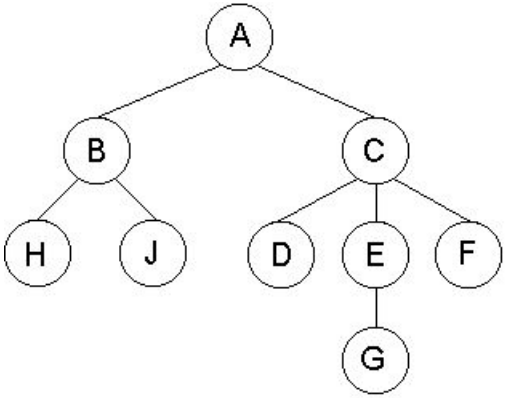
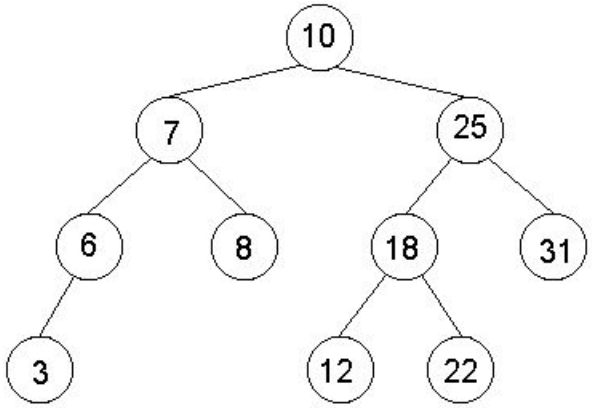




ДЕРЕВЬЯ

Деревья представляют собой иерархическую структуру некой совокупности элементов.

Примеры деревьев

- Генеалогические деревья и организационные диаграммы.
- Деревья используются при анализе электрических цепей, при представлении структур математических формул.
- Деревья используются для организации информации в системах управления базами данных и для представления синтаксических структур в компиляторах программ.

Будем определять *дерево* как конечное множество *T*, состоящее из одного или более *узлов*, таких, что:

- имеется один специально обозначенный узел, называемый *корнем* данного дерева;
- остальные узлы (исключая корень) содержатся в попарно не пересекающихся множествах T_1, T_2, … , T_n, каждое из которых в свою очередь является деревом. Деревья T_1, T_2, … , T_n называются *поддеревьями* данного корня.

Это определение является рекурсивным, т.е. мы определили дерево в терминах самих же

- Каждый узел дерева является корнем некоторого поддерева, которое содержится в этом дереве. Число поддеревьев данного узла называется *степенью* этого узла. Узел с нулевой степенью называется *листом*.

Дерево на рисунке имеет корень A и 5 листьев: H, J, D, G, F. Степени вершин этого дерева следующие: A, B имеют степень 2, C – 3, E – 1. Корень A располагается на 1 уровне, узлы B, C – на втором, H, J, D, E, F – на третьем, G – на четвертом.

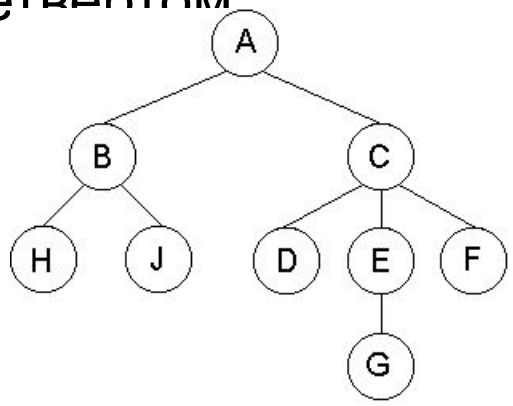


Рис.1

Путем из узла n_1 в узел n_k называется последовательность узлов $n_1, n_2, \ldots, n_k$, где $\forall i, 1 \le i < k$, узел n_i является родителем узла n_{i+1}. Если существует путь из узла n_1 в узел n_k, то n_1 называется предком n_k, n_k - потомком n_1. *Длиной* пути называется число на 1 меньше числа узлов, составляющих этот путь.

- ***Бинарное дерево*** – это дерево, в котором каждый узел имеет не более двух поддеревьев. В этом случае будем различать левое и правое поддерево.
- ***Дерево двоичного поиска*** – это бинарное дерево, узлы которого помечены элементами множества. Определяющее свойство дерева двоичного поиска заключается в том, что все элементы, хранящиеся в узлах левого поддерева любого узла x, меньше элемента, содержащегося в узле x, а все элементы, хранящиеся в узлах правого поддерева узла x, больше элемента, содержащегося в узле x. Это свойство называется *характеристическим свойством дерева двоичного поиска* и выполняется для любого узла дерева двоичного поиска, включая его корень.
- ***Идеально сбалансированное дерево*** – это дерево минимальной высоты из элементов некоторого множества, для каждого узла которого будет выполняться условие: модуль разности количеств узлов в любых двух его поддеревьев не превышает единицы. Другими словами дерево называется идеально сбалансированным, если все его уровни, за исключением, может быть, последнего, полностью заполнены.

Примеры

Дерево двоичного поиска

- Однако условие идеального сбалансирования для этого дерева не выполняется: для узла со значением 25 количество узлов в левом поддереве равно 3, а в правом поддереве – 1.

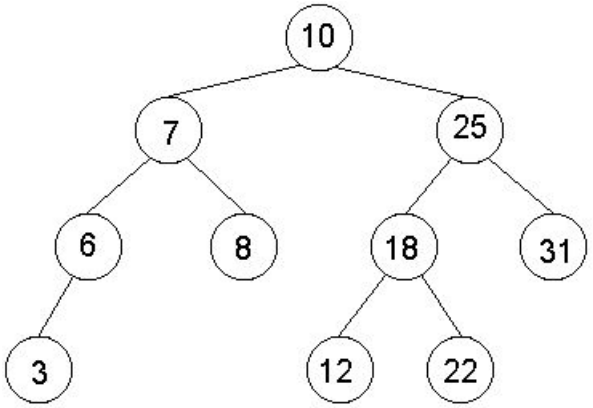


Рис.2

Дерево бинарного поиска и идеально сбалансированное дерево одновременно

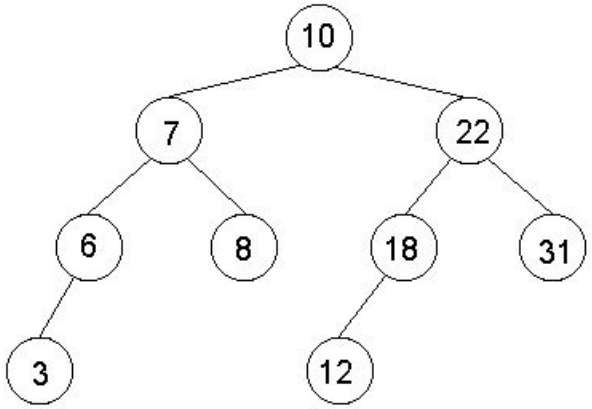


Рис.3

- На C++ бинарное дерево можно представить следующим образом:
-
- struct tree
- {
- int inf;
- tree *left, *right;
- };
- tree *root;
- В таком представлении дерево определяется указателем на свой корень. Каждый узел содержит информационную часть (inf) и указатели на узлы, которые являются его левым (left) и правым (right) сыном.

Обходы бинарных деревьев

Обойти дерево – это побывать в каждом из его узлов точно по одному разу. Рассмотрим три наиболее часто используемых способов обхода бинарных деревьев – это обход в прямом, симметричном и обратном порядке. Все три обхода будем определять рекурсивно.

а) Прямой обход:

- попасть в корень;
- пройти левое поддерево данного корня;
- пройти правое поддерево данного корня.

Подпрограмму, составляющую список узлов дерева при прохождении его в прямом порядке, можно записать следующим образом:

```
void preorder (tree *root)
{
        if (root)
        {
          cout<<root->inf<<"\t";
          preorder(root->left);
          preorder(root->right);
        }
}
```

б) Симметричный обход:

- пройти левое поддерево данного корня;
- попасть в корень;
- пройти правое поддерево данного корня.

Подпрограмму, составляющую список узлов дерева при прохождении его в симметричном порядке, можно записать следующим образом:

```
void inorder (tree *root)
{
      if (root)
            {
                  inorder(root->left);
               cout<<root->inf<<"\t";
               inorder(root->right);
            }
}
```

в) Обратный обход:

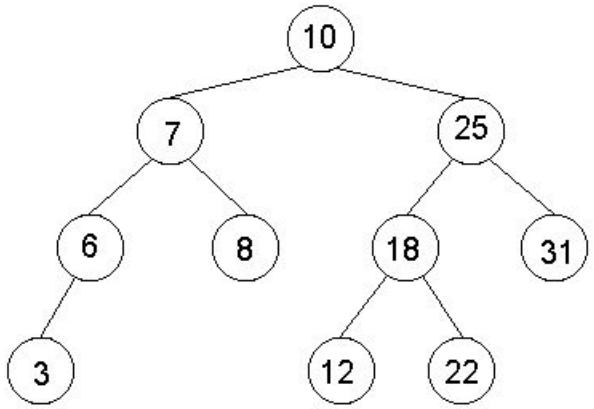
- пройти левое поддерево данного корня;
- пройти правое поддерево данного корня;
- попасть в корень.

Подпрограмму, составляющую список узлов дерева при прохождении его в обратном порядке, можно записать следующим образом:

```
void postorder (tree *root)
{
        if (root)
            {
            postorder(root->left);
            postorder(root->right);
            cout<<root->inf<<"\t";
            }
}
```

- Замечание. Таким образом, при симметричном обходе дерева бинарного поиска на экран выводится упорядоченная по возрастанию последовательность данных. Этот свойство дерева бинарного поиска можно использовать для сортировки данных.

- **Рассмотрим 3 вида обхода на примере дерева, изображенного на рис.2**
- При прохождении в прямом порядке список узлов выглядит следующим образом: 10 7 6 3 8 25 18 12 22 31
- При прохождении в симметричном порядке список узлов выглядит следующим образом: 3 6 7 8 10 12 18 22 25 31
- При прохождении в обратном порядке список узлов выглядит следующим образом: 3 6 8 7 12 22 18 31 25 10



Операции с деревьями бинарного поиска:
Построение дерева

Рассмотрим подпрограмму

add (int x, tree *&root), которая добавляет новый узел в дерево так, что бы формировалось дерево бинарного поиска. Она имеет два формальных параметра:

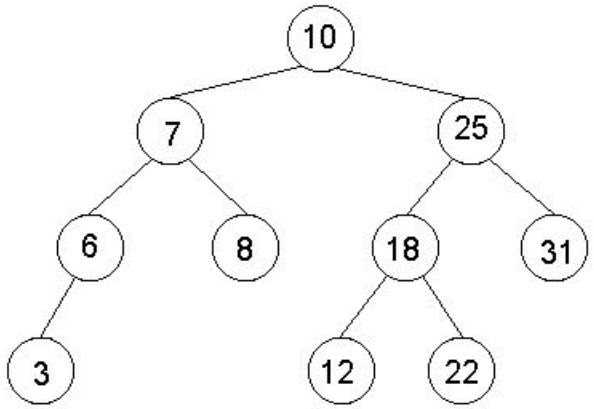
x – информация, которая записывается в новый узел; root – указатель на текущий узел дерева (вначале на корень исходного дерева).

Построение дерева бинарного поиска

```
void add (int x, tree *&root)
{
        if (!root)
                {
                    root = new tree;
                    root->inf = x;
                    root->left = root->right = NULL;
                }
 else if (x < root->inf)
         add(x, root->left);
       else
                if (x > root->inf)
                        add(x, root->right);
}
```

Для формирования дерева в основной программе можно написать обращение к этой подпрограмме на этапе ввода в цикле узлы дерева с клавиатуры или считывания их из файла.

- *Если мы будем вводить с клавиатуры узлы 10, 7, 25, 31, 18, 6, 3, 12, 22, 8, то получим дерево, представленное на рисунке.*



Поиск по дереву

- Рассмотрим подпрограмму
- search (int x, tree *root), предназначенную для поиска и вывода данного узла. Подпрограмма имеет два формальных параметра: x – значение, которое нужно найти; root – указатель на анализируемый узел (вначале root указывает на корень дерева).

Поиск по дереву

```
void search (int x, tree *root)
{
    if (!root) cout<<"error";
 else if (x < root->inf) search(x, root->left);
        else if (x > root->inf) search(x, root->right);
           else cout<<"search is successful";
}
```

Операции с идеально сбалансированными деревьями

Построение дерева

Рассмотрим подпрограмму create (int number, tree *&root), которая используется для формирования идеально сбалансированного дерева.

- number – количество узлов в формируемом дереве;
- root – указатель на корень дерева.

Необходимо выполнить требование:

для каждого узла количество узлов в левом поддереве отличается от количества узлов в правом поддереве не больше чем на единицу.

Первый узел полагается корнем формируемого дерева, после чего определяется количество узлов в левом поддереве numberLeft = number/2, количество узлов в правом поддереве numberRight = number- numberLeft -1.

Построение идеально сбалансированного дерева

```
void create (int number, tree *&root)
{
      int a;
      if (number > 0)
            {
         root = new tree;
         in >> a;  //считываем из файла in очередное число
         root->inf = a;
         root->left = root->right = NULL;
         int numberLeft = number/2, numberRight = number –
    numberLeft - 1;
         create(numberLeft, root->left);
         create(numberRight, root->right); }
}
```

Поиск по дереву

Для реализации поиска элемента в идеально сбалансированном дереве можно использовать модификацию любого вида обхода дерева.

Модификация прямого обхода:

```
void search (int x, tree *root)
{if (root) // если дерево не пустое
   if (x == root->inf) /* и значение узла равно x,  то выводим
     сообщение об успешности поиска и выходим из подпрограммы
     */
          { cout << "search is successful"; }
     else {search(x, root->left); /* иначе  обходим левое и правое
     поддеревья */
           search(x, root->right);
          }
}
```