Деревья оптимального поиска (ДОП)

До сих пор предполагалось, что *все вершины дерева ищутся одинаково часто*.

Однако встречаются ситуации, когда **известны вероятности обращения к отдельным ключам дерева.**

Обычно для таких ситуаций характерно постоянство ключей (структура дерева остается неизменной).

Типичный пример - ***сканер компилятора***, который определяет, относится ли каждое слово программы (идентификатор) **к классу ключевых слов**.

Статистические измерения на сотнях компилируемых программ могут дать информацию об **относительных частотах** появления в тексте программы конкретных ключевых слов.

- Припишем каждой вершине дерева V_i вес W_i, пропорциональный частоте поиска этой вершины.

Пример. Если из каждых **100 операций** поиска **15 операций** приходятся на вершину V_1, то $W_1 = 15$.

Сумма весов всех вершин дает **вес дерева W**:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Каждая вершина V_i расположена на уровне h_i, корень дерева – на уровне 1.

Уровень вершины h_i - **количество операций сравнения**, необходимых для поиска данной вершины.

Определение. В дереве с **n** вершинами **средневзвешенная высота** равна

$$C_{ср} = h_{срв} = \frac{W_1 h_1 + W_2 h_2 + \cdots + W_n h_n}{\mathbf{W}}$$

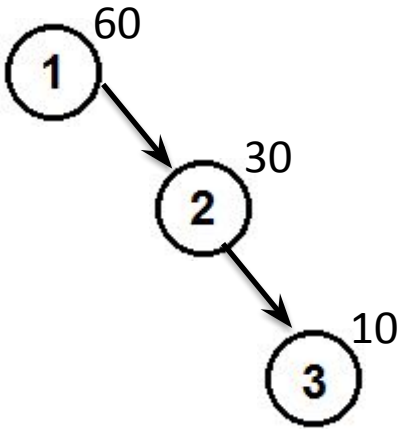
Определение. Дерево, имеющее ***минимальную средневзвешенную высоту***, называется деревом оптимального поиска **ДОП**.

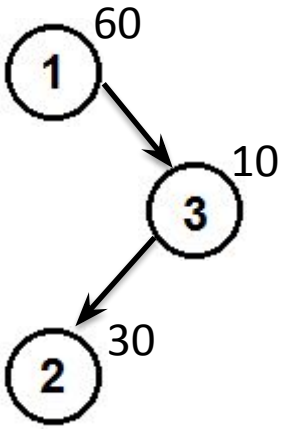
Пример: Рассмотрим множество из трех ключей

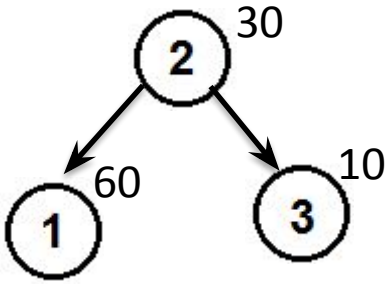
$$V_1 = 1, \qquad V_2 = 2, \qquad V_3 = 3;$$

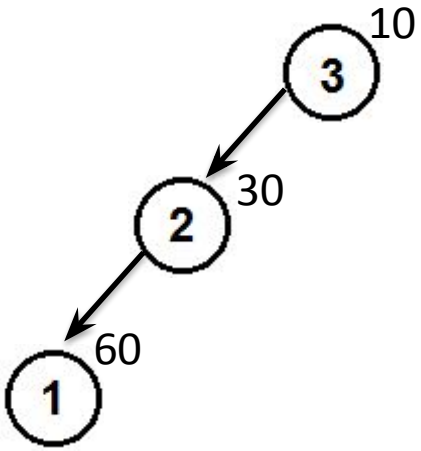
$$W_1 = 60, \; W_2 = 30, \; W_3 = 10; \; \mathbf{W}=100.$$

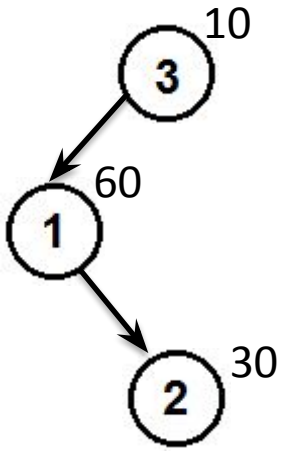
Эти три ключа можно расположить в дереве поиска пятью различными способами:











1. $h_{срв} = \frac{60*1+30*2+10*3}{100} = 1,5$

2. $h_{срв} = \frac{60*1+10*2+30*3}{100} = 1,7$

3. $h_{срв} = \frac{30*1+60*2+10*2}{100} = 1,7$

4. $h_{срв} = \frac{10*1+30*2+60*3}{100} = 2,5$

5. $h_{срв} = \frac{10*1+60*2+30*3}{100} = 2,2$

Очевидно, для **минимизации** средней длины пути поиска нужно стремиться **вершины с наибольшим весом располагать ближе к корню дерева.**

<u>Задача построения ДОП</u>

может ставиться **в двух вариантах:**

1. Известны вершины и их веса (дерево не меняется в процессе поиска).
2. Вес вершины определяется в процессе работы (после каждого поиска вершины её вес увеличивается на единицу).

В этом случае нужно перестраивать структуру дерева.

- **Точный алгоритм построения ДОП**

3 вершины = 5 конфигураций дерева

4 вершины = 14 конфигураций дерева

5 вершин = 62 конфигурации дерева

Количество возможных конфигураций дерева из **n** вершин ***с ростом n растет экспоненциально***, т.е. **как** e^n.

Таким образом, **при больших n задача построения ДОП кажется безнадежной**.

Однако оптимальные деревья обладают **важным свойством**, которое помогает их обнаруживать:

все их поддеревья также оптимальны.

На этом свойстве основан алгоритм, который находит все большие и большие оптимальные поддеревья, начиная с отдельных вершин.

Т.к. вес дерева постоянный, то вместо средневзвешенной высоты будем рассматривать **взвешенную высоту дерева**:

$$\mathbf{P} = W_1 h_1 + W_2 h_2 + \cdots + W_n h_n$$

Для ДОП справедливо соотношение:

$$\mathbf{P} = \mathrm{P}_{\mathbf{L}} + \mathbf{W} + \mathrm{P}_{\mathbf{R}},$$

где P_L , P_R — взвешенные высоты левого и правого поддеревьев.

Обозначим

T_{ij} - оптимальное поддерево,

состоящее из вершин $V_{i+1}, \ldots, V_j$

W_{ij} - вес поддерева T_{ij} P_{ij} — взвешеная высота T_{ij}

Очевидно,

P = $\mathrm{P}_{0,n}$ - взвешенная высота всего дерева из n вершин

W = $W_{0,n}$ - вес всего дерева

T_{ii} - пустое поддерево → $W_{i,i}$ **= 0,** $\mathrm{P}_{i,i}$ **= 0.**

Величины $\mathbf{W_{ij}}$ и $\mathrm{P_{ij}}$ вычисляются по рекуррентным формулам для всех возможных поддеревьев:

$$(1) \qquad W_{ij} = W_{i,j-1} + W_j \qquad 0 \le i < j \le n$$

$$(2) \qquad P_{ij} = W_{ij} + \min_{i < k \le j} (P_{i,k-1} + P_{k,j}) \qquad 0 \le i < j \le n$$

При нахождении **min** будем запоминать **k**, при котором достигается min, обозначать его **k*** и записывать в матрицу r_{ij}.

Это значение является **индексом (номером) корня поддерева T_{ij} в упорядоченном массиве вершин.**

№	1	2	3			…			n
K	K_1	K_2	K_3			…			K_n

Матрица корней поддеревьев r_{ij} полностью определяет структуру дерева.

Пример:

V_1=1, V_2=2, V_3=3;

W_1=60, W_2=30, W_3=10; **W** =100

$T_{00}, T_{11}, T_{22}, T_{33}$ - пустые поддеревья

T_{01}, T_{12}, T_{23} - поддеревья из одной вершины

T_{02}, T_{13} - поддеревья из двух вершин

T_{03} - дерево из трех вершин

	0	1	2	3
0	0	60	90	100
1		0	30	40
2			0	10
3				0

Пример. V_1=1, V_2=2, V_3=3;

W_1=60, W_2=30, W_3=10; **W** =100

Вычисление взвешенных высот поддеревьев:

$$\boldsymbol{P_{01}} = W_{01} + \min_{0<k\leq 1}(P_{00} + P_{11}) = 60 \quad \textbf{k*=1}$$

$$\boldsymbol{P_{12}} = W_{12} + \min_{1<k\leq 2}(P_{11} + P_{22}) = 30 \quad \textbf{k*=2}$$

$$\boldsymbol{P_{23}} = W_{23} + \min_{2<k\leq 3}(P_{22} + P_{33}) = 10 \quad \textbf{k*=3}$$

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	60		
1		0	30	
2			0	10
3				0

$$P_{02} = W_{02} + \min_{0<k\le 2} (P_{00} + P_{12},\ P_{01} + P_{22}) =$$

$$= 90 + \min_{k=1} (0+30,\ 60+0) = 120 \qquad k^*=1$$

$$P_{13} = W_{13} + \min_{1<k\le 3} (P_{11} + P_{23},\ P_{12} + P_{33}) =$$

$$= 40 + \min_{k=2} (0+10,\ 30+0) = 50 \qquad k^*=2$$

$$P_{03} = W_{03} + \min_{0<k\le 3} (P_{00} + P_{13},\ P_{01} + P_{23},\ P_{02} + P_{33}) =$$

$$= 100 + \min_{k=1} (0+50,\ 60+10,\ 120+0) = 150 \qquad k^*=1$$

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	60	120	150
1		0	30	50
2			0	10
3				0

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	1	1	1
1		0	2	2
2			0	3
3				0

Идея алгоритма построения ДОП по матрице r_{ij}

Исходные вершины должны быть **упорядочены по ключам**, в матрице берем $\boldsymbol{r_{0,n}}$ – это номер корня всего дерева в упорядоченном массиве вершин.

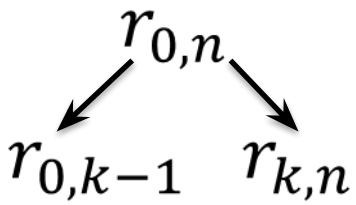
Добавляем эту вершину в дерево через обычное добавление в СДП.

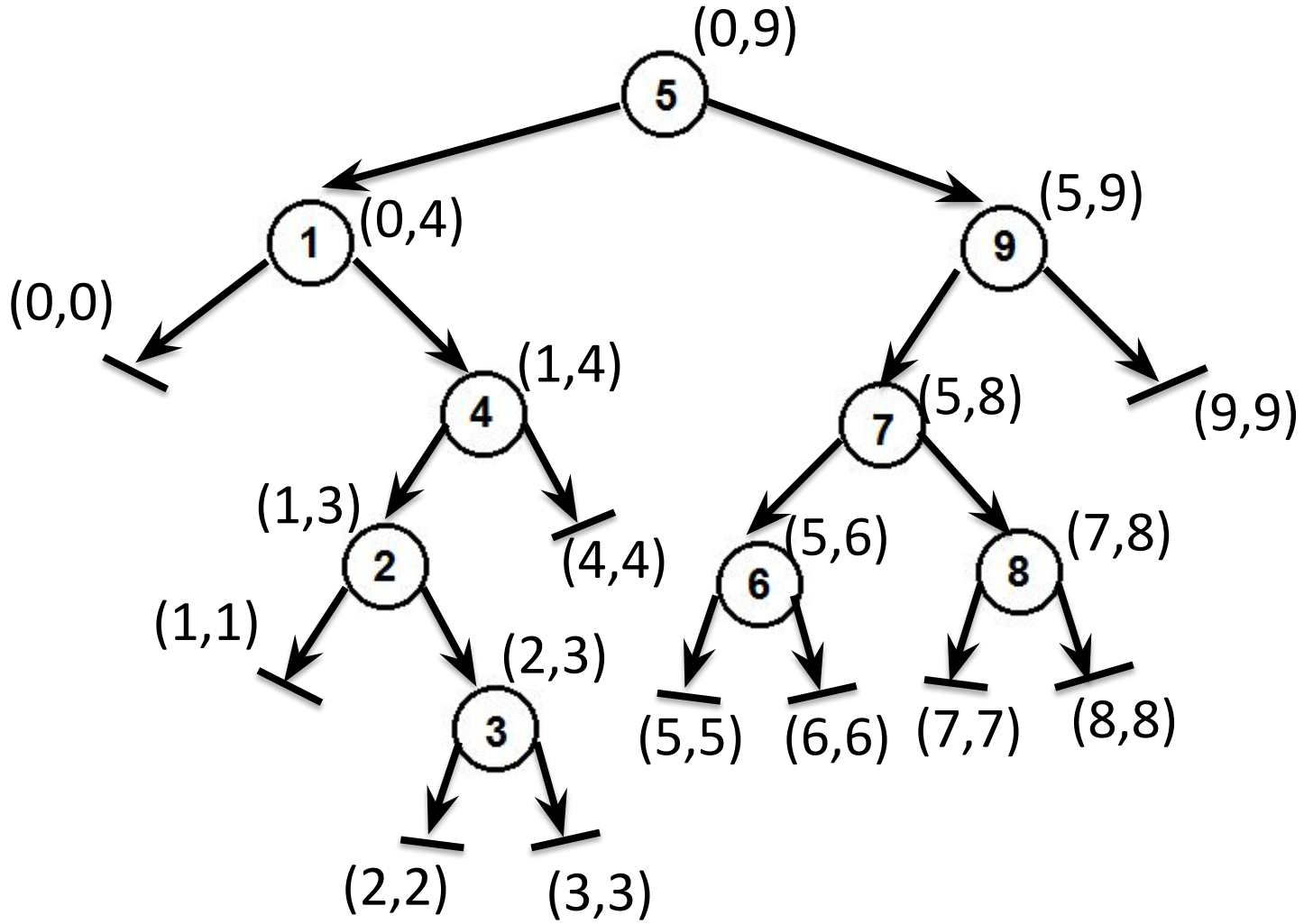
Затем в матрице $\boldsymbol{r_{ij}}$ берем значение $\boldsymbol{r_{0,k-1}}$ ($\boldsymbol{k=r_{0,n}}$) и добавляем эту вершину в левое поддерево, берем $\boldsymbol{r_{k,n}}$ и добавляем вершину в правое поддерево и т.д.

Пример: Возьмем произвольную матрицу r_{ij} для 9 вершин и построим по ней ДОП.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	1	1	1	**1**	4	4	5	5	**5**
1		0	2	**2**	**4**	5	5	5	5	7
2			0	**3**	4	5	5	5	5	7
3				0	4	5	5	5	5	7
4					0	5	5	5	7	7
5						0	**6**	7	**7**	**9**
6							0	7	7	9
7								0	**8**	9
8									0	9
9										0

Номер вершины совпадает с ключом


$r_{0,n}$
$r_{0,k-1}$
$r_{k,n}$


(0,9)
5
1
(0,4)
9
(5,9)
(0,0)
4
(1,4)
7
(5,8)
(9,9)
(1,3)
2
(4,4)
6
(5,6)
8
(7,8)
(1,1)
(2,3)
3
(5,5)
(6,6)
(7,7)
(8,8)
(2,2)
(3,3)

Трудоемкость метода:

Существует $\frac{n^2}{2}$ значений P_{ij}, формула (2) требует выбора одного из **0 ≤ i < j ≤ n** значений, трудоемкость сводится к $\frac{n^3}{6}$ операций, т.е. **трудоемкость кубическая.**

<u>В матрице существует закономерность</u>

$$r_{i,j-1} \leq r_{i,j} \leq r_{i+1,j}$$

Это позволяет сократить поиск r_{ij} до этого диапазона, что дает возможность уменьшить трудоемкость до **квадратичной**.

Программист должен помнить

Компьютер не признает никаких интуитивных выводов и предположений со слов "кажется".

Постоянно гореть работой, изобретать — такой выбор творческих людей.

Алгоритм построения ДОП

Вычисление AW - матрицы весов:

DO (i=0, n)

DO (j=i+1, n)

$AW_{ij} = AW_{ij-1} + W_i$

OD

OD

Вычисление матриц AP и AR:

Обозначим **h = j – i** – размер поддерева

<u>При h =1:</u>

DO (i=0, n-1)

j=i+1; $AP_{ij} = AW_{ij}$; $AR_{ij} = j$

OD

<u>При h>1:</u>

DO (h=2,3,…,n) …

Алгоритм построения ДОП

При h>1: h = j–i – размер поддерева

DO (h = 2, 3, …, n)

DO (i = 0, ..., n – h)

j := i + h

m := $AR_{i, j-1}$

min : = $AP_{i, m-1} + AP_{m, j}$

DO (k = m+1, ..., $AR_{i+1, j}$)

x : = $AP_{i, k-1} + AP_{k, j}$

IF (x < min) m := k , min := x FI

OD

$AP_{i, j}$:= min + $AW_{i, j}$

$AR_{i, j}$:= m

OD

OD

Создание дерева: Create Tree(0,n)

Create Tree(L,R) // L,R - границы массива вершин V

IF(L<R)

k = AR_{LR};

Добавить (Root, V_k)

Create Tree(L,k-1)

Create Tree(k,R)

FI

Трудоемкость точного алгоритма построения ДОП:

по времени **O(n^2)**

по занимаемой памяти **O(n^2)**

При больших объемах деревьев такие алгоритмы становятся неэффективными.

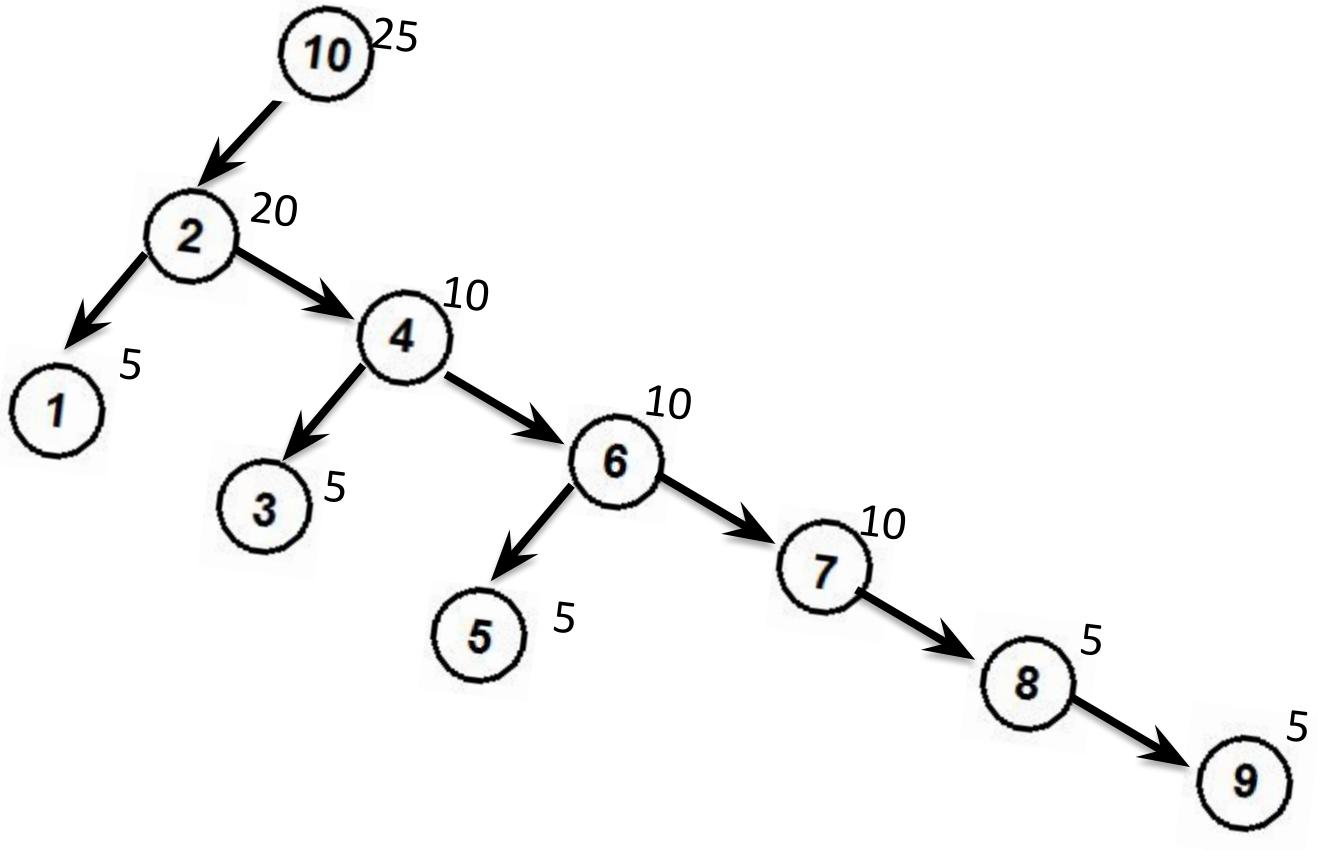
Приближенные алгоритмы построения ДОП

Известны **быстрые алгоритмы**, строящие **почти оптимальные деревья поиска**. Назовем эти алгоритмы A1 и A2.

Алгоритм A1:

В качестве корня ***берем вершину с наибольшим весом***, будем поступать так же для каждого поддерева.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	5	20	5	10	5	10	10	5	5	25



$$h = \frac{25*1+20*2+5*3+10*3+5*4+10*4+5*5+10*5+5*6+5*7}{100} = 3,1$$

- ***<u>Алгоритм А1 на псевдокоде</u>***

<сортировка по убыванию весов>

DO (i=1, n)

Добавить (Root, V_i)

OD

Алгоритм А2:

Алгоритм отличается тем, что **вершины должны быть упорядочены по возрастанию ключей.**

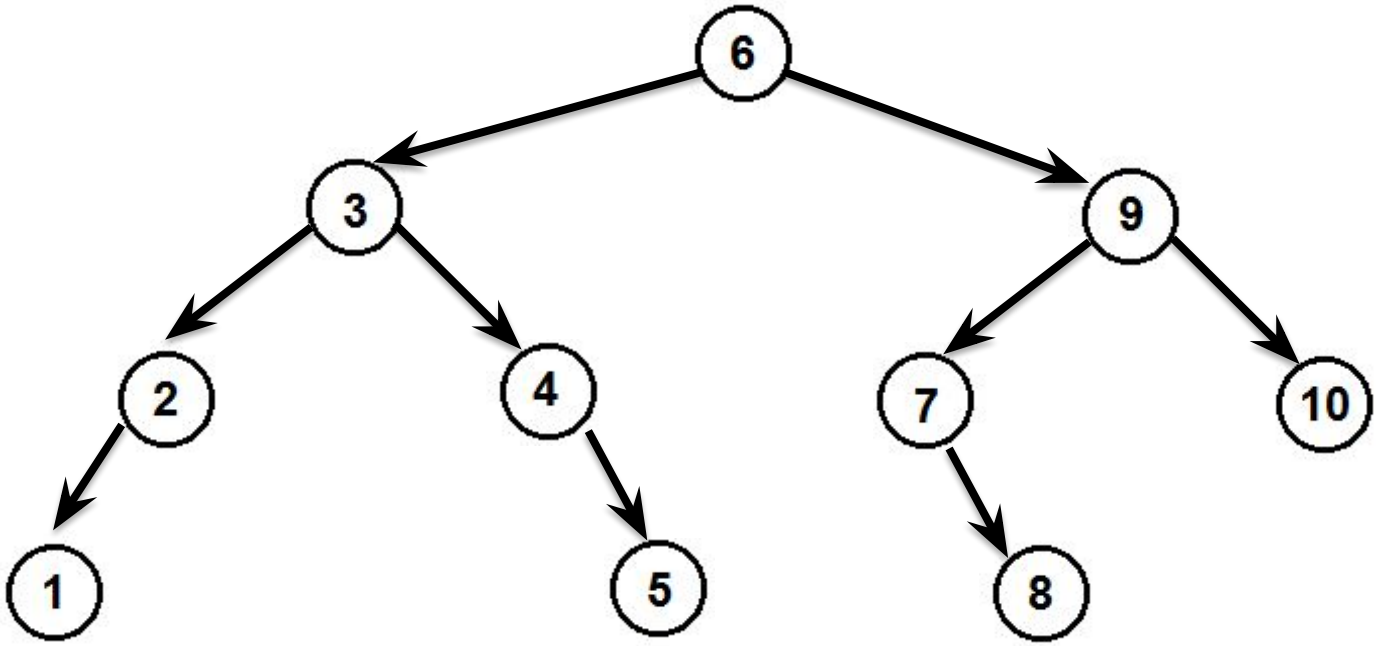
Находим «центр тяжести», т.е. путем последовательного суммирования весов определим вершину V_k, для которой справедливы неравенства:

$$\sum_{i=1}^{k-1} w_i < \frac{W}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k} w_i \geq \frac{W}{2}$$

В качестве **«центра тяжести»** берется вершина, для которой сумма весов левой и правой части массива как можно меньше отличаются друг от друга.

Иногда для большей точности также рассматриваются две ближайшие к выбранной вершины: V_{k-1} **и** V_{k+1}.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	5	20	5	10	5	10	10	5	5	25



$$h_{срв} = \frac{10*1+5*2+5*2+20*3+10*3+10*3+10*3+25*3+5*4+5*4+5*4}{100} = 2{,}85$$

- ***Алгоритм A2*** *на псевдокоде*

A2 (L, R)

wes = 0, sum = 0

IF (L ≤ R)

DO (i = L, L+1, …, R) wes = wes + W_i OD

DO(i = L, L+1, …, R)

IF (sum < wes/2 и sum +W_i > wes/2) OD FI

sum = sum + W_i

OD

Добавить (root, V_i)

A2 (L, i-1)

A2 (i+1, R)

FI

- **Трудоемкость приближенных алгоритмов:**

по времени **O(n*$log_2 n$)**

по занимаемой памяти ***O(n)***

- Алгоритм **A1** «плохой» : **при n-->∞ дерево равносильно случайному** (с точки зрения средневзвешенной высоты);
- Алгоритм **A2** хороший: **дерево асимптотически приближается к оптимальному.**

К У Р А П О В А Е Л Е Н А В И К Т О Р О В Н А

	К	У	Р	А	П	О	В	Е	Л	Н	И	Т
	2	1	2	4	1	3	3	2	1	2	1	1

	А	В	Е	И	К	Л	Н	О	П	Р	Т	У
	4	3	2	1	2	1	2	3	1	2	1	1

ДЗ: Построить почти оптимальные деревья с помощью алгоритмов А1 и А2. Вычислить и сравнить средневзвешенные высоты полученных деревьев.

В лаб.работе для проверки правильности точного алгоритма сравнить:

$$\frac{AP[0,n]}{AW[0,n]}(\text{из матриц}) = h_{\text{срв}}(\text{по дереву})$$

Relax