КУРСОВА РОБОТА

з дисципліни «Числові методи та моделювання на ЕОМ»
на тему:Розв’язання системи лінійних рівнянь великої розмірності. Метод Гаусса-Зейделя

Студента 3 курсу В групи
Кірман С. Ю.

Керівник доцент кафедри
автоматизації та комп’ютерно
-інтегрованих технологій,
Гладка Л.І.

ЗМІСТ

- **Актуальність курсової роботи** полягає в тому, що рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь – одна з основних завдань обчислювальної лінійної алгебри. Аналітичні методи розв'язання математичних задач, як і раніше, дуже важливі. Чисельні методи суттєво розширюють можливості розв'язання наукових та інженерних задач, адже з ЕОМ ми зменшуємо час та збільшуємо точністю обрахунків.

- **Об’єктом дослідження курсової роботи** є системи лінійних рівнянь великої розмірності та класифікація методів їх розв’язання.
- **Предмет дослідження** – метод Гаусса-Зейделя для вирішення систем лінійних рівнянь великої розмірності точним методом.
- **Мета дослідження** полягає в теоретичному вивченні методів розв’язання СЛАР та практичному використанні набутих знань за допомогою мови програмування С++ в середовищі QT 5.

Завдання:

- Розглянути методи розв’язання СЛАР.
- Розробити алгоритм розв’язання СЛАР методом Гаусса-Зейделя.
- Розробити програмний продукт для розв’язання СЛАР методом Гаусса-Зейделя.

$x_1, \ x_2, \ldots x_n$

СЛАР

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) називають систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Це система m лінійних рівнянь з *n* невідомими, де:

$x_1, \ x_2, \ldots x_n$ є невідомі,

$a_{11}, \ a_{12}, \ldots a_{mn}$ є коефіцієнти системи,

$b_1, \ b_2, \ldots b_n$ – вільні члени

Класифікація методів розв’язання СЛАР

- *Точні методи*
- До точних методів належать методи, що дають точний результат у припущенні ідеальної арифметики. Точні методи можна застосовувати й тоді, коли коефіцієнти й вільні члени рівняння задані в аналітичній, символьній формі.

- *Ітераційні методи*
- Ітераційні методи встановлюють процедуру уточнення певного початкового наближення до розв'язку. При виконанні умов збіжності вони дозволяють досягти будь-якої точності просто повторенням ітерацій. Перевага цих методів у тому, що часто вони дозволяють досягти розв'язку з наперед заданою точністю швидше, а також розв'язувати більші системи рівнянь.

Класифікація методів розв’язання СЛАР

Рис.1.1 Чисельні методи розв`язання СЛАР

Алгоритм Гаусса-Зейделя

Проілюструємо метод Гаусса-Зейделя на прикладі рішення системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2.2)$$

Виразимо невідомі x_1, x_2, x_3з першого, другого, і третього рівняння відповідно:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \qquad (2.3)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \qquad (2.4)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_3) \qquad (2.5)$$

Задаємо деякі початкові значення для невідомих $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0$ підставляємо в праву частину рівнянь (2.3) і отримуємо нові наближені значення для x_1:

Алгоритм Гаусса-Зейделя

$$x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0)$$

Використовуючи значення x_1^1 та x_3^0підставляємо його у формулу (2.4) знаходимо x_2^1:

$$x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0)$$

Далі використовуємо значення x_1^1, x_2^1 для знаходження x_3^1:

$$x_3^1 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1)$$

На цьому завершується перша ітерація. Використовуючи значення x_1^1, x_2^1, x_3^1 можна таким же методом провести другу ітерацію і знайти наступні наближені значення x_1^2, x_2^2, x_3^2 і так далі.

Алгоритм Гаусса-Зейделя

Загальна формула виглядає так:

$$x_1^k = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}$$

$$x_2^k = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_2^k - a_{23}x_3^{(k-1)}$$

$$x_3^k = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k$$

Ітерацій процес буде продовжуватиметься до тих доки не буде досягнута потрібна точність

$$\left\| x^{k+1} - x^k \right\| \le e$$

Умови збіжності ітераційного процесу

Ітераційний процес розв’язання системи збігається, якщо елементи головної діагоналі більше суми модулів елементів відповідної стрічки крім діагонального елементу цієї стрічки, тобто виконується умова: або умова

$$|\alpha_{ii}| > \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \text{ або умова}$$

$$|\alpha_{jj}| > \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|$$

Реалізація алгоритму розв’язку СЛАР методом Гаусса-Зейделя в середовищі QT 5

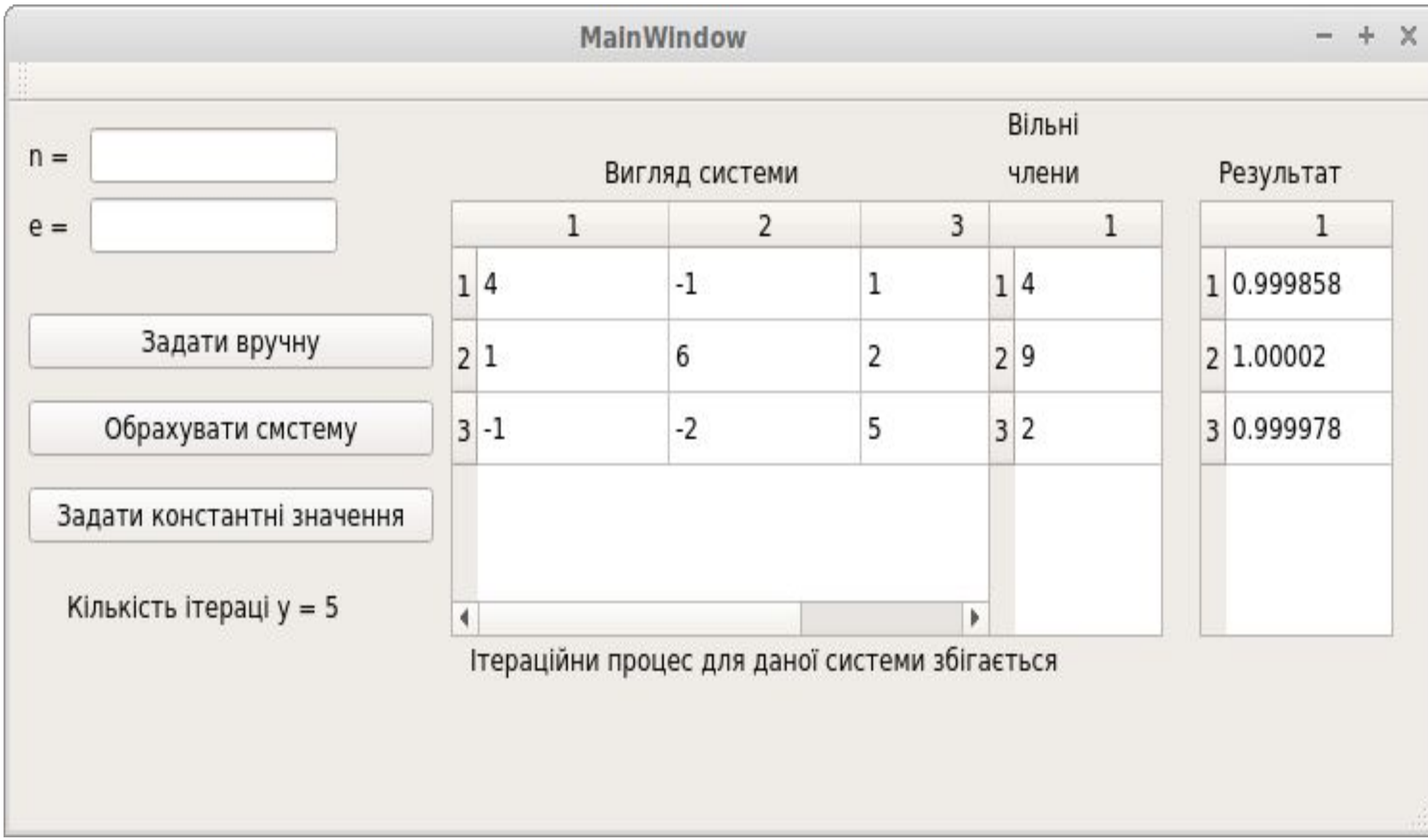

Рис.3.1.Результат роботи програми при заданій константних значень

Реалізація алгоритму розв'язку СЛАР методом Гаусса-Зейделя в EXCEL

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		4	-1	1	4			
2		1	6	2	9			
3		-1	-2	5	2			
4								
5								
6	I	X1	X2	X3	Точність			
7	0	4,0000	9,0000	2,0000				
8	1	2,7500	0,3750	1,1000	8,6250			
9	2	0,8188	0,9969	0,9625	1,9313			
10	3	1,0086	1,0111	1,0061	0,1898			
11	4	1,0012	0,9977	0,9993	0,0133			
12	5	0.999859	1,0000	1,0000	0,0001			
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								

Рис.3.2. Результат роботи в EXCEL

ВИСНОВКИ

Вході курсової роботи реалізовано наявні знання з курсу лінійної алгебри за рішенням СЛАР в програмній інтерпретації на мові програмування C++ в середовищі QT. Алгоритм програми було перевірино в середовищі Microsoft Excel.

По завершенні роботи були досягнуті необхідні цілі і виконані поставлені **завдання**.

- Було проведено аналіз методів розв'язання систем лінійних рівнянь і сучасних засобів вирішення з виявленням їх характерних особливостей;
- Описаний математичний метод, необхідний для вирішення поставленого завдання, визначені вхідні та вихідні дані, розроблено алгоритм реалізації програми;
- Описана розробка програми (системні вимоги) і діалог з користувачем, наведено контрольний приклад.

Дякую за увагу!