоритмы в системе программирования PascalABC
- ▶ Узнать, какой способ вычисления наиболее точный

- ▶ Число Пи (греческая буква π) — это математическая константа, выражающая отношение длины окружности к длине её диаметра. Число Пи иррационально и бесконечно.



ФОРМУЛЫ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ЧИСЛА

- ▶ **Ряд Мадхавы**
- ▶ **Формула Джона Валлиса**
- ▶ **Формула Вильгельма Лейбница**
- ▶ **Формула Леонарда Эйлера**
- ▶ **Нахождение числа Пи с помощью рядов**
- ▶ **Формула Джона Мэчина**
- ▶ **Алгоритм Brenta-Саламина**

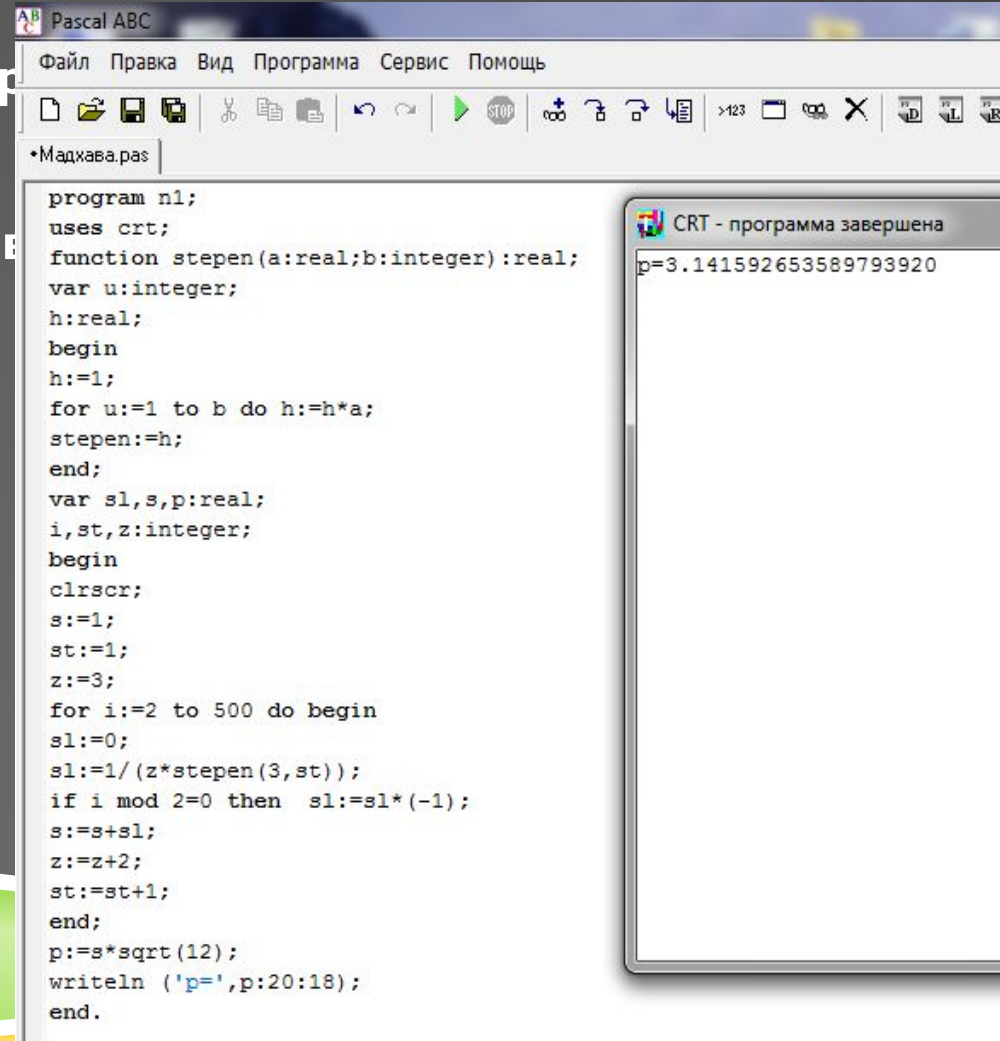
МАДХАВЫ

▶ формула $\pi = \sqrt{12} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right)$

▶ Вычисления на компьютере

▶ Количество верных знаков
после запятой: 15

3,14159265358979323846



```
Pascal ABC
Файл  Правка  Вид  Программа  Сервис  Помощь
Мадхава.pas
program n1;
uses crt;
function stepen(a:real;b:integer):real;
var u:integer;
h:real;
begin
h:=1;
for u:=1 to b do h:=h*a;
stepen:=h;
end;
var s1,s,p:real;
i,st,z:integer;
begin
clrscr;
s:=1;
st:=1;
z:=3;
for i:=2 to 500 do begin
s1:=0;
s1:=1/(z*stepen(3,st));
if i mod 2=0 then s1:=s1*(-1);
s:=s+s1;
z:=z+2;
st:=st+1;
end;
p:=s*sqrt(12);
writeln ('p=',p:20:18);
end.
```

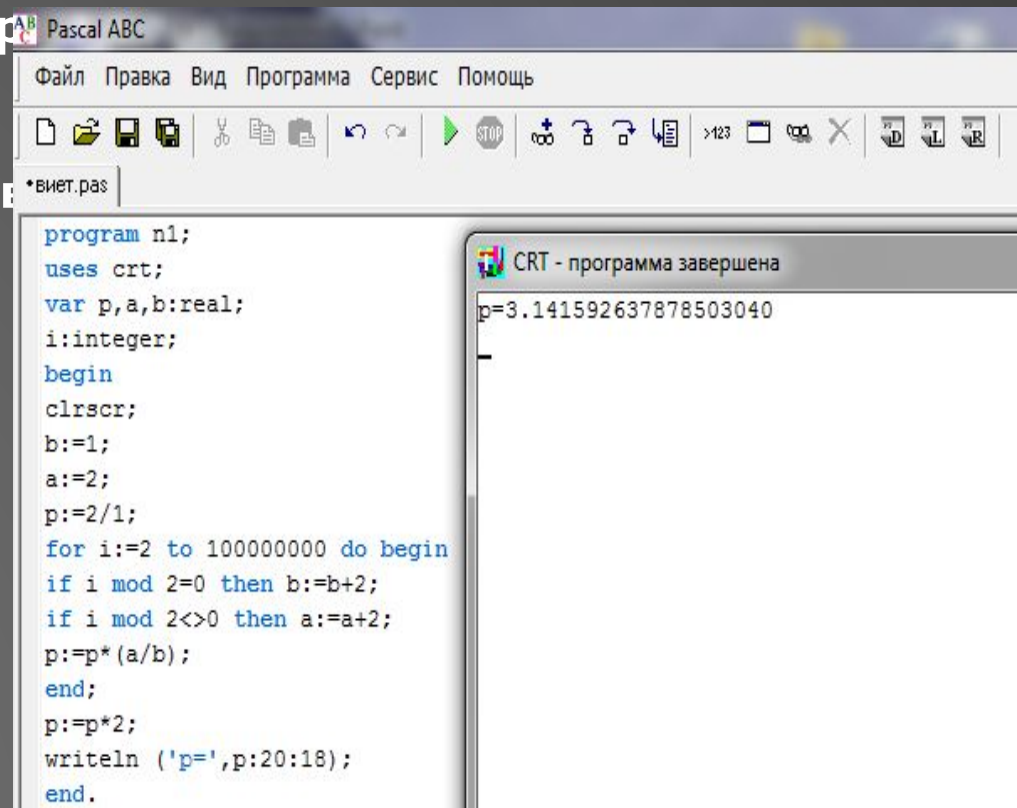
CRT - программа завершена
p=3.14159265358979320

ФОРМУЛА ДЖОНА ВАЛЛИСА

▶ формула:
$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

▶ Вычисления на компьютере

▶ Количество верных знаков
после запятой: 7



```
program n1;
uses crt;
var p,a,b:real;
i:integer;
begin
clrscr;
b:=1;
a:=2;
p:=2/1;
for i:=2 to 100000000 do begin
if i mod 2=0 then b:=b+2;
if i mod 2<>0 then a:=a+2;
p:=p*(a/b);
end;
p:=p*2;
writeln ('p=',p:20:18);
end.
```

CRT - программа завершена
p=3.141592637878503040

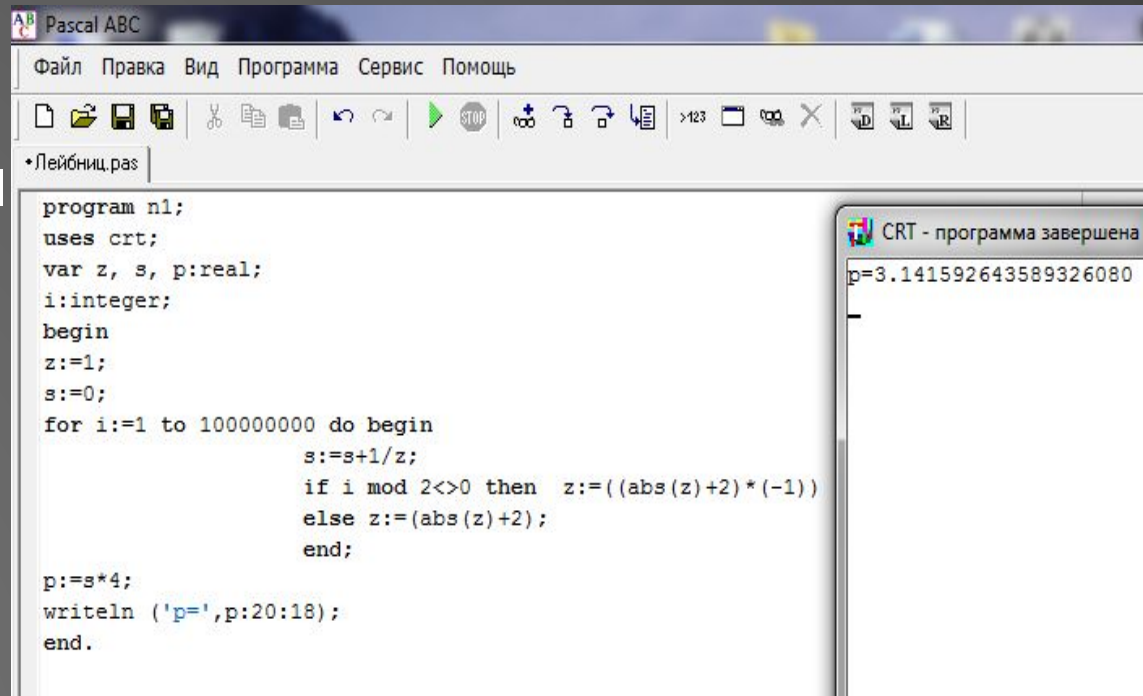
3,14159265358979323846

ФОРМУЛА ВИЛЬГЕЛЬМА ЛЕЙБНИЦА

▶ формула:
$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

▶ Вычисления на компьютере:

▶ Количество верных знаков после запятой: 1



```
program n1;
uses crt;
var z, s, p:real;
i:integer;
begin
z:=1;
s:=0;
for i:=1 to 100000000 do begin
s:=s+1/z;
if i mod 2<>0 then z:=((abs(z)+2)*(-1))
else z:=(abs(z)+2);
end;
p:=s*4;
writeln ('p=',p:20:18);
end.
```

CRT - программа завершена
p=3.141592643589326080

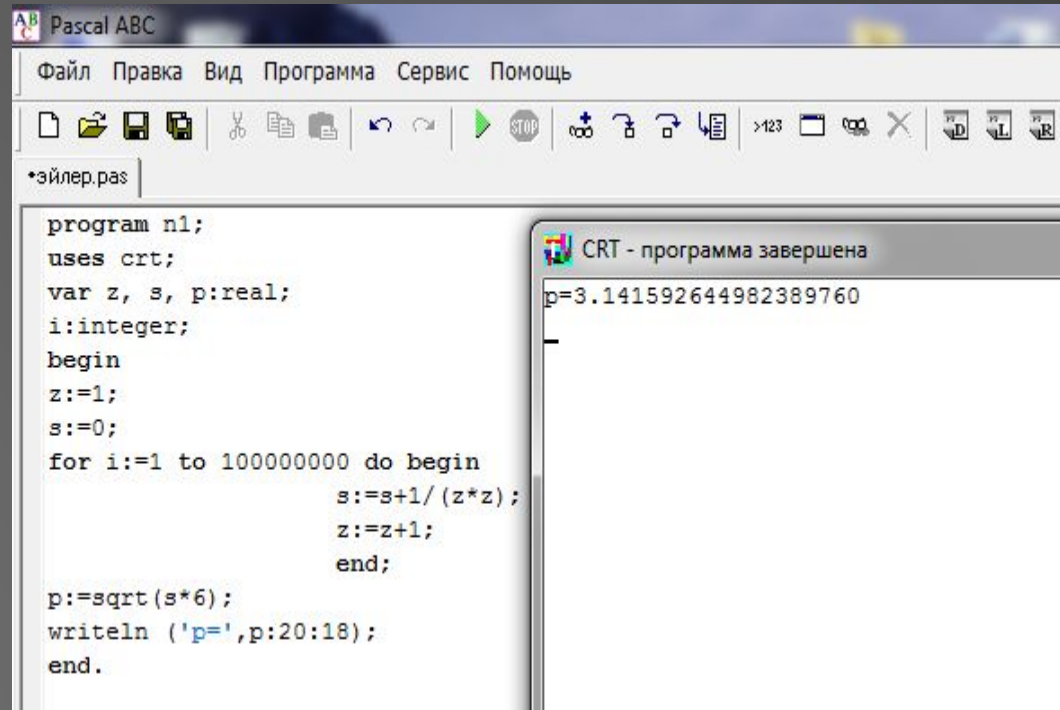
3,14159265358979323846

ФОРМУЛА ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

▶ формула:
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

▶ Вычисления на компьютере:

▶ Количество верных знаков после запятой: 8



```
program n1;
uses crt;
var z, s, p:real;
i:integer;
begin
z:=1;
s:=0;
for i:=1 to 100000000 do begin
s:=s+1/(z*z);
z:=z+1;
end;
p:=sqrt(s*6);
writeln ('p=',p:20:18);
end.
```

CRT - программа завершена
p=3.141592644982389760

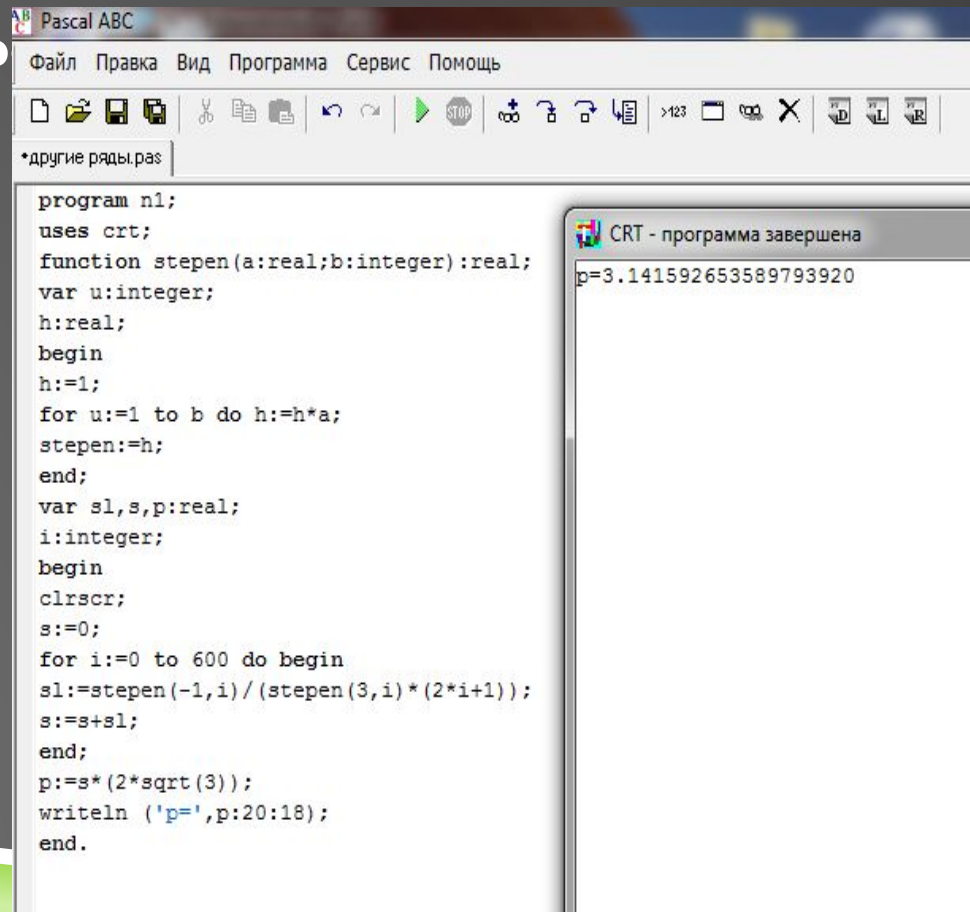
3,14159265358979323846

ОБОЗРАЧЕНИЕ ЧИСЛА ПИ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

▶ формула:
$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k (2k+1)}$$

▶ Вычисления на компьютере

▶ Количество верных
знаков после запятой: 7



```
program n1;  
uses crt;  
function stepen(a:real;b:integer):real;  
var u:integer;  
h:real;  
begin  
h:=1;  
for u:=1 to b do h:=h*a;  
stepen:=h;  
end;  
var s1,s,p:real;  
i:integer;  
begin  
clrscr;  
s:=0;  
for i:=0 to 600 do begin  
s1:=stepen(-1,i)/(stepen(3,i)*(2*i+1));  
s:=s+s1;  
end;  
p:=s*(2*sqrt(3));  
writeln ('p=',p:20:18);  
end.
```

CRT - программа завершена
p=3.141592653589793920

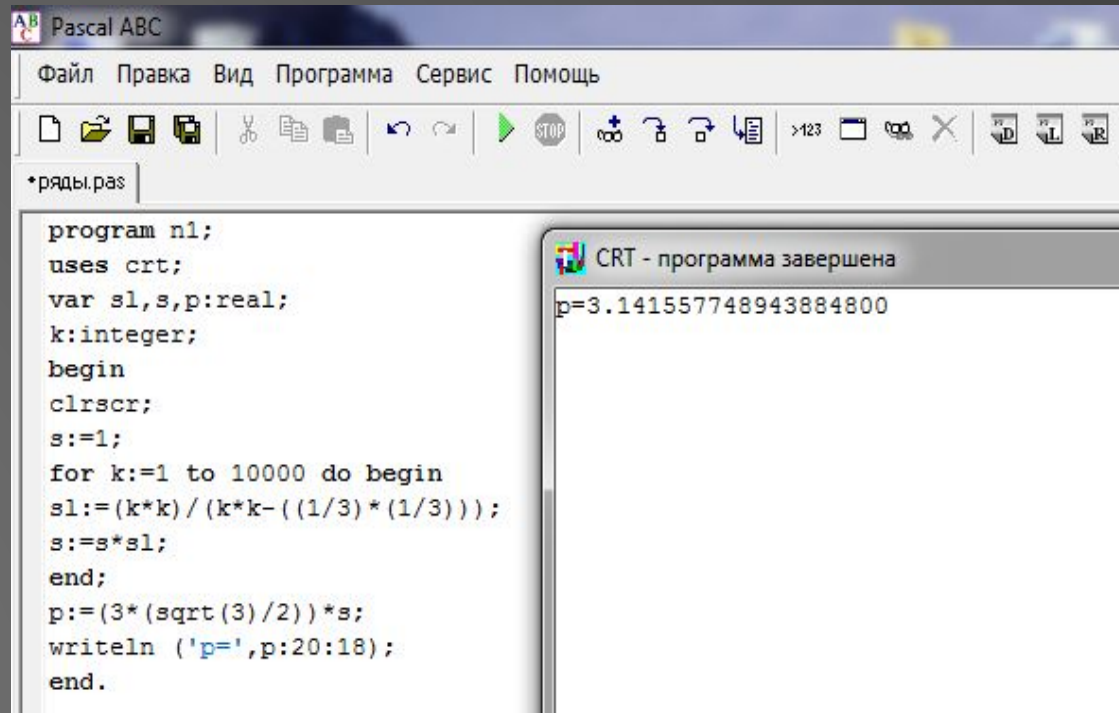
3,14159265358979323846

КОЖДЕНИЕ ЧИСЛА ПИ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ

▶ Формула:
$$\pi = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

▶ Вычисления на компьютере:

▶ Количество верных знаков после запятой: 4



```
program n1;
uses crt;
var s1,s,p:real;
k:integer;
begin
clrscr;
s:=1;
for k:=1 to 10000 do begin
s1:=(k*k)/(k*k-((1/3)*(1/3)));
s:=s*s1;
end;
p:=(3*(sqrt(3)/2))*s;
writeln ('p=',p:20:18);
end.
```

CRT - программа завершена
p=3.141557748943884800

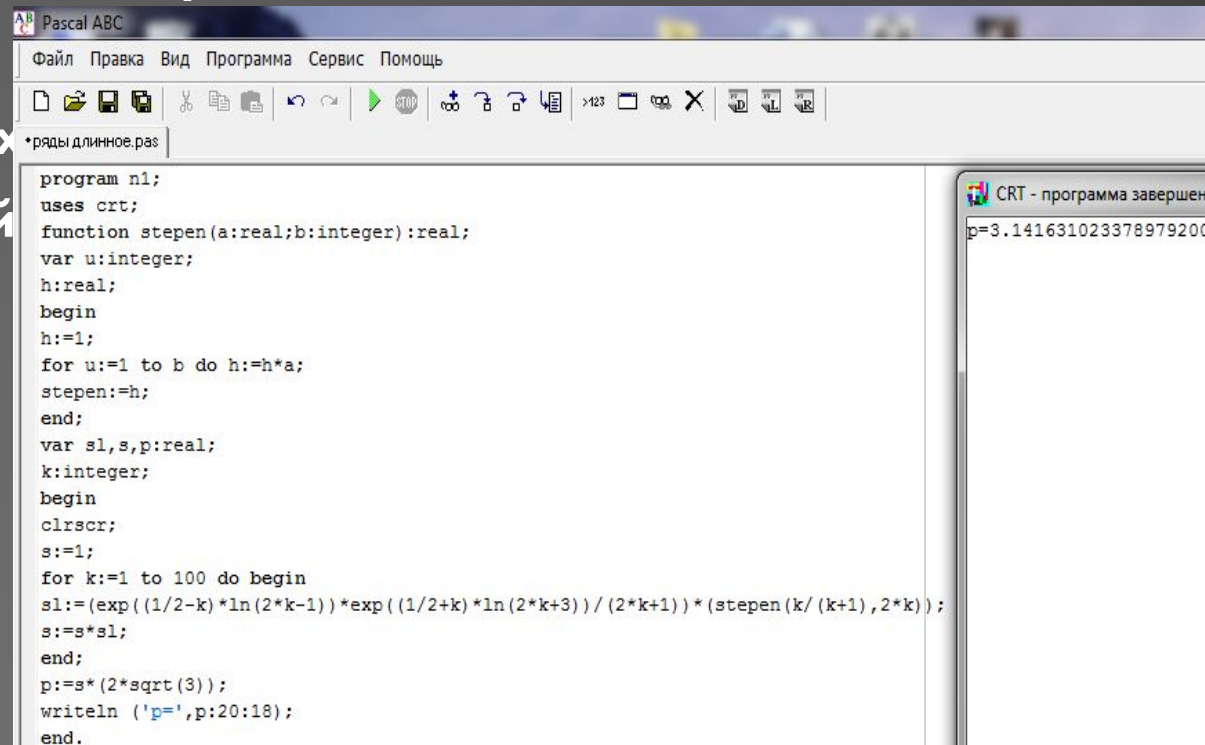
3,14159265358979323846

ОБОЗНАЧЕНИЕ ЧИСЛА ПИ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

▶ формула
$$\pi = 2\sqrt{3} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^{\frac{1}{2}-k} (2k+3)^{k+\frac{1}{2}}}{2k+1} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{2k}$$

▶ Вычисления на компьютере:

▶ Количество верных
знаков после запятой



```
program n1;
uses crt;
function stepen(a:real;b:integer):real;
var u:integer;
h:real;
begin
h:=1;
for u:=1 to b do h:=h*a;
stepen:=h;
end;
var s1,s,p:real;
k:integer;
begin
clrscr;
s:=1;
for k:=1 to 100 do begin
s1:=(exp((1/2-k)*ln(2*k-1))*exp((1/2+k)*ln(2*k+3))/(2*k+1))*(stepen(k/(k+1),2*k));
s:=s*s1;
end;
p:=s*(2*sqrt(3));
writeln('p=',p:20:18);
end.
```

CRT - программа завершена
p=3.141631023378979200

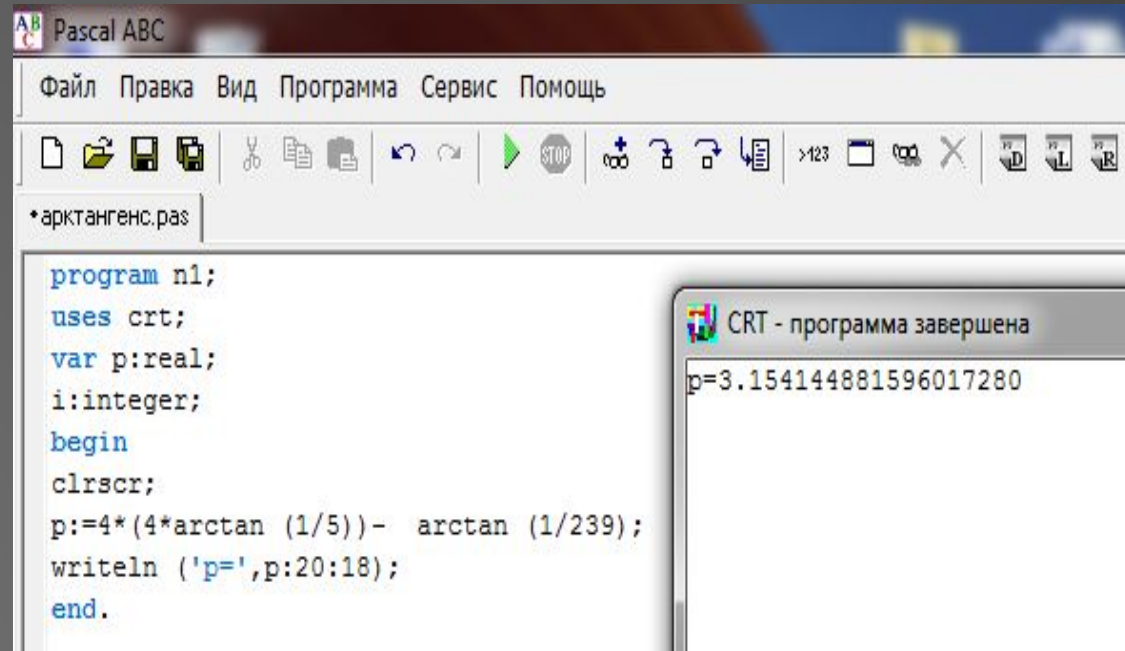
3,14159265358979323846

ФОРМУЛА ДЖОНА МЭЧИНА

▶ формула $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$

▶ Вычисления на компьютере:

▶ Количество верных знаков после запятой: 1



```
program n1;
uses crt;
var p:real;
i:integer;
begin
clrscr;
p:=4*(4*arctan (1/5))- arctan (1/239);
writeln ('p=',p:20:18);
end.
```

CRT - программа завершена
p=3.154144881596017280

3,14159265358979323846

АЛГОРИТМ БРЕНТА-САЛАМИНА

▶ Формула:

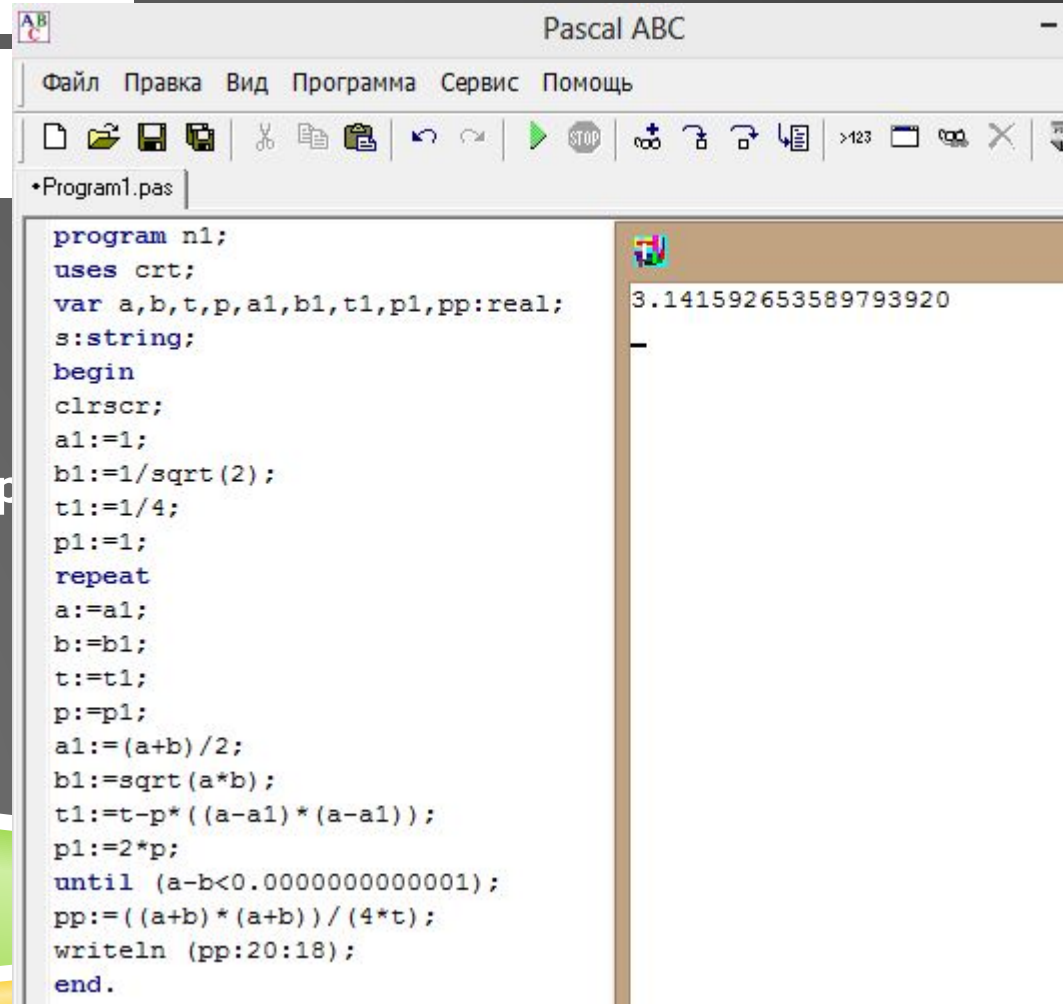
$$a_0 = 1 \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad t_0 = \frac{1}{4} \quad p_0 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$
$$t_{n+1} = t_n - p_n(a_n - a_{n+1})^2 \quad p_{n+1} = 2p_n$$

$$\pi \approx \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}$$

- ▶ Вычисления на компьютере
- ▶ Количество верных знаков после запятой: 15

3,14159265358979323846



```
program n1;
uses crt;
var a,b,t,p,a1,b1,t1,p1,pp:real;
s:string;
begin
clrscr;
a1:=1;
b1:=1/sqrt(2);
t1:=1/4;
p1:=1;
repeat
a:=a1;
b:=b1;
t:=t1;
p:=p1;
a1:=(a+b)/2;
b1:=sqrt(a*b);
t1:=t-p*((a-a1)*(a-a1));
p1:=2*p;
until (a-b<0.000000000000001);
pp:=((a+b)*(a+b))/(4*t);
writeln(pp:20:18);
end.
```

3.14159265358979320

ВЫВОД

После анализа решенных мною задач, я выяснила, что наиболее точными способами нахождения числа π на компьютере являются:

- ▶ Ряд Мадхавы (15 знаков)
- ▶ Формула Лейбница (11 знаков)
- ▶ Алгоритм Brenta-Саламина (15 знаков)

Классические системы программирования, к которым относится Pascal, не пригодны для вычислений больших и очень маленьких чисел, поэтому, в приведенных мною примерах, я не достигла точности, описанной в литературе.

ВЫВОД И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Благодаря данной работе:

- ▶ Я научилась составлять программы для вычисления числа π различными способами; из этих способов я выбрала наиболее точные
- ▶ Познакомилась с историей числа π
- ▶ Узнала основные способы нахождения числа π