

# Десятая Всероссийская командная олимпиада школьников по программированию

Разбор задач

14 ноября 2009 года

Санкт-Петербург

# Задача А. Поедание сыра





# Авторы задачи

- Автор задачи — Сергей Мельников
- Условие — Андрей Станкевич
- Подготовка тестов — Антон Ахи
- Разбор — Сергей Мельников

# Общая идея

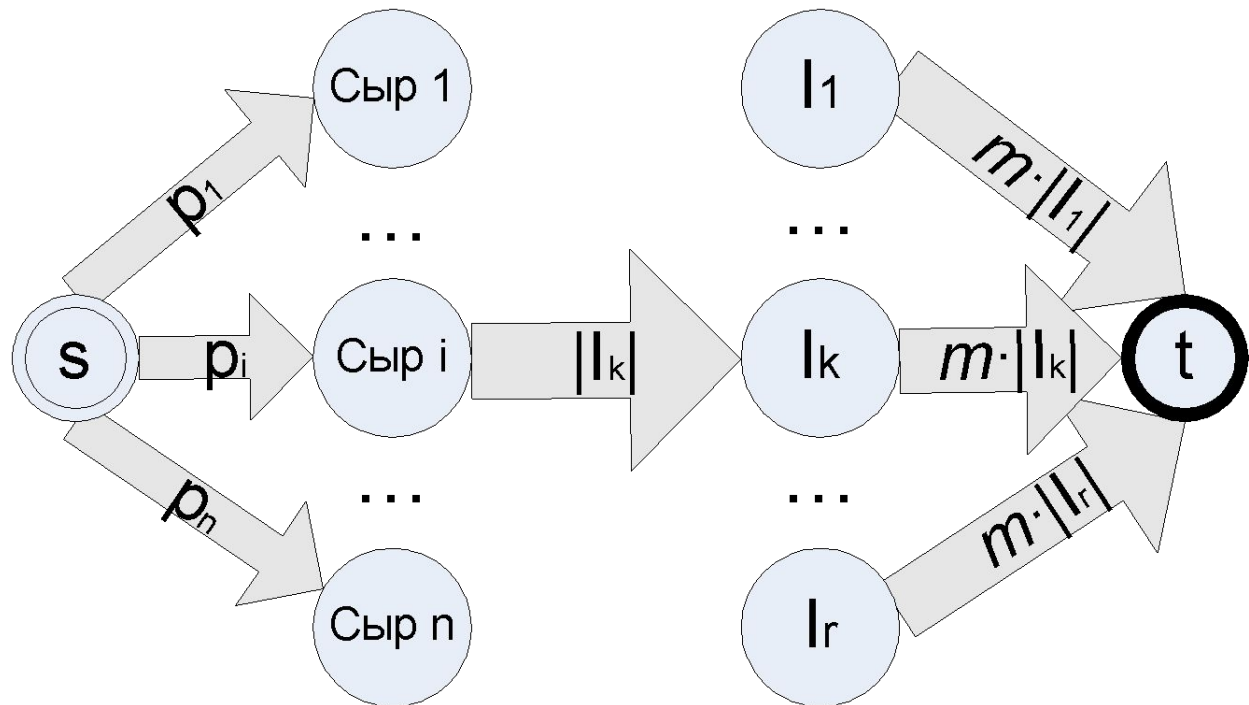
- Используем двоичный поиск по ответу
- Дано  $t$ , можно ли организовать поедание сыра, чтобы мыши не ели сыр более чем через  $t$  часов, после того как сыр начал портиться
- Обозначим  $D_i = d_i + t$

# Интересные интервалы

- Пусть  $T_i$  – все моменты времени  $r_i$  и  $D_i$
- $T_1 < T_2 < \dots < T_n$
- Время разбивается на интервалы  $[T_i, T_{i+1}]$
- Сыр или можно есть в течение всего интервала, или нельзя

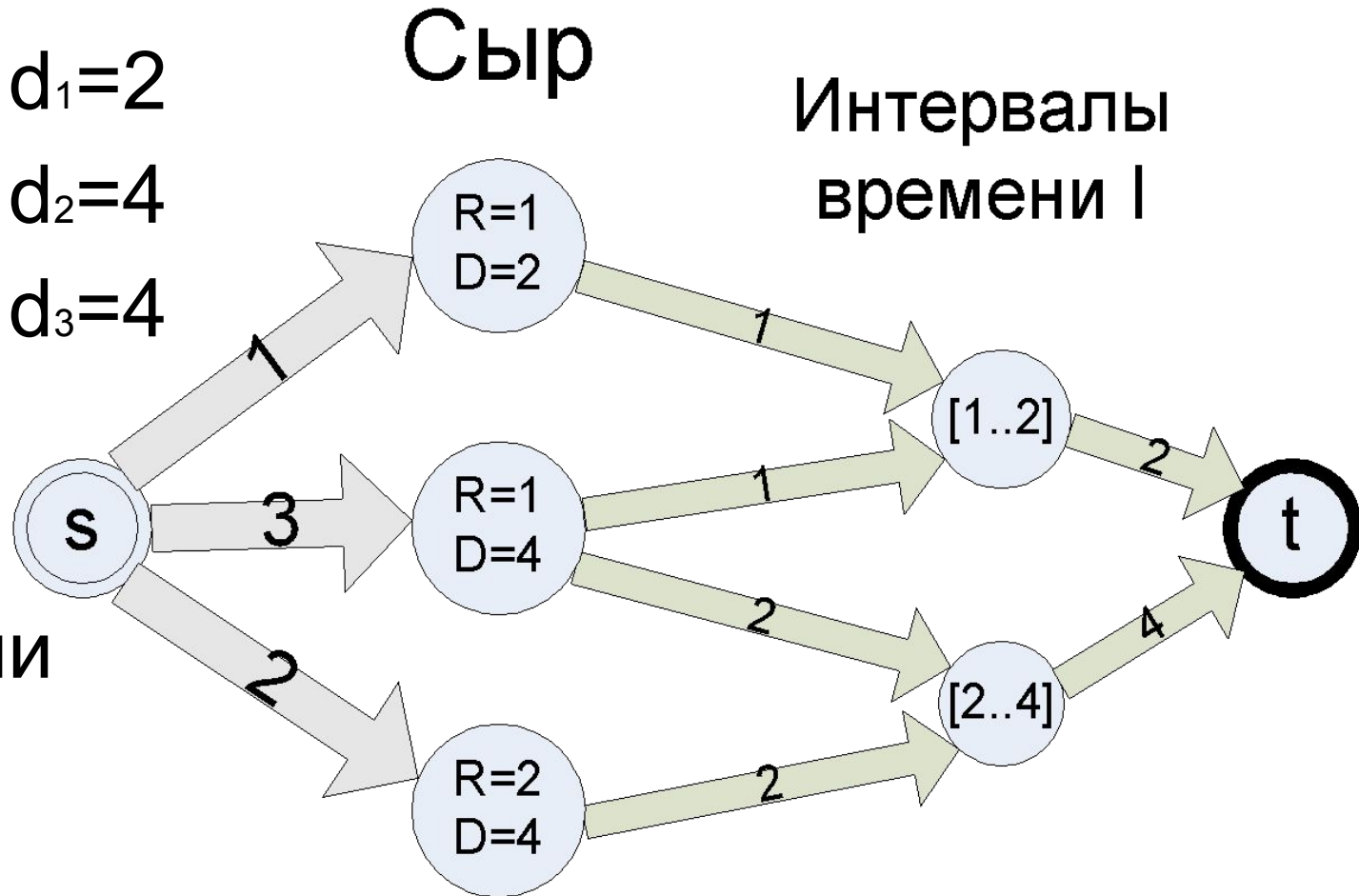
# Скорости всех мышей равны 1

- Рассмотрим сеть
- В ней надо найти максимальный поток
- Можно, если все рёбра из  $s$  насыщены
- Ребро из сыра  $i$  в интервал  $k$ , если этот сыр можно есть в этот интервал



# Скорости всех мышей равны 1

- Три сыра
- $p_1=1$   $r_1=2$   $d_1=2$
- $p_2=3$   $r_2=1$   $d_2=4$
- $p_3=2$   $r_3=2$   $d_3=4$



- Две мыши

# Разные скорости мышей

- Упорядочим мышей по неубыванию скоростей:

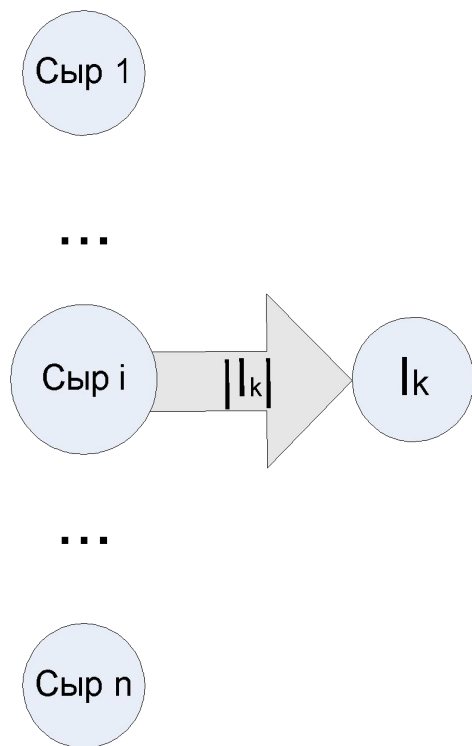
$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m$$

- Представим  $(m-1)$ -ю мышь, как набор из мыши со скоростью  $s_m$ , и мыши со скоростью  $s_{m-1}-s_m$
- Аналогично разобьем  $(m-2)$ -ю мышь на 3 три мыши:  $s_m$ ,  $s_{m-1}-s_m$  и  $s_{m-2}-s_{m-1}$
- И так далее

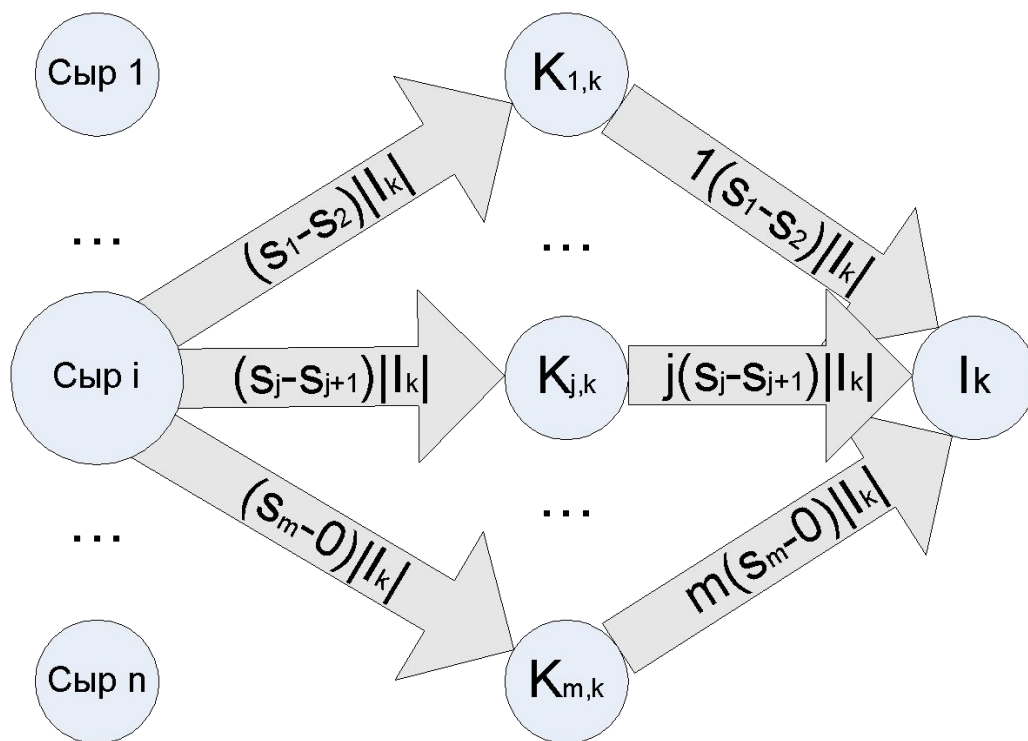


# Модификация сети

Раньше было




Заменяем, на такой фрагмент



$K_{j,k}$  – одни и те же разных  $i$  и одного  $l_k$

# Общее решение

- Двоичный поиск
- Поток в специальной сети



Спасибо за внимание!  
Вопросы по задаче А?

# Задача В. Соревнования по программированию



# Авторы задачи

- Автор задачи — Владимир Ульянов
- Условие — Федор Царев
- Подготовка тестов — Антон Ахи
- Разбор — Антон Ахи

# О чем задача?

- Дан список файлов и определения для каталогов с тестами, задач и описаний соревнований
- Необходимо посчитать количество описаний соревнований

# Как решать?

- Восстановить полностью дерево каталогов и файлов
- Использовать символ «\» как разделитель имен в путях
- Для каждого каталога хранить список подкаталогов и файлов в нем, например с помощью хеш-таблицы


# Как посчитать количество описаний соревнований?

- В получившемся дереве файлов/каталогов проверить про каждый каталог, является ли он каталогом с тестами, задачей или описанием соревнований
- Не забыть, что в каталоге с тестами могут быть подкаталоги



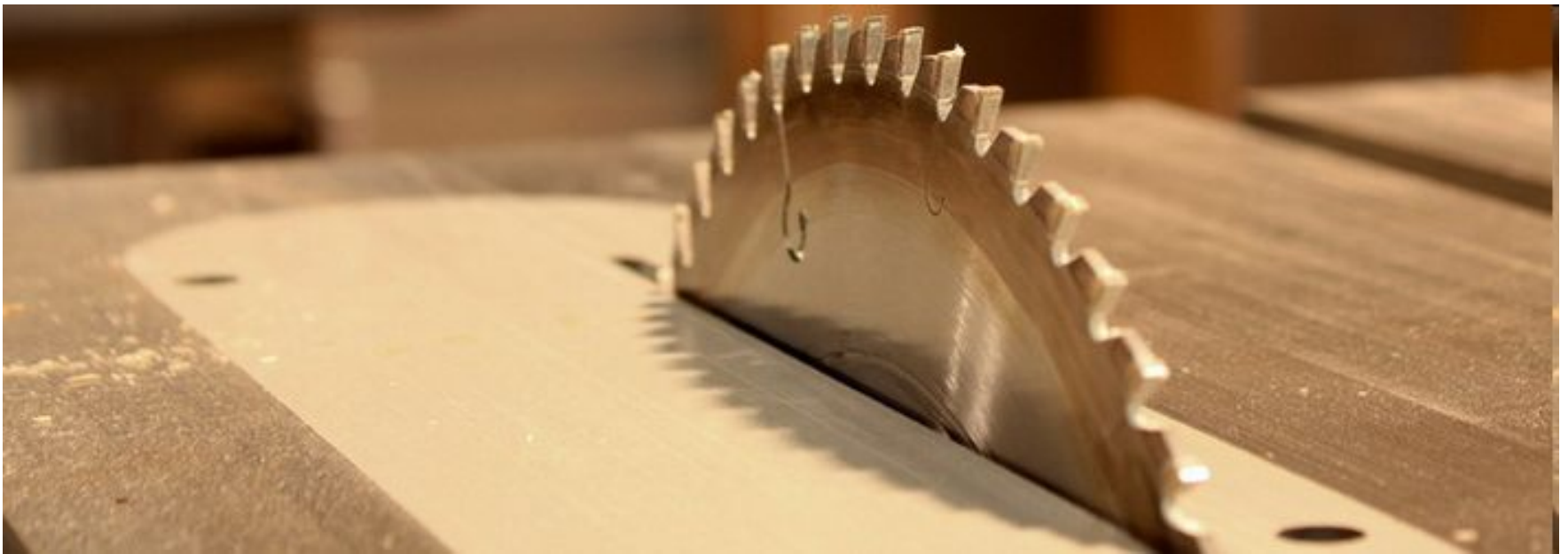
# Сколько работает?

- Во входном файле задано не более 100000 файлов/каталогов
- Каждый каталог просматривается один раз



Спасибо за внимание!  
Вопросы по задаче В?

# Задача С. Распил



# Авторы задачи

- Авторы задачи — Елена Андреева, Владимир Гуровиц
- Условие — Андрей Станкевич
- Подготовка тестов — Антон Банных
- Разбор — Антон Банных

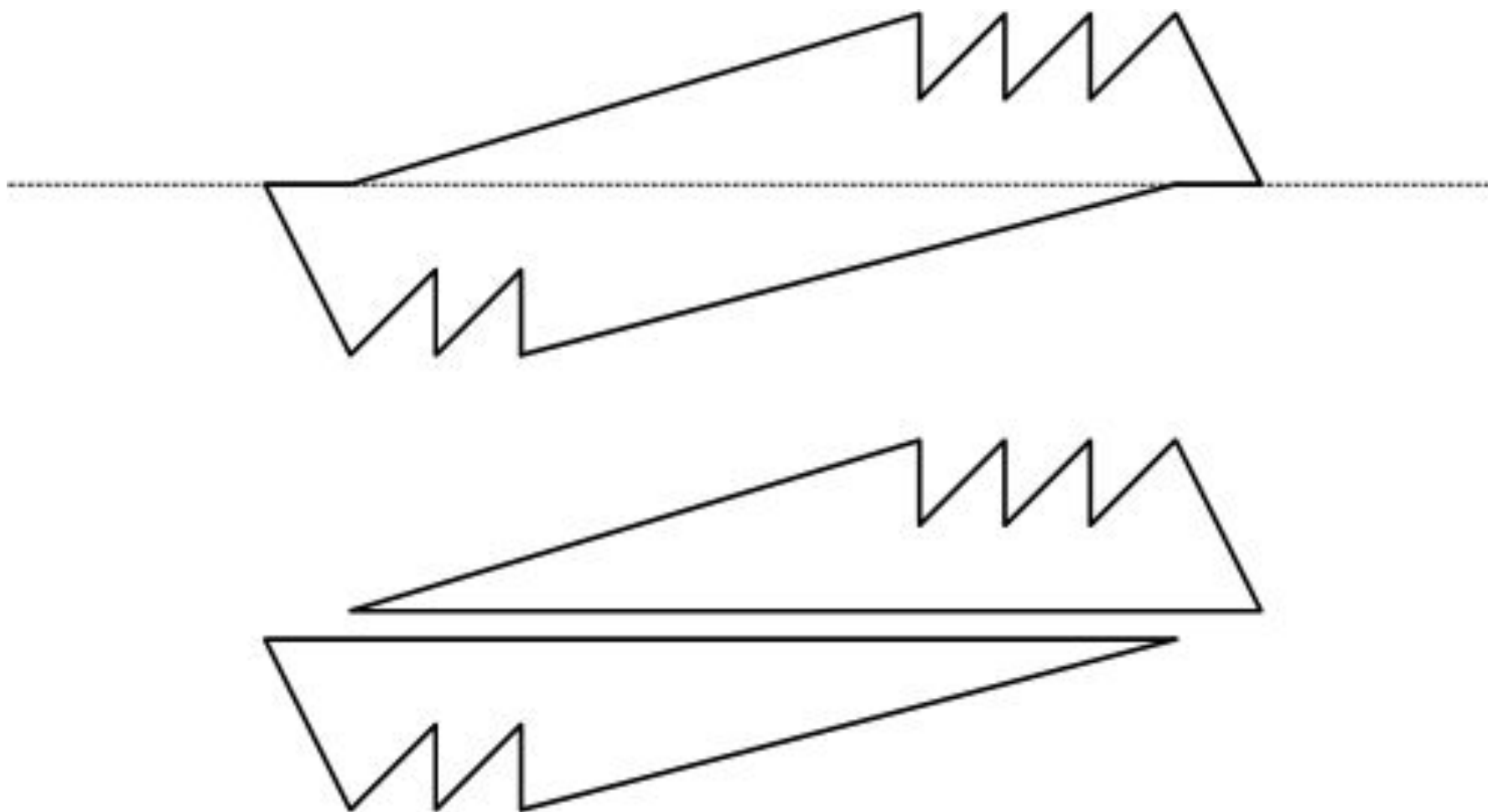
# О чем задача?

- Придумать  $n$ -угольник, который можно распилить на  $k$ -угольник и  $m$ -угольник разрезом, проходящим через две его вершины.

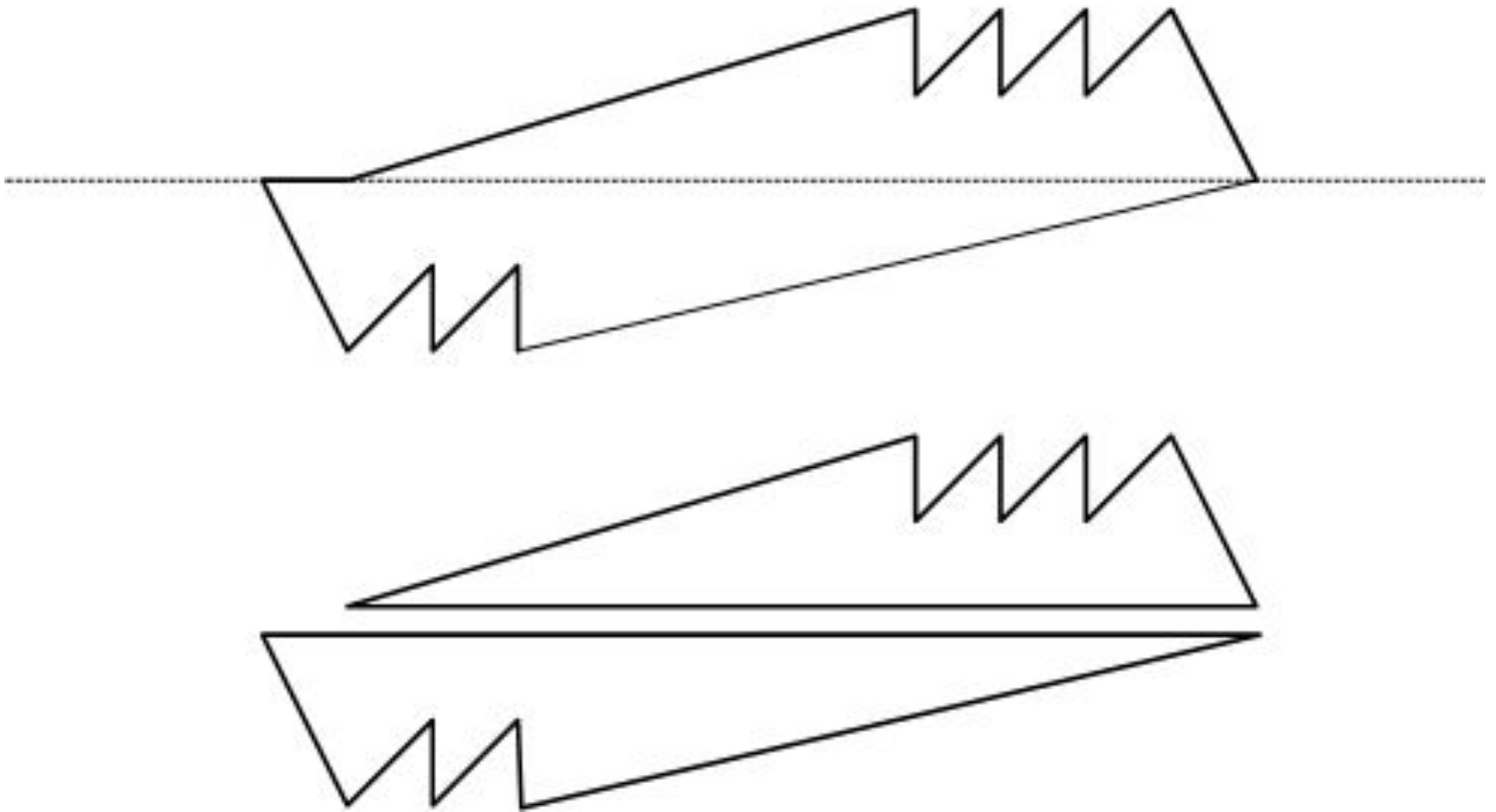
# Какие $n$ , $m$ , $k$ допустимы?

- Если  $m + k - n \notin \{0..4\}$ , решения нет.
- Иначе при достаточно больших  $n$ ,  $m$ ,  $k$  искомый многоугольник существует.

$$m + k = n$$

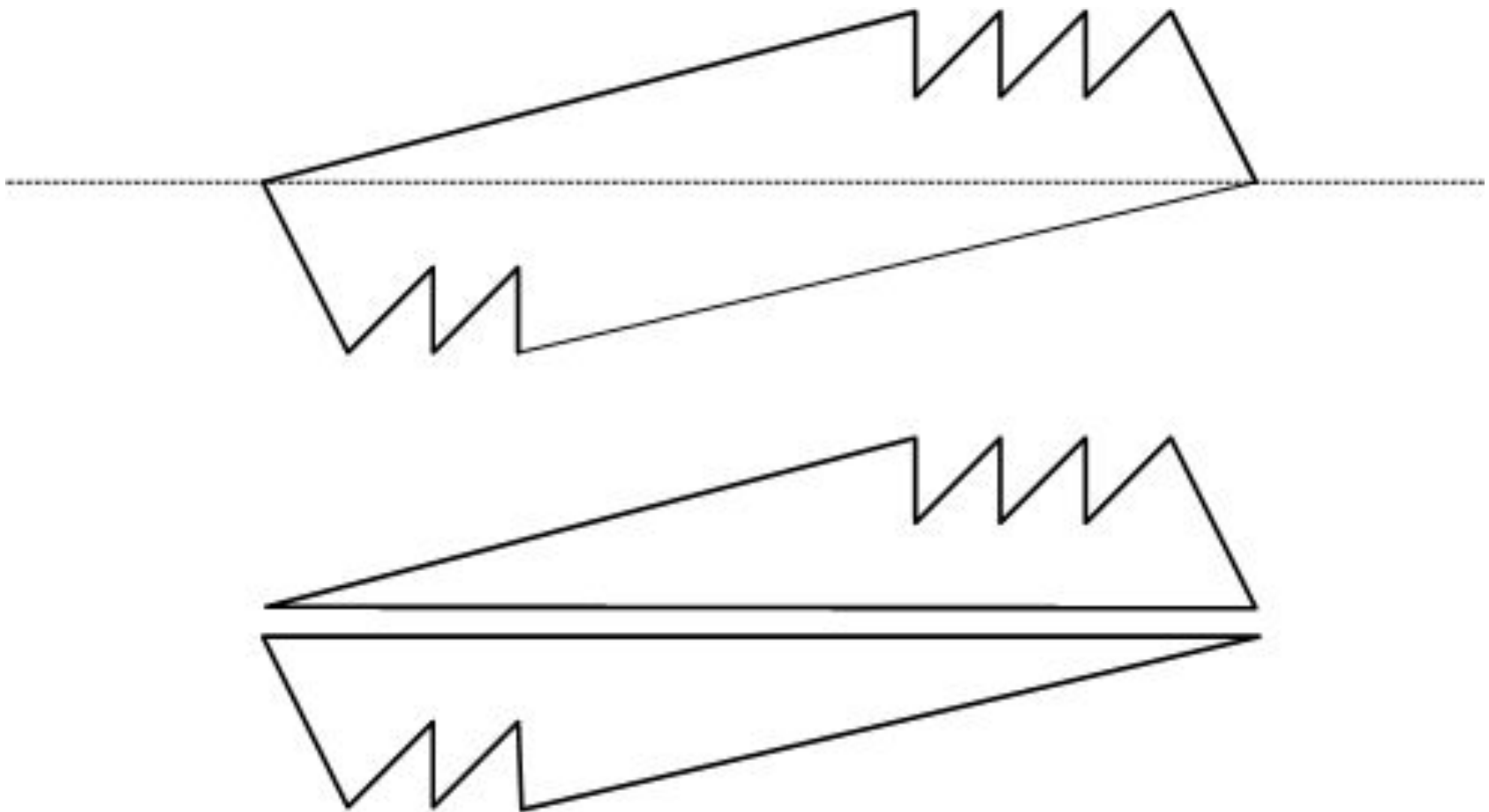


$$m + k = n + 1$$

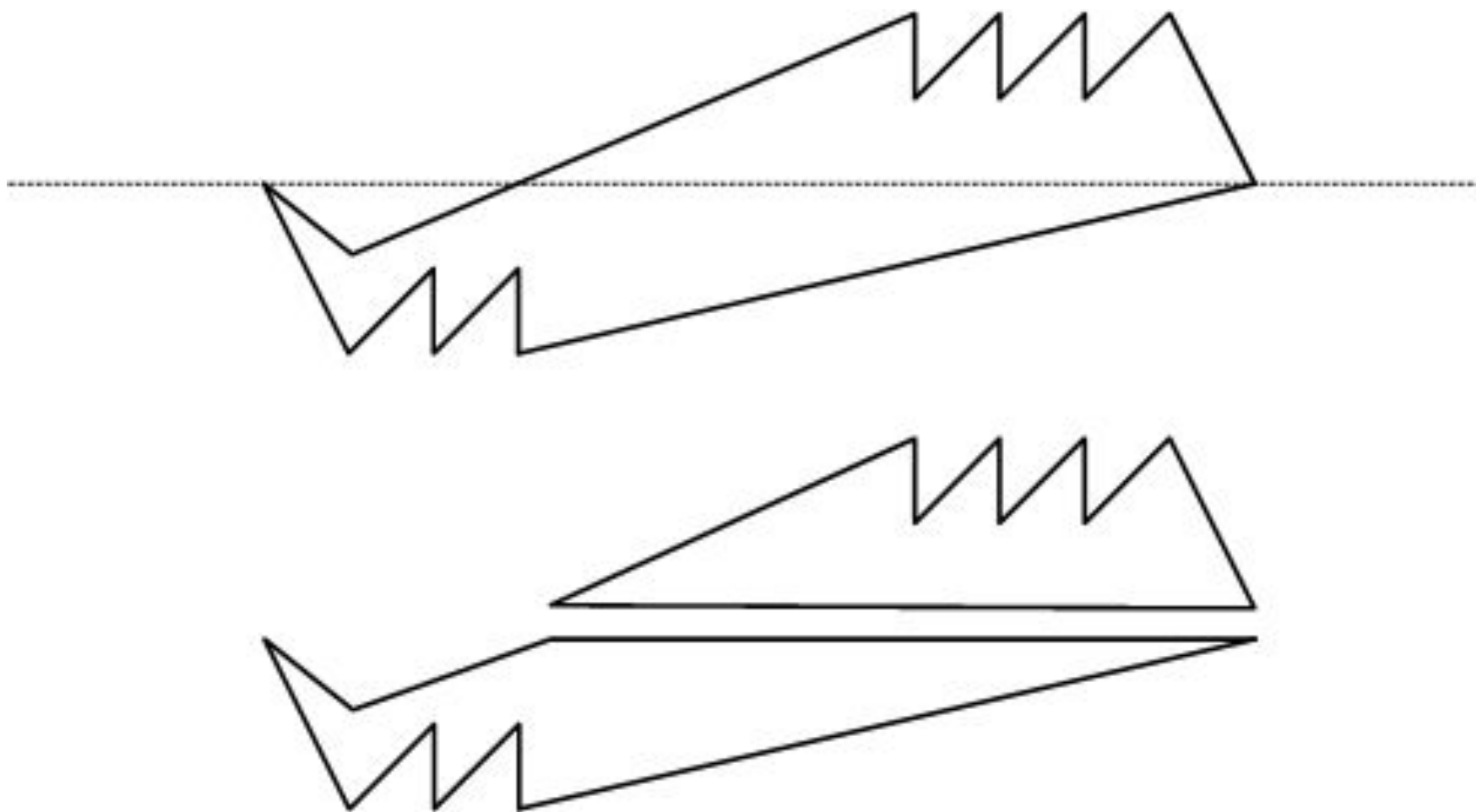




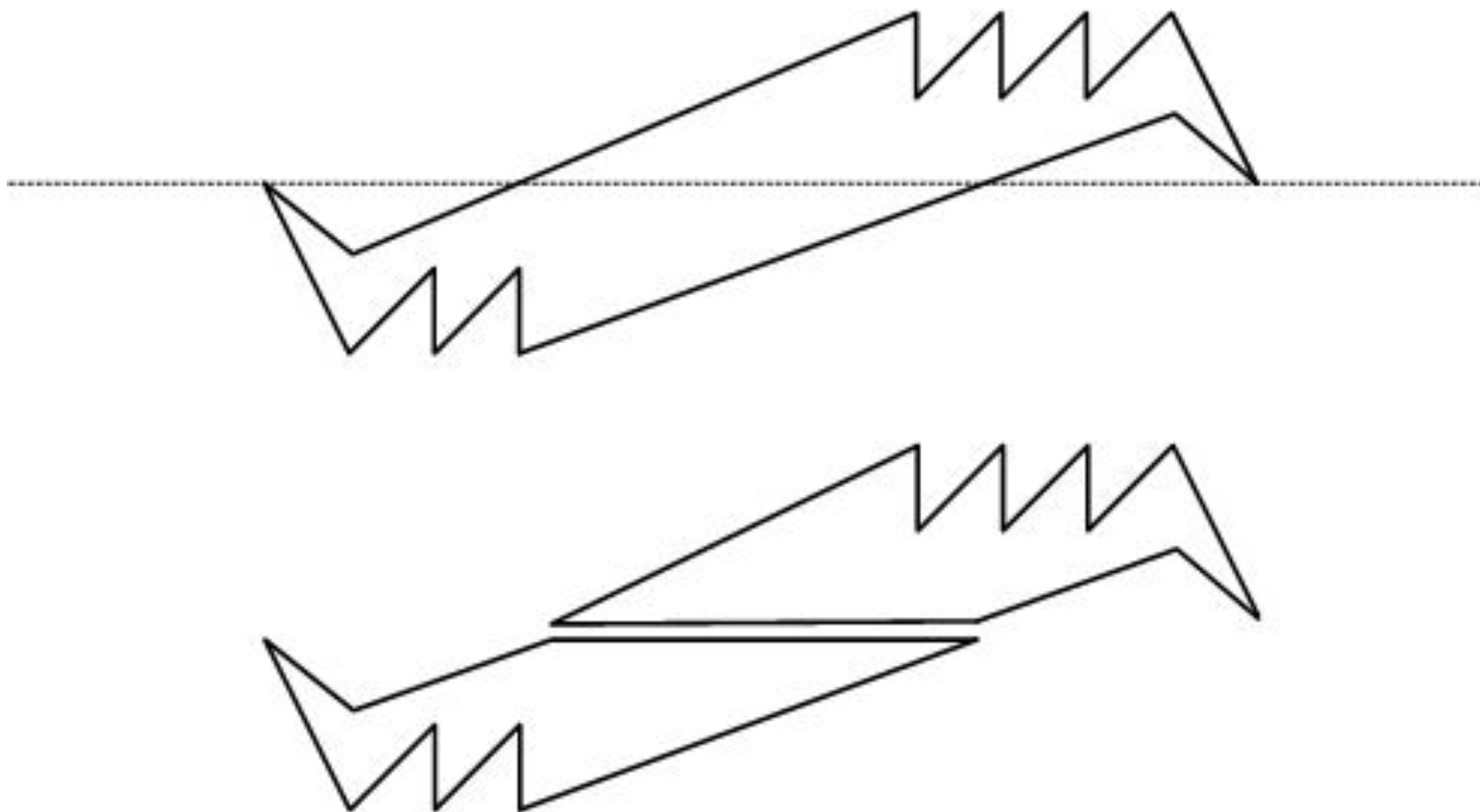
$$m + k = n + 2$$



$$m + k = n + 3$$

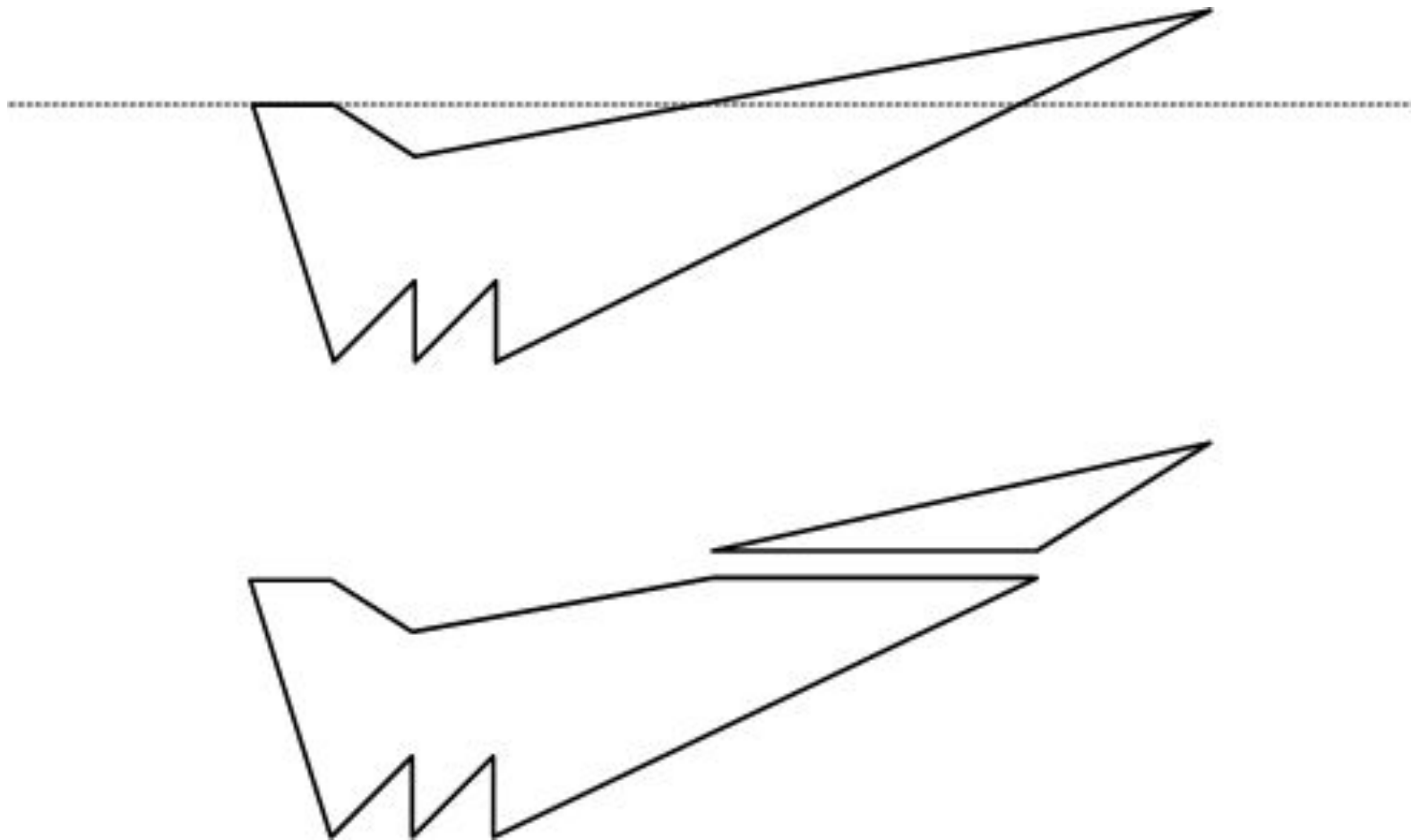



$$m + k = n + 4$$



$$m + k = n + 4, k < 5$$

Дополнительный случай





Спасибо за внимание!  
Вопросы по задаче C?

# Задача D.

## Электричество





# Авторы задачи

- Автор задачи — Владимир Гуровиц
- Условие — Федор Царев
- Подготовка тестов — Сергей Поромов
- Разбор — Антон Банных

# О чем задача?

- В наличии:
  - $k$  сетевых фильтров
  - $n$  электроприборов
  - 1 розетка
- Требуется подсоединить все электроприборы так, чтобы потребляемая ими мощность не превышала допустимую для сетевого фильтра.
- К сетевому фильтру можно подсоединить не более одного сетевого фильтра.




# Основные идеи

- Не имеет смысла подключать фильтр к фильтру с меньшей максимальной нагрузкой.
- Наиболее мощные приборы имеет смысл ставить ближе к розетке.

# Решение

- Отсортировать электроприборы и фильтры в порядке невозрастания мощностей.
- Строить ответ жадно, начиная с фильтра, подключенного к розетке.



Спасибо за внимание!  
Вопросы по задаче D?

# Задача Е. Адронные коллайдеры



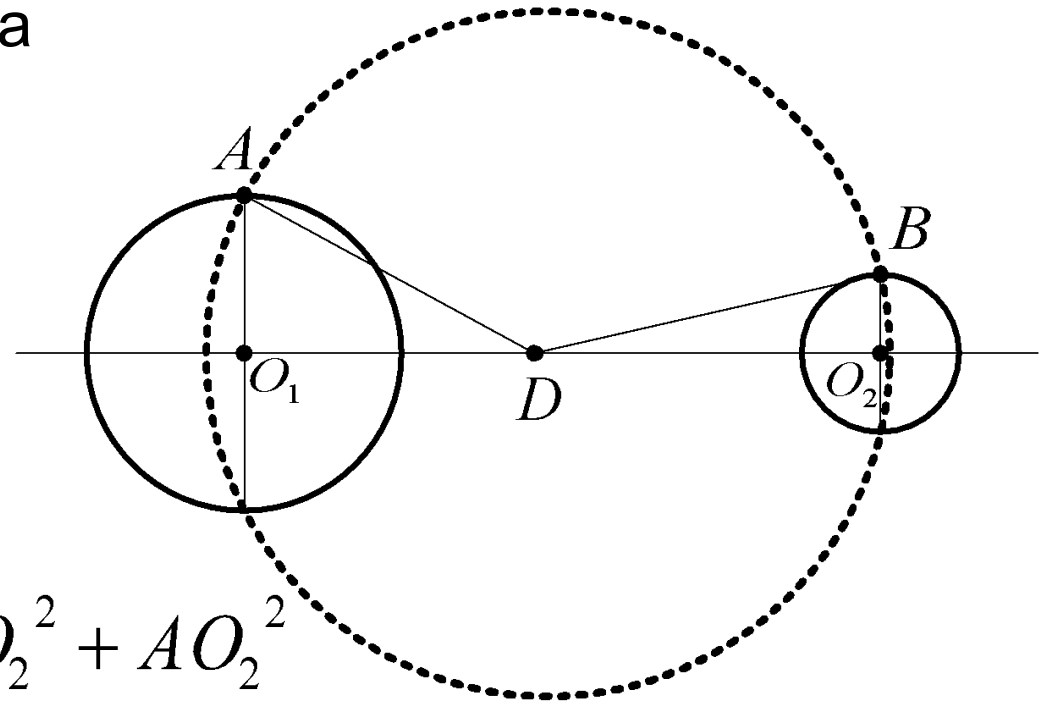


# Авторы задачи

- Автор задачи — Михаил Кевер
- Условие — Федор Царев
- Подготовка тестов — Сергей Поромов
- Разбор — Сергей Мельников

# Две окружности

- Две окружности: найдем окружность с центром на прямой, соединяющей центры исходных окружностей

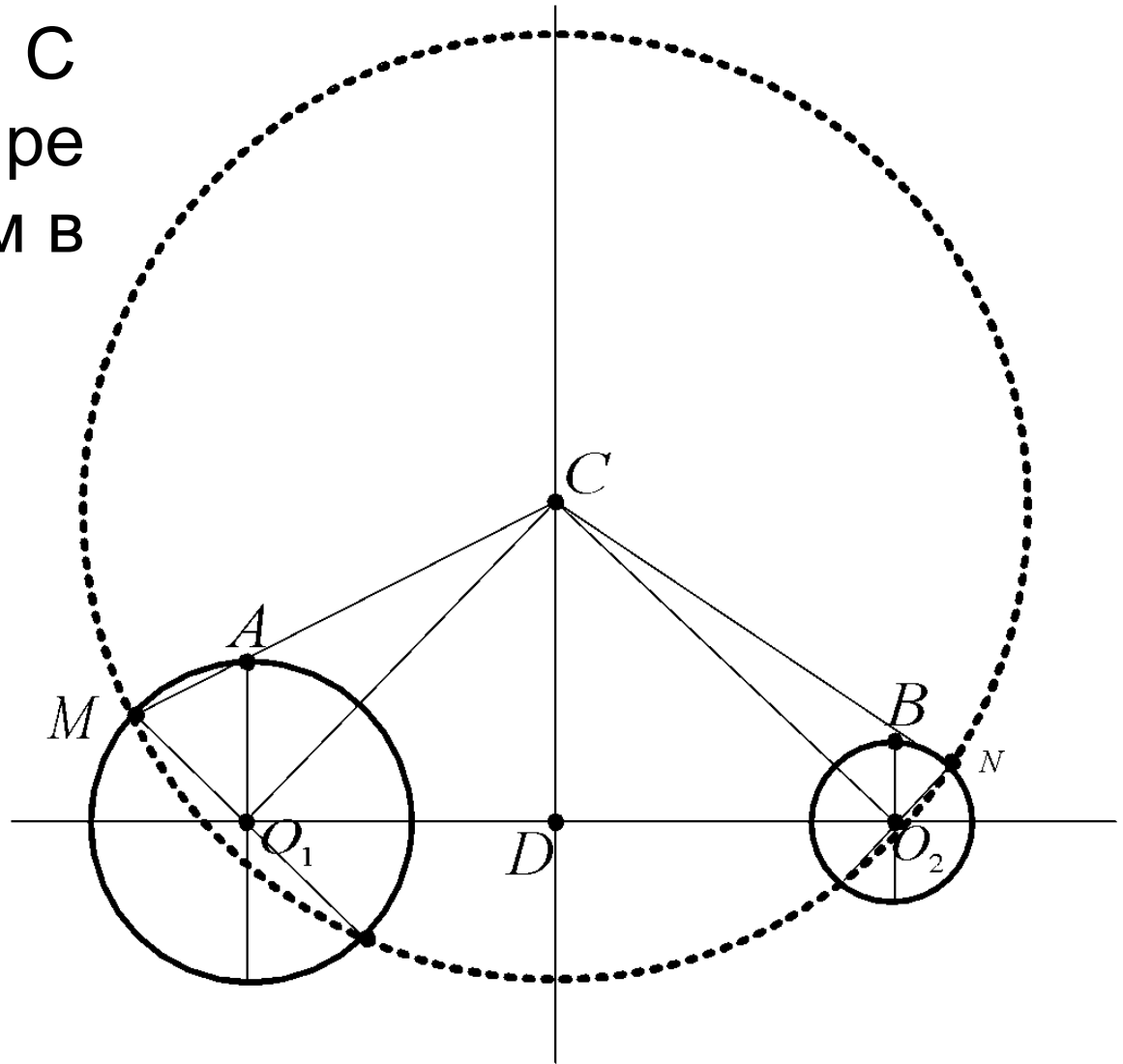


$$\begin{cases} O_1D + DO_2 = O_1O_2 \\ O_1D^2 + O_1A^2 = AD^2 = DO_2^2 + AO_2^2 \end{cases}$$

$$O_1D = \frac{O_2D^2 + O_1O_2^2 - O_1A^2}{2O_1O_2}$$

# Две окружности

- Для любой точки  $C$  на перпендикуляре восстановленном в точке  $D$  – существует окружность являющаяся решением

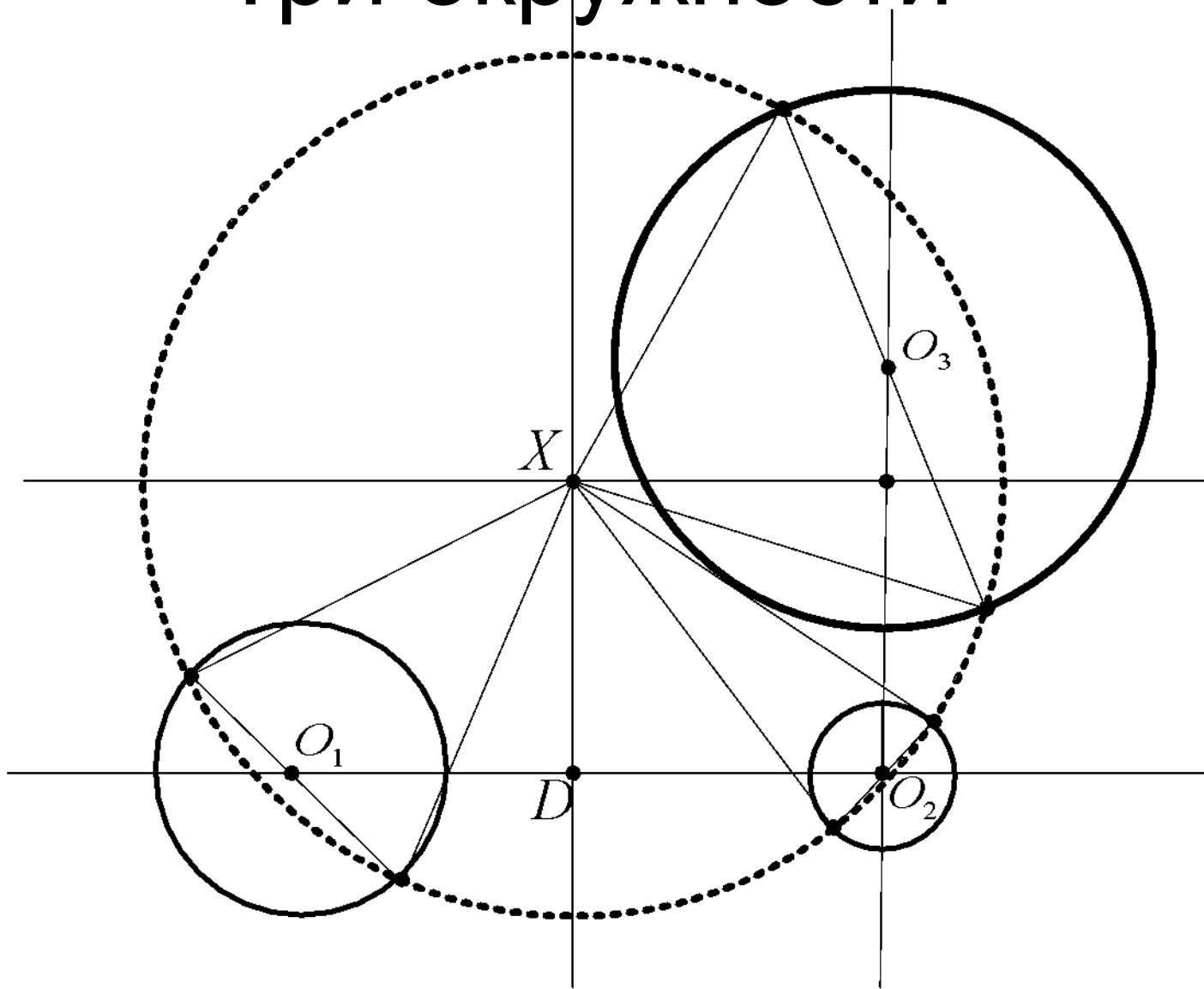



# Три окружности

- Три окружности:
- Построим прямую на которой может быть центр окружности делящей пополам  $O_1$  и  $O_2$
- Построим прямую на которой может быть центр окружности делящей пополам  $O_2$  и  $O_3$
- Найдем их точку пересечения -  $X$



# Три окружности





Спасибо за внимание!  
Вопросы по задаче E?

# Задача F. Космические захватчики





# Авторы задачи

- Автор задачи — Георгий Корнеев
- Условие — Павел Маврин
- Подготовка тестов — Антон Банных
- Разбор — Антон Ахи

# О чем задача?


- В столбцах находятся  $a_i$  захватчиков
- Пушка за одно действие либо перемещается в соседний столбец, либо производит выстрел и убивает одного захватчика
- Необходимо уничтожить всех захватчиков за минимальное количество действий

# Частный случай

- Если пушка стоит в крайнем столбце, то нужно уничтожить всех захватчиков в этом столбце и перейти к следующему
- Ответ — сумма общего количества захватчиков и количества перемещений, то есть  $\sum a_i + (n-1)$

# Решение

- Дойти до ближайшего из краев, далее действовать по предыдущему плану
- Ответ —  $\sum a_i + (n-1) + \min(p-1, n-p)$



Спасибо за внимание!  
Вопросы по задаче F?



# Задача G. Пробежки по Манхэттену



© Neil deGrasse Tyson 2001

# Авторы задачи

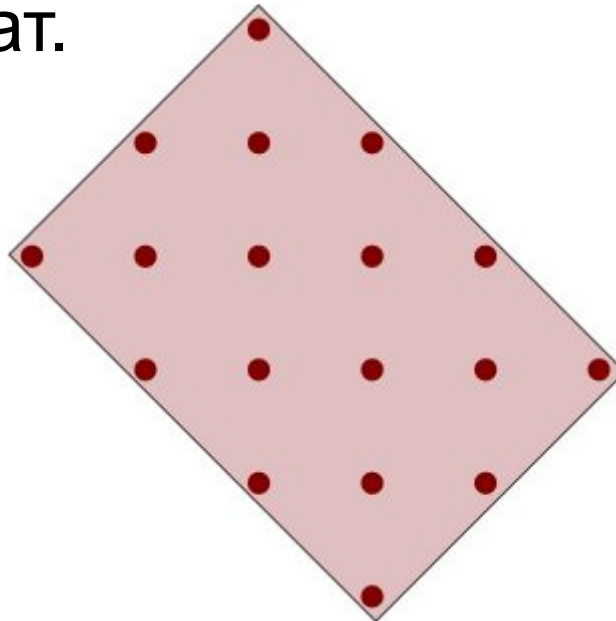
- Автор задачи — Михаил Дворкин
- Условие — Павел Маврин
- Подготовка тестов — Олег Давыдов
- Разбор — Михаил Дворкин

# О чем задача?

- Объект передвигается по Манхэттену, пробегая за  $t$  минут не более чем  $t$  кварталов.
- Каждые  $t$  минут навигатор сообщает точку, где находится объект, с точностью до  $d$  кварталов.
- Где может находиться объект в данный момент времени?

# Утверждение

- В каждый момент времени множество точек, в которых может находиться объект, составляют прямоугольник, стороны которого повернуты на  $45^\circ$  относительно осей координат.



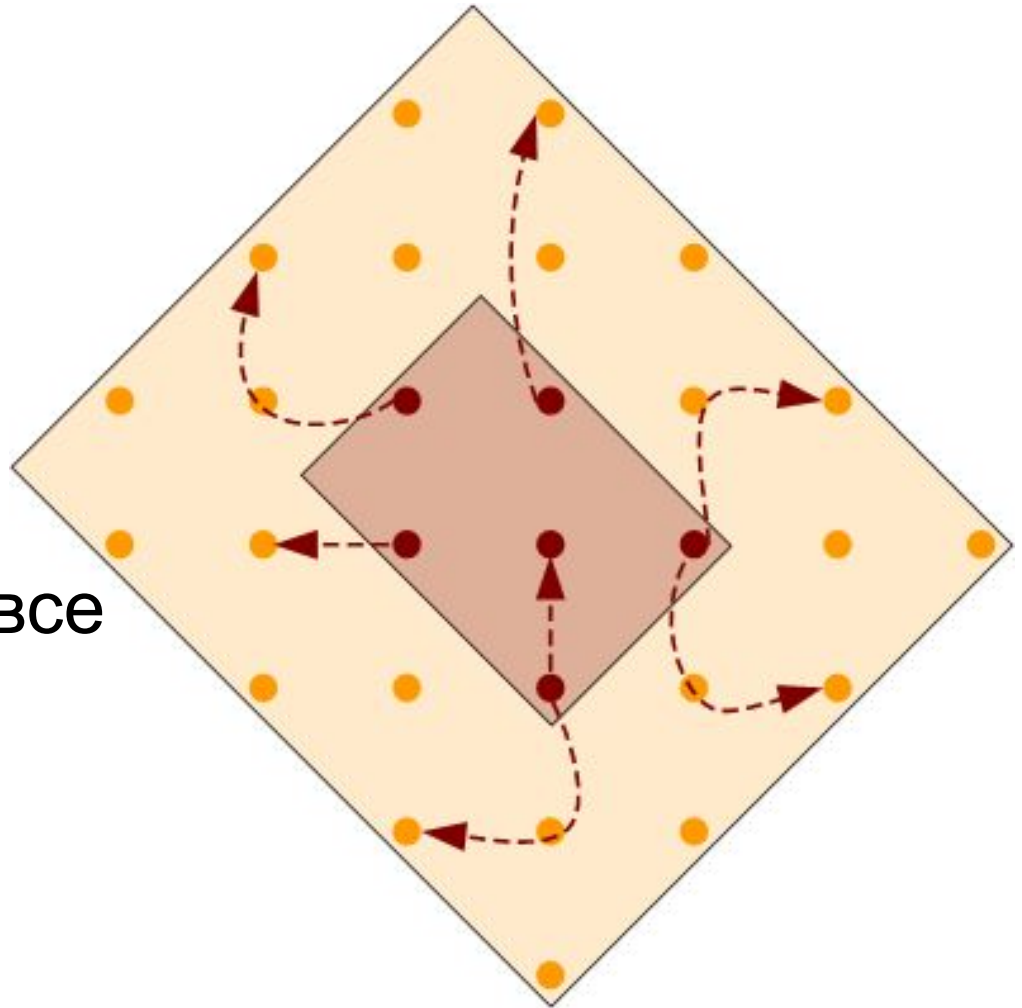
# В начальный момент времени

- Это точка  $(0, 0)$  — вырожденный прямоугольник.



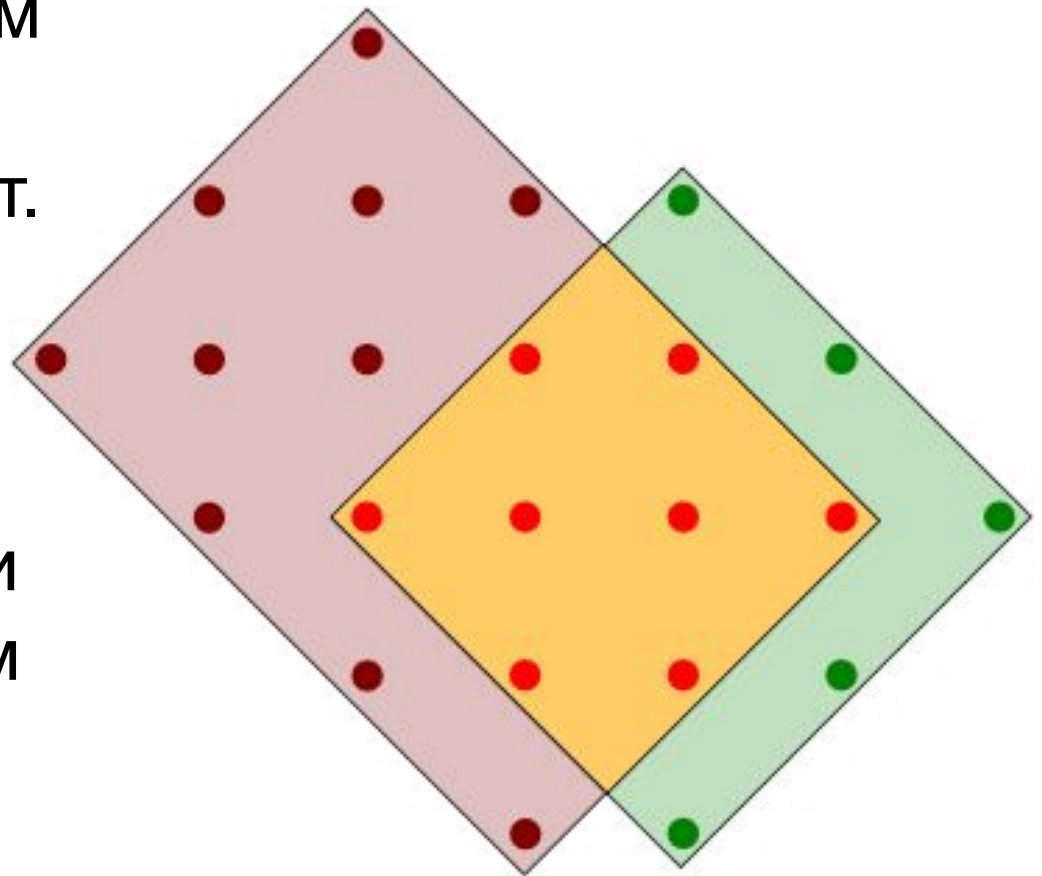
# За $t$ минут...


- Объект может пройти не более  $t$  кварталов.
- Прямоугольник «расширяется во все стороны на  $t$ »



# Данные от навигатора...

- Сообщают, в каком квадрате может находиться объект.
- Пересечем прямоугольник и квадрат (с параллельными осями) — получим **НОВЫЙ** прямоугольник.





Спасибо за внимание!  
Вопросы по задаче G?



# Задача Н. Следующее разбиение на слагаемые



Название чисел  
при сложении

Слагаемое Слагаемое Сумма или  
значение суммы

$$3 + 4 = 7$$

Сумма

# Авторы задачи

- Автор задачи — Андрей Станкевич
- Условие — Андрей Станкевич
- Подготовка тестов — Сергей Мельников
- Разбор — Сергей Мельников

# Генерация следующего комбинаторного объекта

- Дано разбиение
  - $5=1+1+3$
- Идём с конца, пока нельзя увеличить слагаемое
- Увеличим слагаемое на минимальную величину
- Допишем минимальный «хвост»

# Когда можно увеличить слагаемое?


- Первое слагаемое с конца нельзя увеличить
- Второе слагаемое с конца можно увеличить
  - Например можно прибавить к нему последнее слагаемое
  - $5=1+1+3 \rightarrow 5=1+4$

# На сколько можно увеличить слагаемое?

- Слагаемое можно увеличить на 1, если оно было меньше последнего хотя бы на 2
  - $5=1+1+3 \rightarrow 5=1+2+2$
- Иначе его надо увеличить на величину последнего слагаемого
  - $5=1+2+2 \rightarrow 5=1+4$

# Минимальный «хвост»?

- Надо вывести хвост с суммой  $S$ , при этом последнее слагаемое которое было выведено перед ним равно  $K$
- Выведем несколько (возможно ноль) слагаемых  $K$ , а затем остаток
- Остаток должен быть не меньше чем  $K$



Спасибо за внимание!  
Вопросы по задаче N?

# Задача I. Самодвойственный документ





# Авторы задачи

- Автор задачи — Сергей Мельников
- Условие — Андрей Станкевич
- Подготовка тестов — Сергей Мельников
- Разбор — Сергей Мельников

# Условие задачи

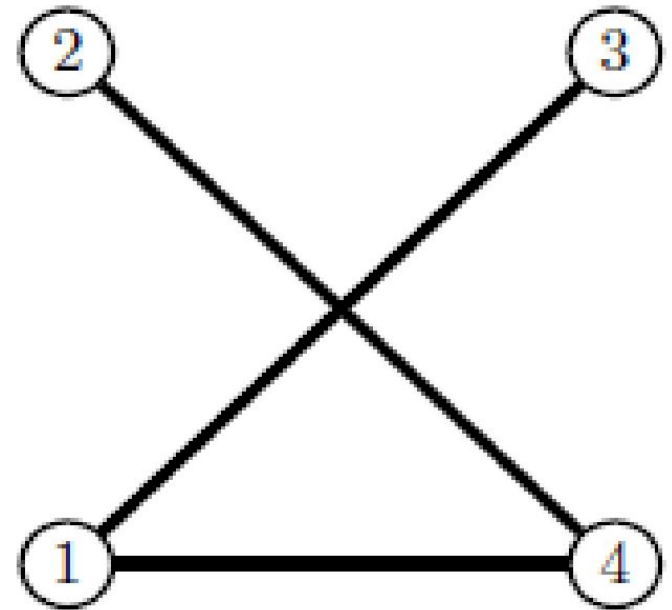
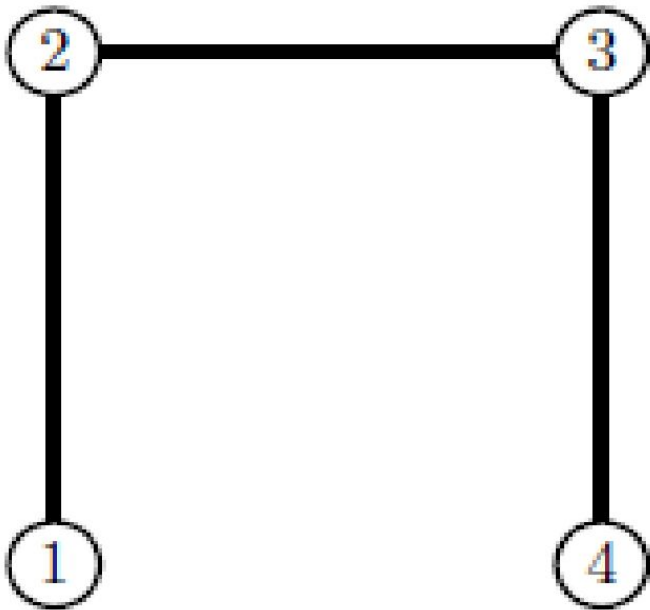
- В задаче надо построить граф из  $n$  вершин
- Первый отдел: пары чисел – это ребра графа
- Второй отдел: пары чисел – это вершины между которыми ребра нет
- Граф изоморфен своему дополнению

# Когда ответ существует?

- В полном графе из  $n$  вершин  $n(n - 1)/2$  ребер
- Если  $n = 4k + 2$  или  $n = 4k + 3$ , то ребер нечетное число – ответ «No»
- Если  $n = 4k$  или  $n = 4k + 1$ , то ответ «Yes»

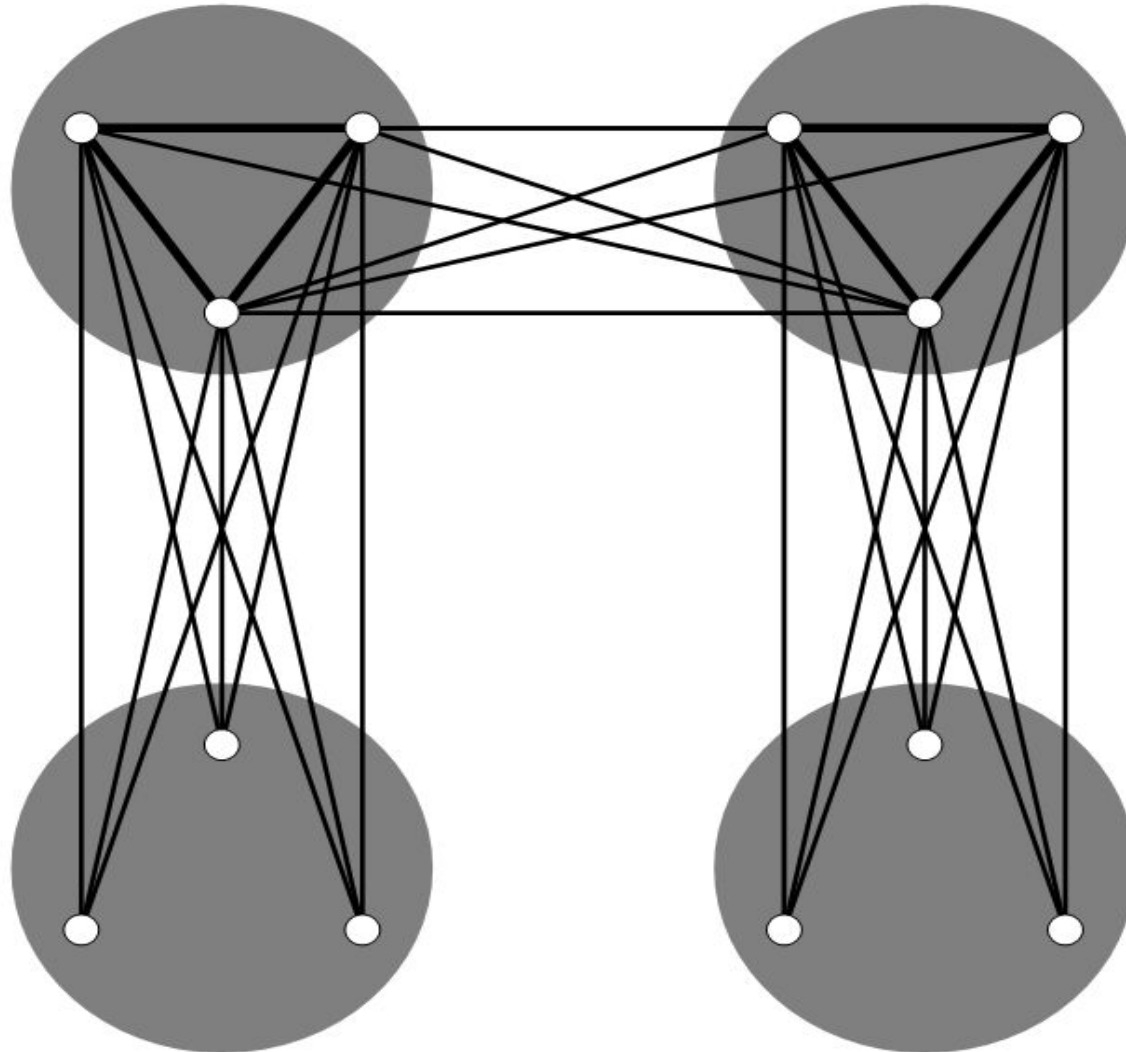
# 4к вершин

- 4 вершины



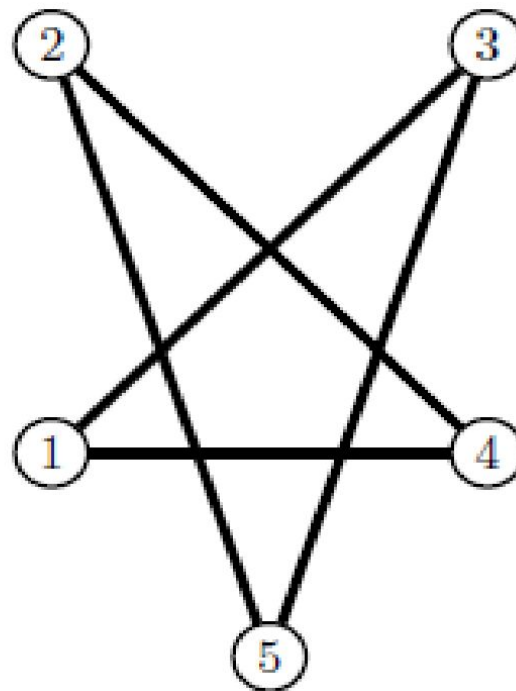
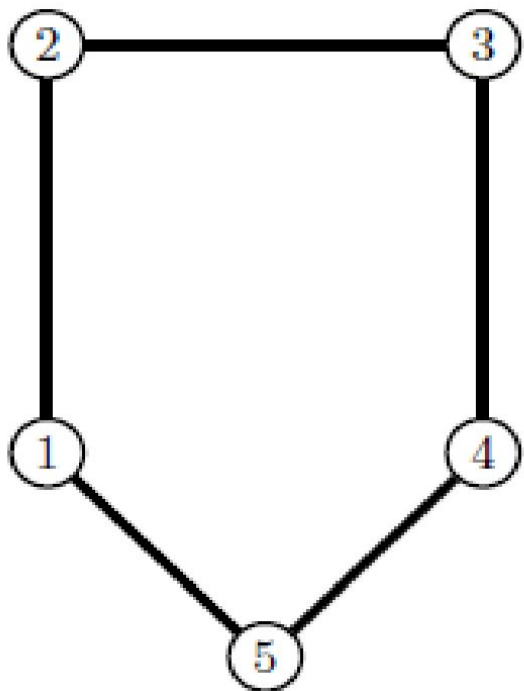
- 4к вершин – заменить вершины 2 и 3 на полные графы, 1 и 4 – на пустые

# 12 вершин



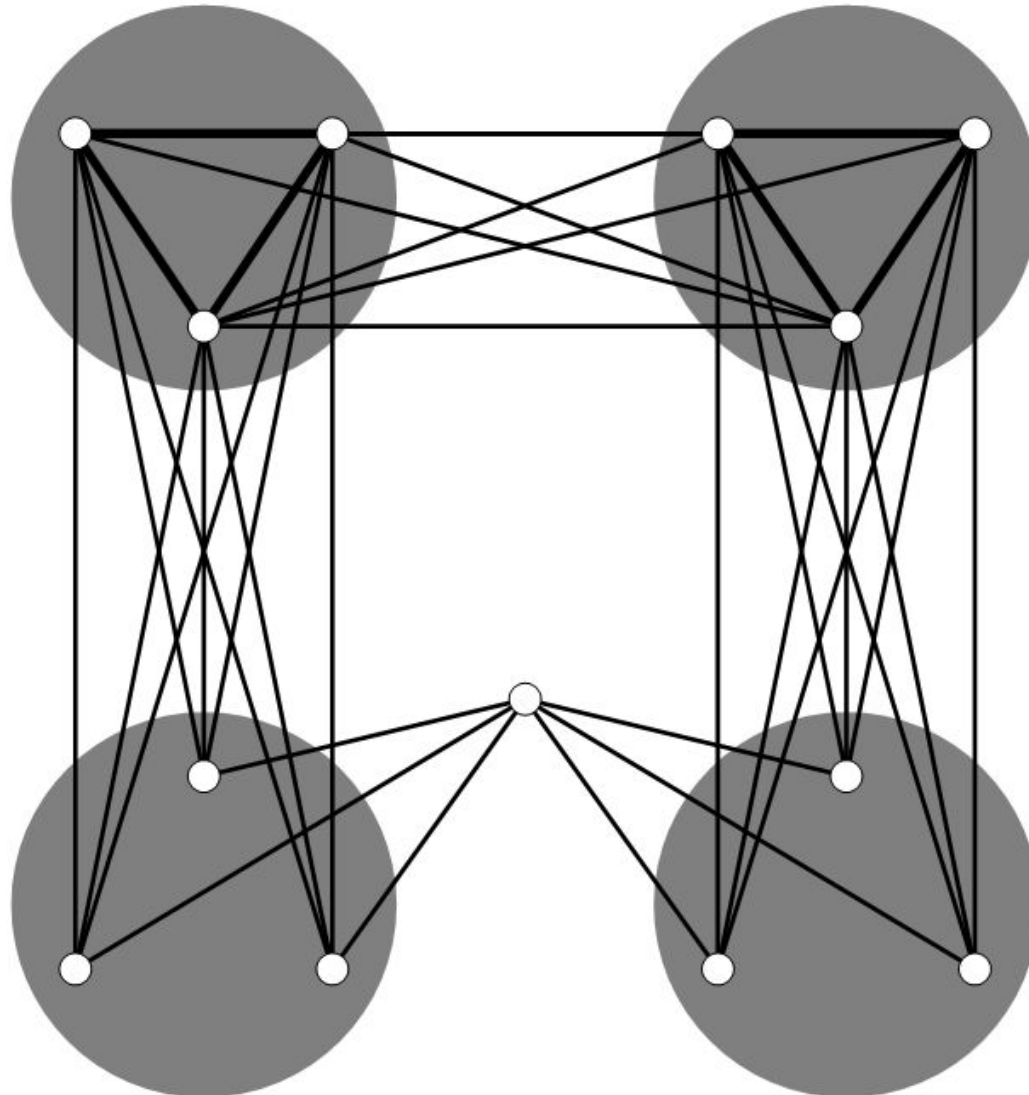
# $4k + 1$ вершина


- 5 вершин



- $4k+1$  вершина – заменить вершины 2 и 3 на полные графы, 1 и 4 – на пустые

# 13 вершин





Спасибо за внимание!  
Вопросы по задаче I?



# Задача J. Цирковое шоу





# Авторы задачи

- Автор задачи — Юрий Петров
- Условие — Павел Маврин
- Подготовка тестов — Юрий Петров
- Разбор — Юрий Петров

# Формулировка

- Дан набор отрезков
- Выбрать два поднабора, объединения которых не пересекаются
- Максимизировать минимум размеров



# Идея решения

- **Динамическое программирование**

# Решение: вычисляемая функция


- Функция  $f(a, n, t)$ :
- $a$  — самый правый из отрезков, взятых в один из наборов
- $n$  — текущее количество отрезков в первом наборе
- $t$  — какому набору принадлежит отрезок  $a$
- Значение — максимальное количество отрезков во втором наборе

# Решение: переходы

- Перебрать отрезок  $b$ , который будет завершать следующую группу
- Перебрать набор, в который взять эту группу
- Все отрезки, лежащие правее конца  $a$  и левее конца  $b$ , выгодно взять в тот же набор

# Оценка времени работы

- Всего есть  $n \times n \times 2$  состояний
- Из каждого  $O(n)$  переходов
- Переходы перебирать в порядке возрастания конца отрезка
- Суммарное время обработки переходов из одного состояния  $O(n)$
- Итоговое время  $O(n^3)$



Спасибо за внимание!  
Вопросы по задаче J?



# Задача К. Красивая таблица результатов

Аграрная мини-футбольная лига

№	команда	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	И	В	Н	П	Мин	О	
1	Гидрол (Менделкент)			7:4		10:1	4:3						8:3	7:3	9:5	10:3	7:2	8	8	0	0	62-24	24	
2	Кантар (Экзон)			7:5			8:5	7:2	4:7			9:0		8:6	10:0	4:1		8	7	0	1	58-25	21	
3	Бякел (БТӨ)		5:7				8:2					9:4	9:4	8:2	9:2	11:2	14:1	8	7	0	1	73-24	21	
4	Марафон (Агрофак)	4:7				9:3	2:14			8:4	11:6		5:4		10:5		16:5	8	6	0	2	65-48	18	
5	Самол (Экзон)			3:9			6:4				1:5		9:4	10:5	11:7	10:3	14:1	8	6	0	2	64-38	18	
6	Роза (Менделкент)	1:10			14:2	4:6			5:4	9:3	11:4		2:2				12:4	8	5	1	2	58-35	16	
7	Фаворит (ЗаРа)	3:4	5:8	2:8					6:5	6:4			5:2		6:2		8:1	8	5	0	3	41-34	15	
8	Мехенери (Преподаватели)		2:7			4:5	5:6							6:4	7:4	9:2	4:1	9:2	8	5	0	3	47-30	15
9	СТАУ-ТПС (преподаватели)			7:4	4:8		3:9	4:6				7:5	13:7	10:5			11:2	8	5	0	3	59-44	15	
10	Сосур (Экзон)				6:11	5:1	4:11			5:7				2:3	6:4	10:4	9:3	8	4	0	4	47-44	12	
11	Репан-64 (ТЮ)		8:9	4:9				2:5		7:13					6:5	13:3	9:3	8:0	8	4	0	4	49-47	12
12	Маракаса (ВПОЛТ)	3:8		4:9	4:5	4:9	2:2		4:6	3:10	3:2							8	1	1	6	27-51	4	
13	Total-90 (Экзон)	3:7	6:8	2:8		5:10		2:6	4:7		4:6	5:6						8	0	0	8	31-58	0	
14	Гол (ФНПТ)	5:9	0:10	2:9	5:10	7:11			2:9		4:10	3:13						8	0	0	8	28-61	0	
15	Юнкор (Агрофак)	3:10	1:4	2:11		3:10		1:8	1:4	2:11		3:9						8	0	0	8	14-69	0	
16	Пролет (Экзон)	2:7		1:14	5:16	1:14	4:12		2:9		3:9	0:8						8	0	0	8	18-89	0	

# Авторы задачи

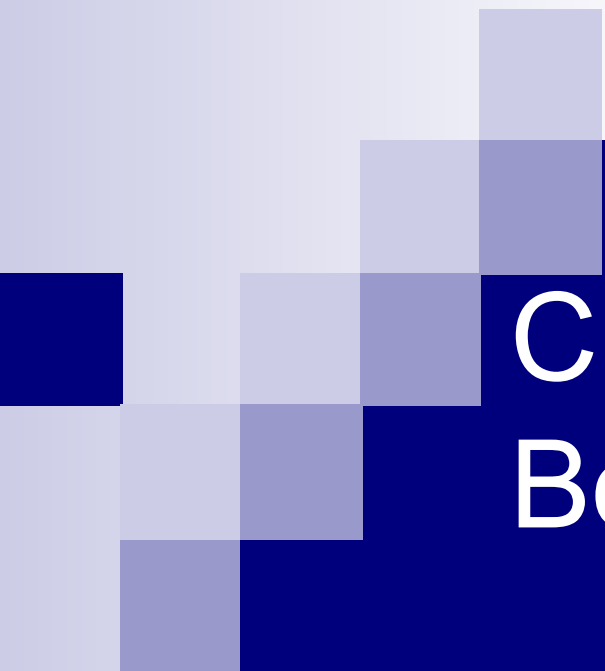
- Автор задачи — Владимир Ульнцев
- Условие — Андрей Станкевич
- Подготовка тестов — Владимир Ульянцев
- Разбор — Антон Ахи

# О чем задача?

- Таблица результатов считается красивой, если количество задач, решенных каждой из команд, либо 0, либо делитель числа задач на соревновании
- Сколько еще можно сдать задач, чтобы таблица не переставала быть красивой

# Как решать?

- Для каждой команды увеличивать количество сданных ею задач, пока это не изменяет красоту таблицы результатов
- У количества задач на соревновании не может быть более 24 подряд идущих делителей, так как минимальное число, которое делится на все числа от 1 до 24 это — 5354228880



Спасибо за внимание!  
Вопросы?

<http://neerc.ifmo.ru/school>