Динамическое программирование

Немного теории

Динамическое программирование — метод решения сложных задач путём разбиения их на более простые подзадачи.

- Применяется к задачам, выглядящим как набор перекрывающихся подзадач, сложность которых чуть меньше исходной.
- В этом случае время вычислений, по сравнению с «наивными» методами, можно значительно сократить.

Это уже известно…

Последовательность Фибоначчи:

- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Каждое число в последовательности вычисляется как сумма двух предыдущих

«Наивным» будет решение «в лоб», через рекурсию…

Числа Фибоначчи

```
int fib(int n) {
   if (n<2) return 1;
   return fib(n-1)+fib(n-2);
}
```

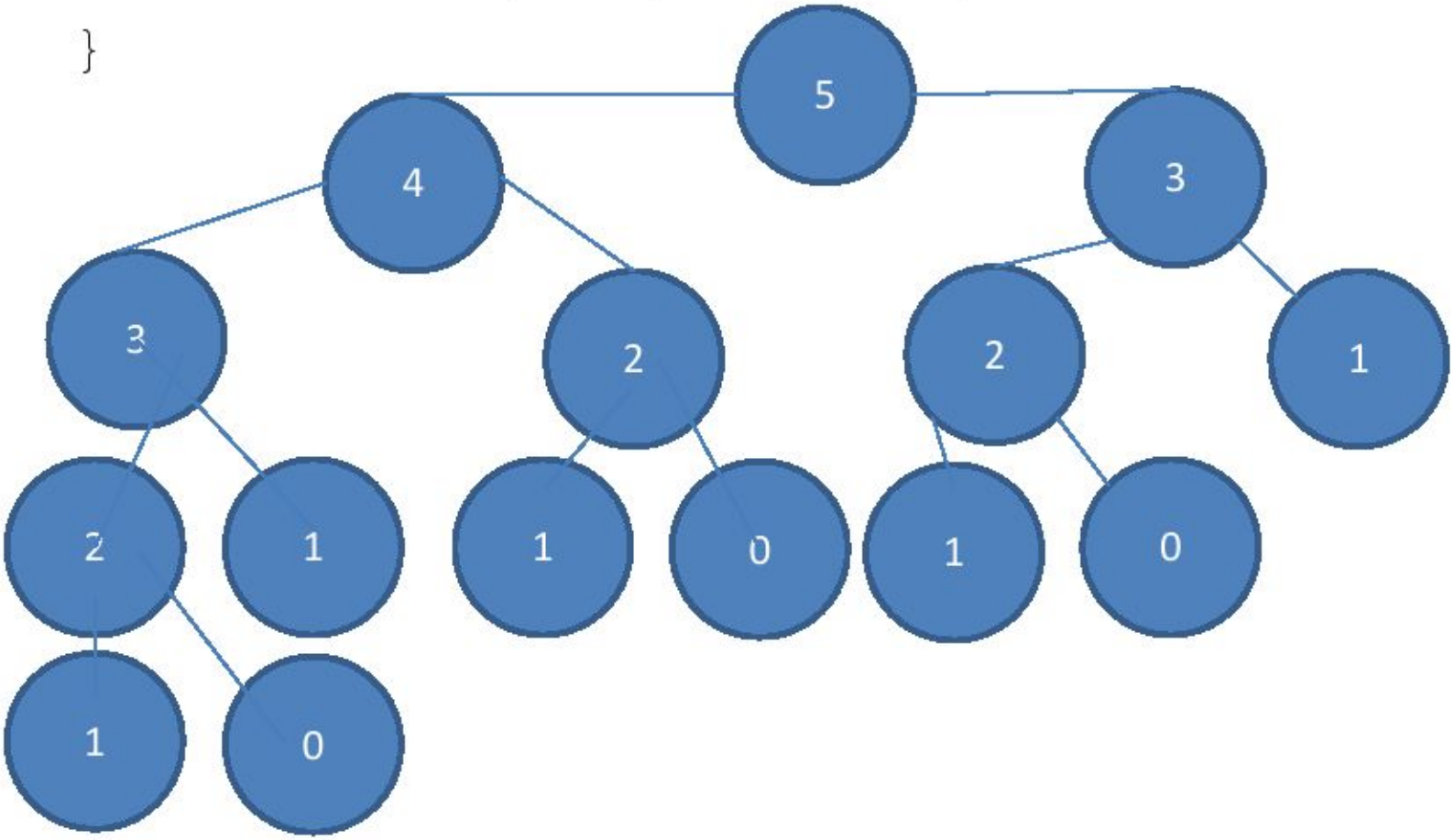
Числа Фибоначчи

```
int fib(int n) {
   if (n<2) return 1;
   return fib(n-1)+fib(n-2);
}
```

```
fib(5)=fib(4)+fib(3)
fib(4)=fib(3)+fib(2)
fib(3)=fib(2)+fib(1)
fib(2)=fib(1)+fib(0)
```

Числа Фибоначчи

```
int fib(int n) {
   if (n<2) return 1;
   return fib(n-1)+fib(n-2);
}
```



Числа Фибоначчи

Решение методом «динамического программирования» предполагает запоминание каждого числа в массиве.

Тогда N-е число Фибоначчи легко можно найти по следующей формуле:

$$F[N] = F[N-1] + F[N-2], \text{ при } N > 2.$$

Задача об n – битных двоичных числах

Найти количество F всех n – битных двоичных чисел, у которых в двоичной записи нет подряд идущих двух единиц. (N≤30).

Задача об n – битных двоичных числах

N(кол-во бит)	**Числа, удовлетворяющие условию задачи**	**F(N)**
1	0,1	F(1)=2
2	00,01,10,~~11~~	F(2)=3
3	000,001,010,~~011~~, 100,101,~~110,111~~	F(3)=5

F[N] = F[N-1] + F[N-2], при N > 2.

Зайчик на лесенке

На вершине лесенки, содержащей N ступенек, находится зайчик, который начинает прыгать по ним вниз, к основанию.

Зайчик может прыгнуть на следующую ступеньку, на ступеньку через 1 или 2.

Определить число всевозможных “маршрутов” зайчика с вершины на землю.

Зайчик на лесенке

Пусть зайчик находится на ступеньке с номером X.

По условию он может спрыгнуть на ступеньки с номерами X - 1, X - 2 и X - 3.

Пусть F(X) - число маршрутов со ступеньки X до земли

F(1)	1
F(2)	1+1, 2
F(3)	1+1+1, 1+2, 2+1, 3

$$F[X] = F[X - 1] + F[X - 2] + F[X - 3]$$

Программа на C++

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{    int N; long long F[31];
     cin>>N;
     F[1]=1;F[2]=2;F[3]=4;
     for(int i=4; i <= N; i++)
          F[i]=F[i-1]+F[i-2]+F[i-3];
     cout<<F[N];
return 0;
}
```

Задача о фишке

Фишка может двигаться по полю длины N только вперед. Длина хода фишки не более K (N, K ≤10).

Найти количество различных путей, по которым фишка может пройти поле от позиции 1 до позиции N.

Задача о фишке

Пусть S[i] - количество различных путей, по которым фишка может пройти поле от начала до позиции с номером i. Предположим, что для любого j от 1 до i известны значения величин S[j]. Задача состоит в определении правила вычисления значения S[i+1], используя значения известных величин. Заметим, что в позицию с номером i+1 фишка может попасть из позиций i, i-1,...,i-k.

$$S[i+1]=S[i]+S[i-1]+\ldots+S[i-k]$$

Вычисляя последовательно значения величин S[1], S[2],..., S[N] по правилу, получаем значение S[N] – решение задачи

Алгоритм динамического программирования

Динамическое программирование – ***метод оптимизации, приспособленный к задачам, в которых требуется построить решение с максимизацией или минимизацией, т.е. оптимальным значением некоторого параметра.***

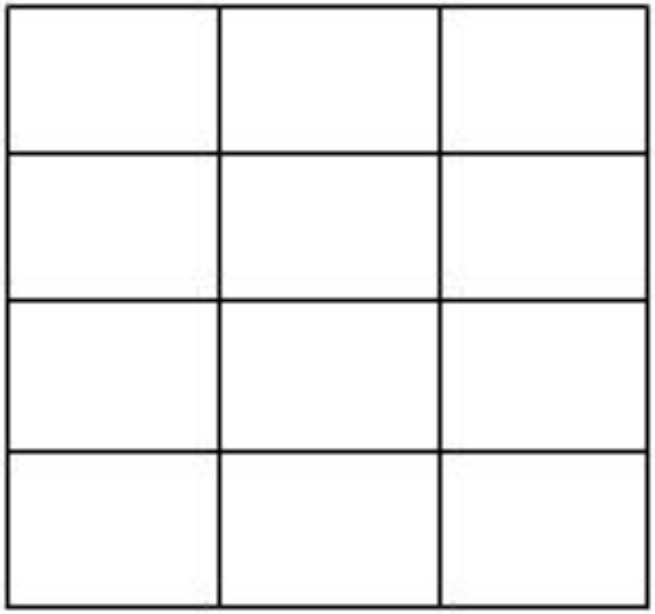
Его алгоритм можно сформулировать так:

1. Выделить и описать подзадачи, через решение которых будет выражаться искомое решение;
2. Выписать рекуррентные соотношения (уравнения), связывающие оптимальные значения параметра для всех подзадач;
3. Вычислить оптимальное значение параметра для всех подзадач;
4. Построить само оптимальное решение.

В задачах на подсчет количеств допустимых вариантов (задачи рассмотрены выше) пункт 4 не нужен

Задача о черепашке

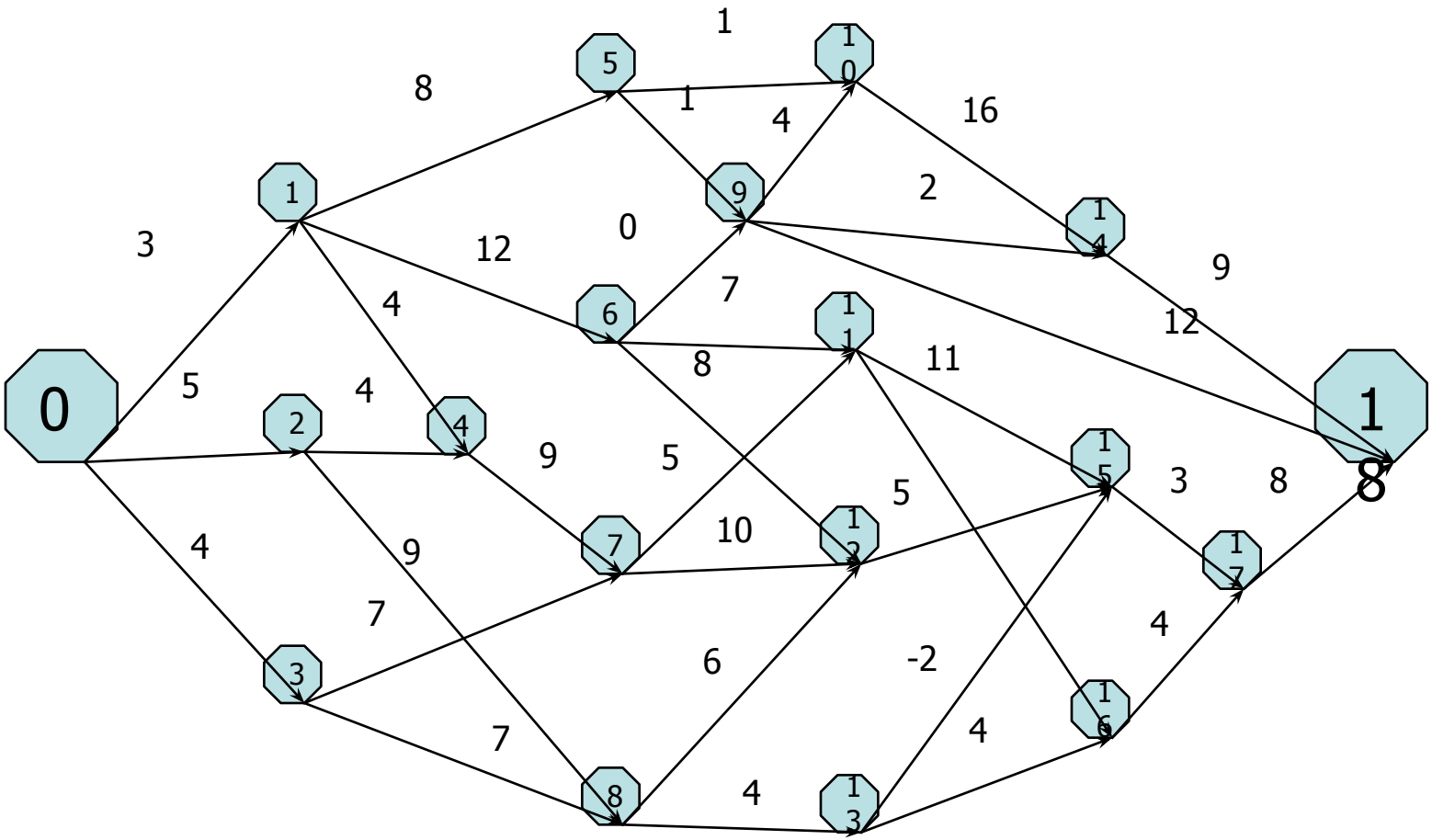
Сколько вариантов пройти с левого нижнего угла в правый верхний угол?



Формулировка задачи динамического программирования

- Дано:
  - множество состояний
    - в том числе *начальное* и *конечное*
  - множество возможных переходов из одного состояния в другое
    - с каждым переходом связывается числовой параметр
      - интерпретируется как затраты, выгода, расстояние, время и т. п.
- Найти:
  - оптимальную последовательность переходов (*путь*) из начального состояния в конечное
    - максимум или минимум суммы числовых параметров
    - предполагается, что хотя бы один путь из начального состояния в конечное существует

Пример


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
1
8
5
4
3
12
0
7
8
11
9
5
10
9
7
6
-2
4
7
4
2
16
1
4
9
12
3
8
5
4

Математическая запись

$$\max_{(x_{ij}\,|\,i\in I,\,j\in J)} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \le 1,\ j \in J \setminus \{\#J\}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = \sum_{k\in J} x_{jk},\ j \in J \setminus \{\#J\}$$

$$x_{ij} \in \{0;1\},\ i \in I,\ j \in J \setminus \{\#J\},\ (i,j) \in A$$

$$x_{ij} = 0,\ i \in I,\ j \in J \setminus \{\#J\},\ (i,j) \notin A$$

x_{ij} переменная включения дуги $(\ ,i)$ в путь

c_{ij} числовое значение, приписанное дуге

I множество начальных вершин дуг

J множество конечных вершин дуг

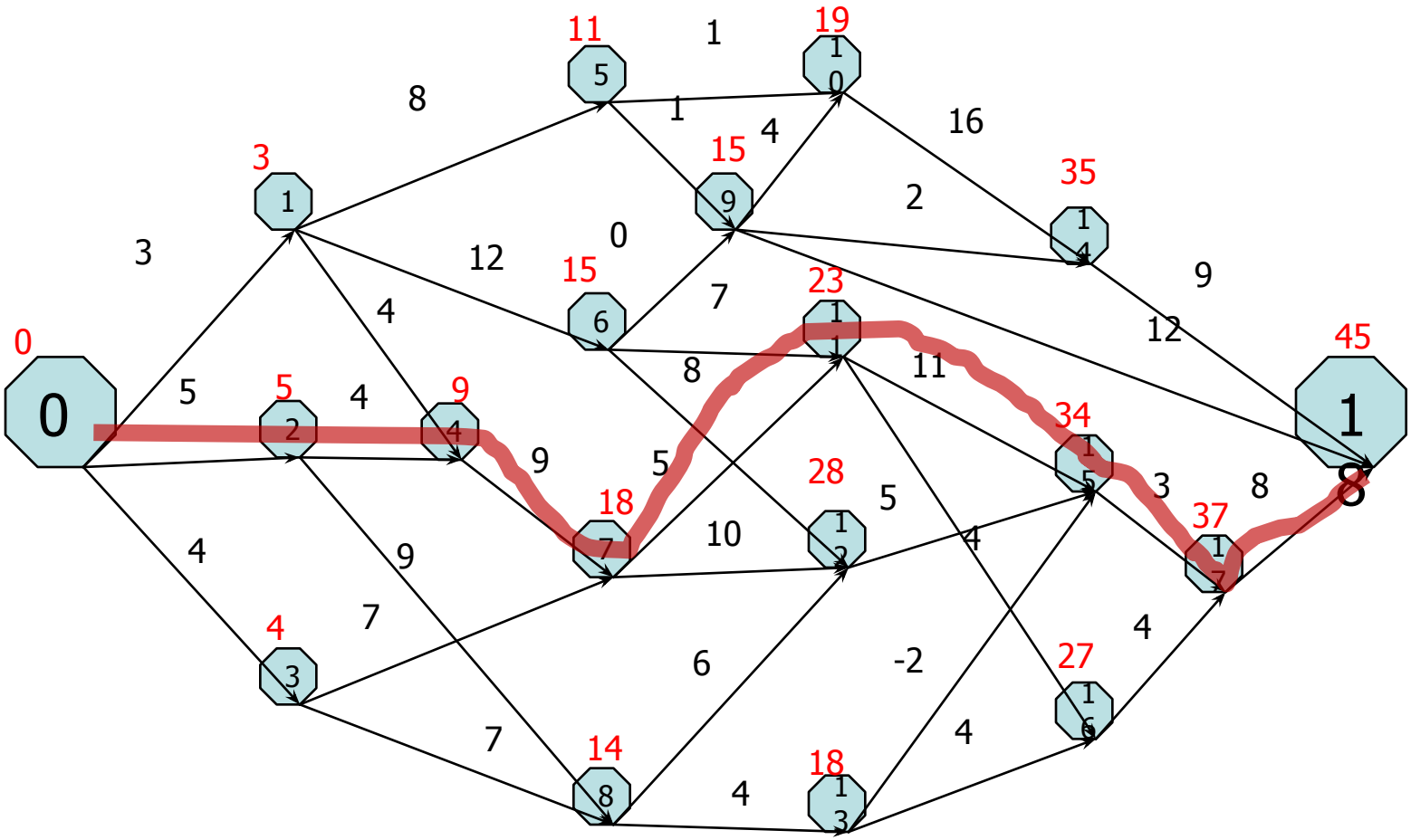
A множество всех дуг

$\#$ оператор «число элементов во множестве»

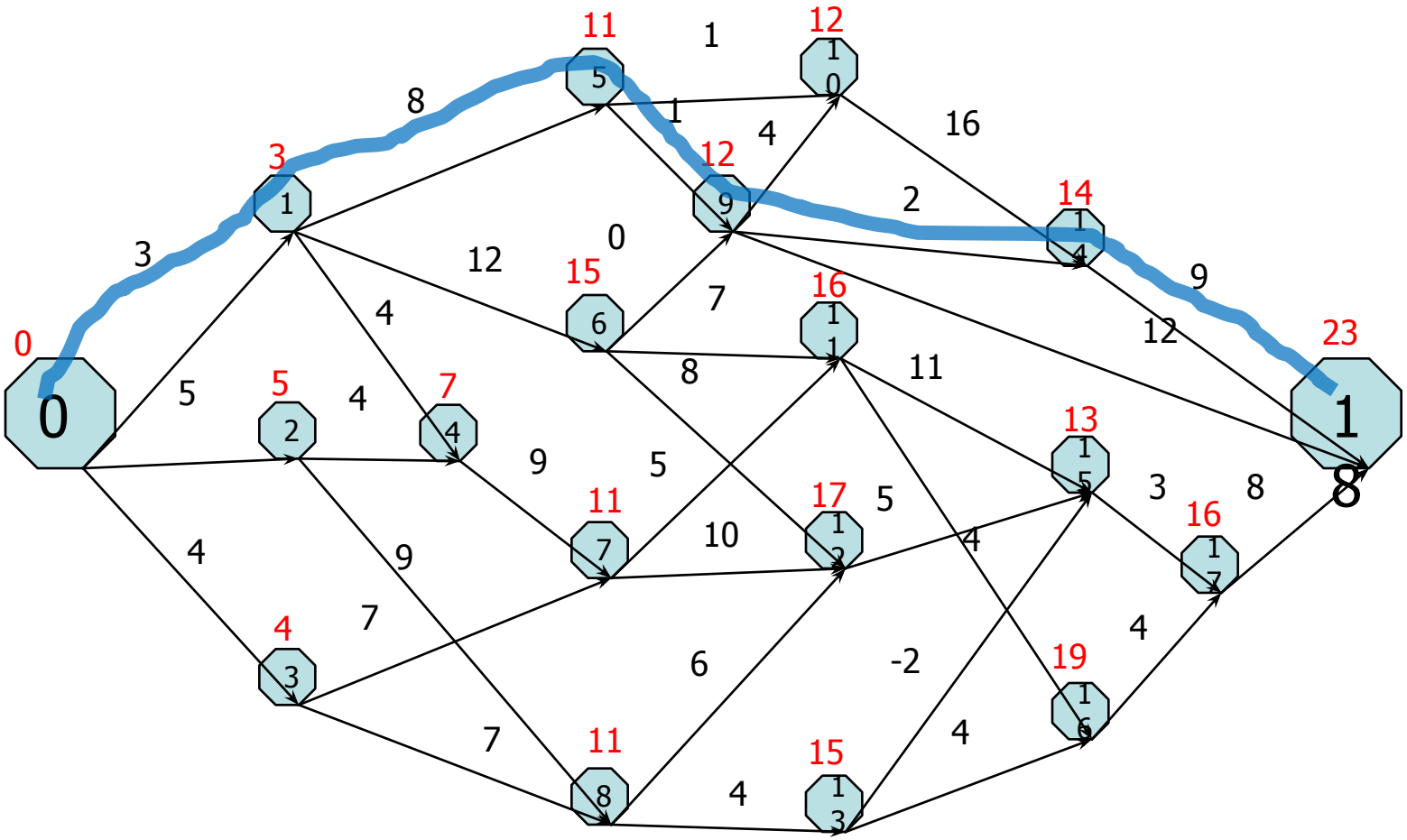
Принцип оптимальности Беллмана

- *Если вершины A и B лежат на оптимальном пути между вершинами 0 и X, то часть оптимального пути от 0 до X между вершинами A и B непременно является оптимальным путём от A до B.*
- Следствие
  - Чтобы найти оптимальный путь от 0 до *A*, достаточно исследовать продолжения к *A* всех оптимальных путей до вершин, предшествующих *A*
  - Продолжения неоптимальных путей к предшествующим вершинам можно не просчитывать: они никогда не дадут оптимального пути к *A*
- Принцип Беллмана позволяет построить простую и эффективную вычислительную процедуру для решения задач динамического программирования

Алгоритм решения задач динамического программирования



Алгоритм решения задач динамического программирования



минимум

Экономические приложения

Управление проектами	• Дуги - работы, которые должны быть выполнены • Параметры – продолжительность работ • Самый длинный путь определяет минимальный срок выполнения проекта
Управление реновацией основных средств производства	• Дуги соответствуют решениям: • *e.g.*, эксплуатировать; ремонтировать; списать • Параметры –доходы • Самый длинный путь определяет жизненный цикл элемента основных средств
Бизнес-планирование	• Дуги – операции, переводящие фирму в новое состояние • Параметры – доходы (расходы) • Самый длинный путь определяет наилучший бизнес-план
Поиск оптимального маршрута	• Дуги – пути сообщения • Параметры – время (или стоимость) перевозки • Самый короткий (дешёвый) путь определяет оптимальную перевозку

Условия применения динамического программирования

1. Оптимальное решение задачи выражается через оптимальное решение задач меньшей размерности, представимых в виде подзадач (подпрограмм). Улучшая решение подзадач, тем самым, улучшается решение общей задачи.

2. Небольшое число подзадач, что позволяет хранить решения каждой подзадачи в таблице. Уменьшение числа подзадач происходит из-за многократного их повторения(т.н. перекрывающиеся подзадачи).

3. Дискретность (неделимость) величин, рассматриваемых в задаче.

4. Один из главных критериев, когда принцип ДП дает эффект уменьшения временной сложности: если в процессе решения необходимо многократно перебирать одни и те же варианты (за счет увеличения емкостной сложности уменьшается временная сложность).