Динамическое программирование

Рейтинг за домашнюю работу

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM
1	Обновлён 18.10.2016 22:58																																						
2	Всего задач: 35			Контест за 20.09.2016								Контест за 27.09.2016								Контест за 04.10.2016											Контест за 11.10.2016								
3	Количество решённых задач	Участники	Группа	A	B	C	D	E	F	G	H	A	B	C	D	E	F	G	H	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	A	B	C	D	E	F	G	H	
4	29	Виктор Зелюков(Stimp)	101	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+							
5	26	Михаил Голиков(Meegoo)	101	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+										
6	22	Алексей Липин(98skipper)		+	+	+	+	+	+			+	+	+	+					+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+							
7	16	Шумилин Павел(deinceptor)	101	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			+		+	+										+								
8	14	Ольга Вайс(OljaV)		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+																					
9	13	Василий Шадчин(Androiz)	103	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+																							
10	13	Рустэм Алькапов(SnakeAce)	205	+	+	+	+	+	+	+		+	-	-	-	-	-	+		+	+	+	+																
11	13	Ситников Константин(VVlnaJle)	101	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			+																					
12	9	Анастасия Шумакова(asyaflesh)	252	+	+	+	+	+	+	+		+			+																								
13	8	Александр Первухин(Terron)		+	+	+	+	+	+	+	+																												
14	4	Одинцов Александр(etis_atis)	102	+	+	+	+																																
15	3	Витовицкий Максим(mowenik)	103									+	+	+																									
16	1	Гоглачев Андрей(Andru7428)	106									+																											
17																																							

Динамическое программирование — это когда у нас есть задача, которую непонятно как решать, и мы разбиваем ее на меньшие задачи, которые тоже непонятно как решать. (c) А. Кумок.

Задача про черепашку

Есть клетчатое поле NxM. В левом верхнем углу сидит черепашка. Она умеет ходить только вправо или вниз.

А) Сколько у неё разных путей до правого нижнего угла?

Первая основная идея ДП

Будем искать ответ не только на нашу общую задачу, но и на более мелкие аналогичные задачи («подзадача»). В нашем случае решим для каждой клетки поля сколькими способами до неё можно добраться.

А что дальше?

1) Ответ для верхнего левого угла очевиден. У нас только один способ до него добраться.
2) Для клеток левого столбца и верхней строки тоже всё очевидно.

Вторая основная идея ДП

Решая задачу для очередной клетки, будем считать, что мы уже знаем ответ для предыдущих клеток и попробуем, используя это знание, найти ответ для текущей.

А как мы можем попасть в очередную клетку?

Всё очевидно! Мы можем прийти в неё либо с верхней, либо с левой клетки.

Answer[i][j] = Answer[i - 1][j] + Answer[i][j - 1]

- Данную задачу можно решить также с помощью комбинаторики:

$$\binom{i-1}{i+j-2} = \binom{j-1}{i+j-2} = Ans[i][j]$$

Б) Пусть в каждой клетке поля записано некоторое число. Требуется найти максимальную сумму чисел, которую можно набрать по пути в правый нижний угол.

34	17	27	43	53
31	30	42	49	11
18	31	21	24	55
43	41	36	58	53

- Пусть A[i][j] – число в (i,j) клетке, а dp[i][j] ответ для неё.

1) dp[1][1] = A[1][1];
2) dp[1][j] = $\sum_{k=1}^{j} A[1][k]$,

   dp[i][1]=$\sum_{k=1}^{i} A[k][1]$
3) dp[i][j] = max(dp[i-1][j], dp[i][j-1]) + A[i][j];

В результате получим такую таблицу:

34	51	78	121	174
65	95	137	186	197
83	126	158	210	265
126	167	203	268	321

Последовательность из нулей и единиц без двух единиц подряд.

- Дано число N. Рассмотрим все 2^N последовательностей из нулей и единиц. Назовём последовательность хорошей, если в ней нигде не встречается две единицы подряд. Требуется посчитать общее количество хороших последовательностей.

1) dp[i][j] – ответ для последовательности длины i, оканчивающейся на j
2) dp[1][0] = dp[1][1] = 1;
3) dp[i][0] = dp[i - 1][0] + dp[1 - 1][1];
4) dp[i][1] = dp[i - 1][1];

А можно заметить, что это числа Фибоначчи ☺️

Немного теории

Определения:

1) Состояние – это набор параметров, с помощью которых мы фиксируем подзадачу
2) Переходы – это рекуррентное соотношение между состояниями
3) Порядок пересчёта – это порядок, по которому мы обходим состояния

Чтобы успешно решить задачу динамикой нужно ответить на следующие вопросы:

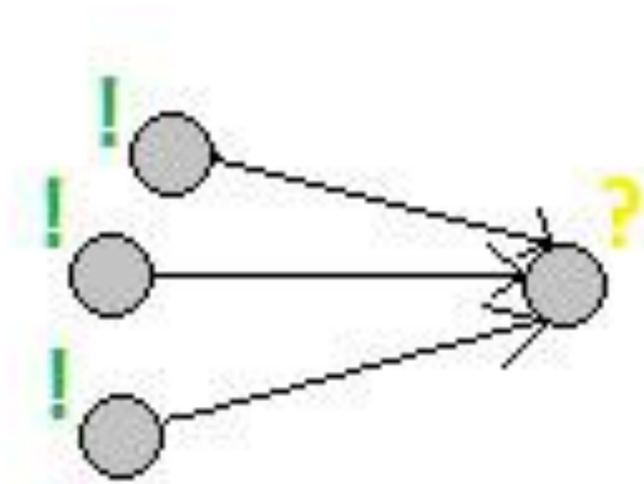
1) Что мы вычисляем?
2) Какие у нас состояния?
3) Каковы значения в начальных состояниях?
4) Какие переходы между состояниями?
5) Каков порядок пересчёта?
6) Где хранится ответ на задачу?

Порядок пересчёта

Существует три порядка пересчёта:

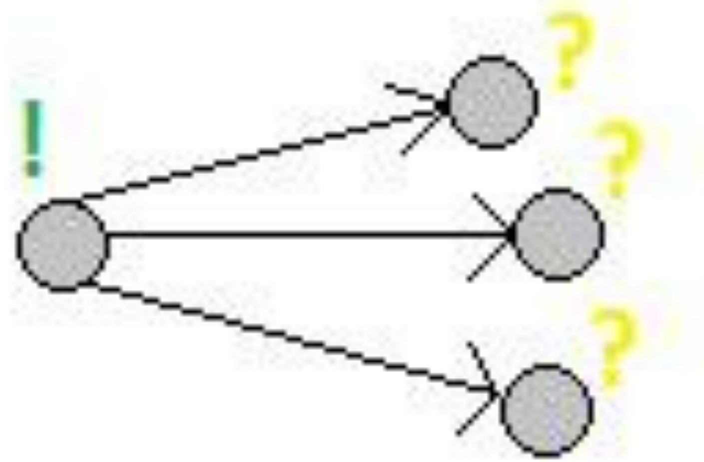
1) Прямой

Состояния последовательно пересчитываются исходя из уже посчитанных



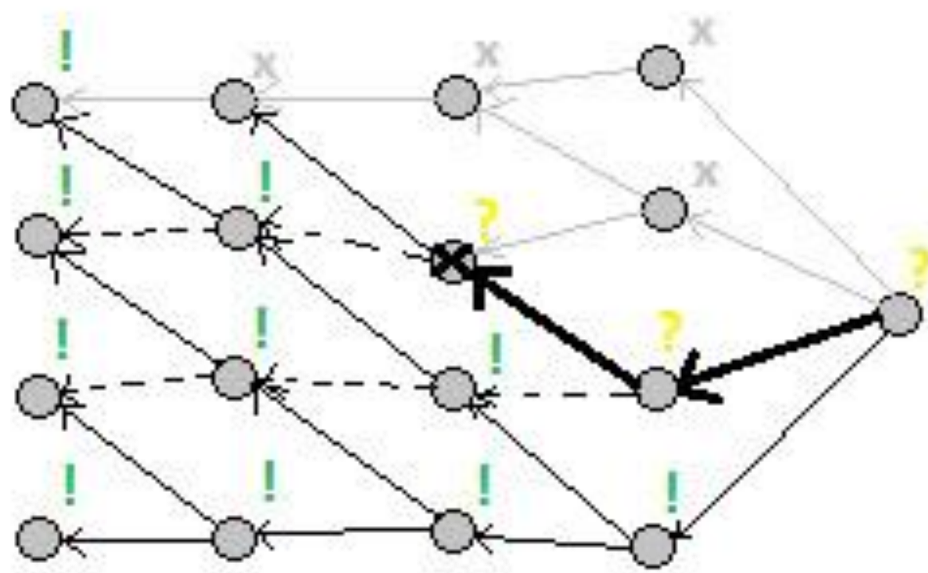
2) Обратный

Обновляются все состояния, зависящие от текущего состояния



3) Ленивая динамика

Рекурсивная функция пересчёта динамики. Это что-то вроде поиска в глубину по ацикличному графу состояний, где рёбра – это зависимости между ними.



Классы задач на ДП

1) **Подсчёт объектов, в том числе определение существования объекта.** Т.е. надо посчитать, сколько всего существует объектов с заданными свойствами, или проверить, существует ли хотя бы один.
2) **Нахождение оптимального объекта.** Требуется в некотором множестве объектов найти в некотором смысле оптимальный.
3) **Вывод k-ого объекта.** Нужно найти в некотором порядке k-ый объект.

Виды задач на ДП

1) Линейное ДП
2) Многомерное ДП
3) ДП на подотрезках
4) ДП по полной сумме
5) ДП на ациклических графах
6) ДП на деревьях
7) Игры(ретро-анализ)
8) ДП на подмножествах.
9) ДП по профилю
10) Динамика по изломанному профилю

Отдельно рассмотрим семейство задач о рюкзаке

- Классическая постановка задачи:

Есть N предметов, обладающих весом w_i и стоимостью p_i. В рюкзак влезают предметы, суммарный вес которых не превосходит W. Какую максимальную ценность может иметь рюкзак?

- Перебирать все подмножества набора из N предметов. Сложность такого решения O(2^N).
- Метод динамического программирования. Сложность – O($N \times W$).

Решение методом динамического программирования

Пусть dp[i][j] – есть максимальная стоимость предметов , которое можно уложить в рюкзак вместимости j, если мы используем только первые i предметов.

dp[i][0] = dp[0][j] = 0;

dp[i][j] = max(dp[i-1][j], dp[i-1][j - wi] + pi);

Ответ: dp[N][W];

Пример

W = 13, N = 5

w1 = 3, p1 = 1

w2 = 4, p2 = 6

w3 = 5, p3 = 4

w4 = 8, p4 = 7

w5 = 9, p5 = 6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
k=1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
k=2	0	0	1	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
k=3	0	0	1	6	6	6	7	7	10	10	10	11	11
k=4	0	0	1	6	6	6	7	7	10	10	10	13	13
k=5	0	0	1	6	6	6	7	7	10	10	10	13	13

Другие задачи семейства

Ограниченный рюкзак - обобщение классической задачи, когда любой предмет может быть взят некоторое количество раз.

Пример: Вор грабит склад. Он может унести ограниченный вес, каждый товар на складе содержится в определенном ограниченном количестве. Нужно унести предметов на максимальную сумму.

Варианты решения:

- Перебор.
- Методом динамического программирования.

Решение методом ДП

- Пусть dp[i][j] – максимальная стоимость любого возможного числа предметов типов от 1 до i, суммарным весом до j.

dp[0][j] = dp[i][0] = 0;

dp[i][j] = max(dp[i-1][j], dp[i-1][j-l*wi]+l*pi), где l ϵ $[0,\ \min(b_i,\ \lfloor c/w_i \rfloor)]$

Ответ: dp[N][W]

Сложность: O(NW^2)

Неограниченный рюкзак - обобщение ограниченного рюкзака, в котором любой предмет может быть выбран любое количество раз.

Пример: Перекупщик закупается на оптовой базе. Он может увезти ограниченное количество товара, количество товара каждого типа на базе не ограниченно. Нужно увезти товар на максимальную сумму.

Варианты решения:

- Перебор.
- Методом динамического программирования.

Пусть dp[i][j] – есть максимальная стоимость предметов , которое можно уложить в рюкзак вместимости j, если мы используем только первые i предметов.

dp[i][0] = dp[0][j] = 0;

dp[i][j] = max(dp[i-1][j], dp[i][j - wi] + pi);

Ответ: dp[N][W];

Непрерывный рюкзак - вариант задачи, в котором возможно брать любою дробную часть от предмета, при этом удельная стоимость сохраняется.

Пример: Вор грабит мясника. Суммарно он может унести ограниченный вес товаров. Вор может резать товары без ущерба к удельной стоимости. Нужно унести товара на максимальную сумму.

Варианты решения:

Возможность брать любую часть от предмета сильно упрощает задачу. Жадный алгоритм дает оптимальное решение в данном случае.

- **Мультипликативный рюкзак** – есть N предметов и M рюкзаков (M ≤ N). У каждого рюкзака своя вместимость W_i. Задача: выбрать M не пересекающихся множеств, назначить соответствие рюкзакам так, чтобы суммарная стоимость была максимальна, а вес предметов в каждом рюкзаке не превышал его вместимость.

Пример: У транспортной компании есть парк машин разной грузоподъемности. Нужно перевезти товара на максимальную сумму с одного склада на другой единовременно.

Варианты решения:

Перебор

Полезные ссылки

goo.gl/Ip0tXp – Подробная лекция о динамическом программировании

goo.gl/ehm0lw – Задача о рюкзаке