



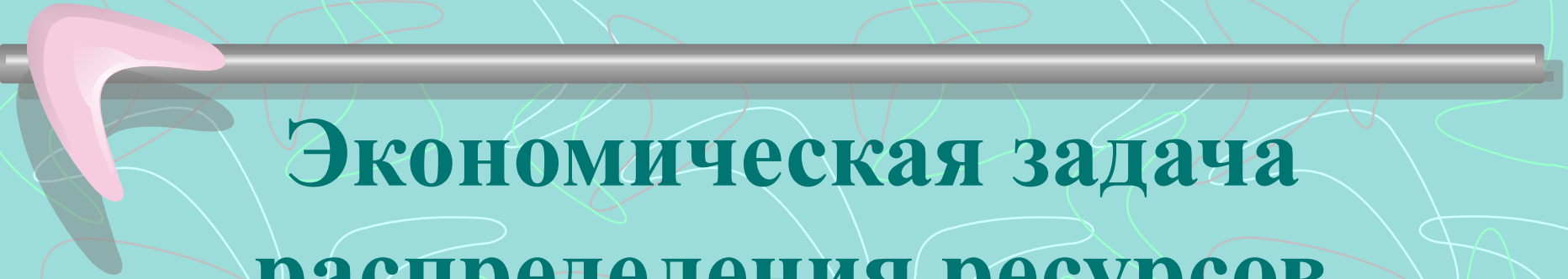
Динамическое программирование



Динамическое программирование (ДП)

--особый метод, он специально приспособлен для оптимизации динамических задач, в которых операция состоит из элементов, сильно влияющих друг на друга.

ДП связано с именем Ричарда Беллмана, который сформулировал принцип Беллмана. Он позволяет существенно сократить перебор решений в многоэтапных нелинейных задачах.



Экономическая задача распределения ресурсов

Пусть есть начальный капитал k_0 .

Его можно потратить на несколько предприятий

P_1, P_2, \dots, P_n

X_{ij} - количество средств вкладываемых в i -ом году, в j -ое предприятие.

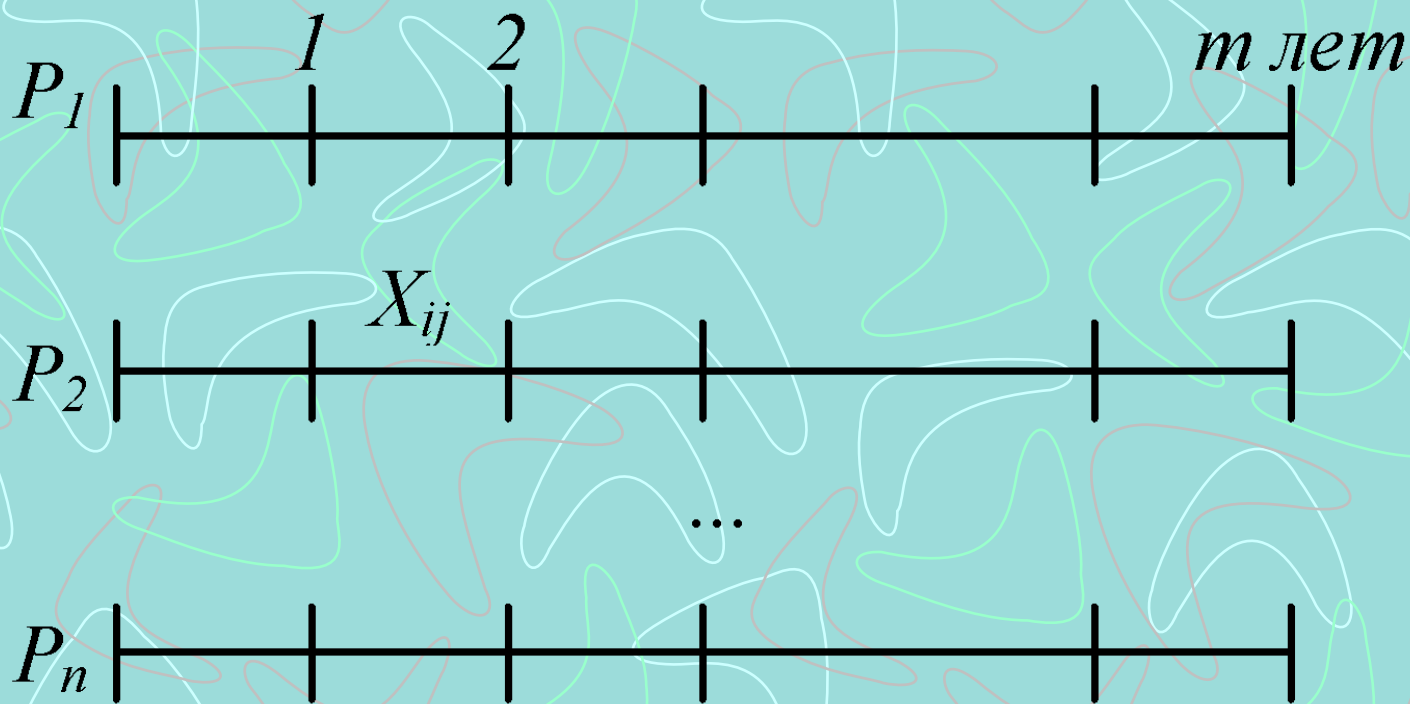
В результате получается эффект:


$$W_{ij} = f(X_{ij})$$



В общем случае это не линейная функция.

$$W \sum f(X_{ij}) \rightarrow \max$$
$$\sum X_{ij} \leq k_0$$





Так как функция W - нелинейная, то получаем задачу нелинейного программирования. Решать её сложно, кроме того, часто X_{ij} - дискретные значения.

Вопрос: нельзя ли решить задачу последовательно, т. е. найти оптимальное вложение для первого года, второго и т. д. т. е. провести последовательную оптимизацию.

В большинстве задач так нельзя, т. к. то, что мы решили оказывает влияние на последующие шаги.



Например:

Бег на 800 метров. Каждый бегун имеет запас энергии, который он тратит на каждые 100 метров. t_i – время на i – й 100 метров.

$$\sum t_i(x_i) \rightarrow \min;$$

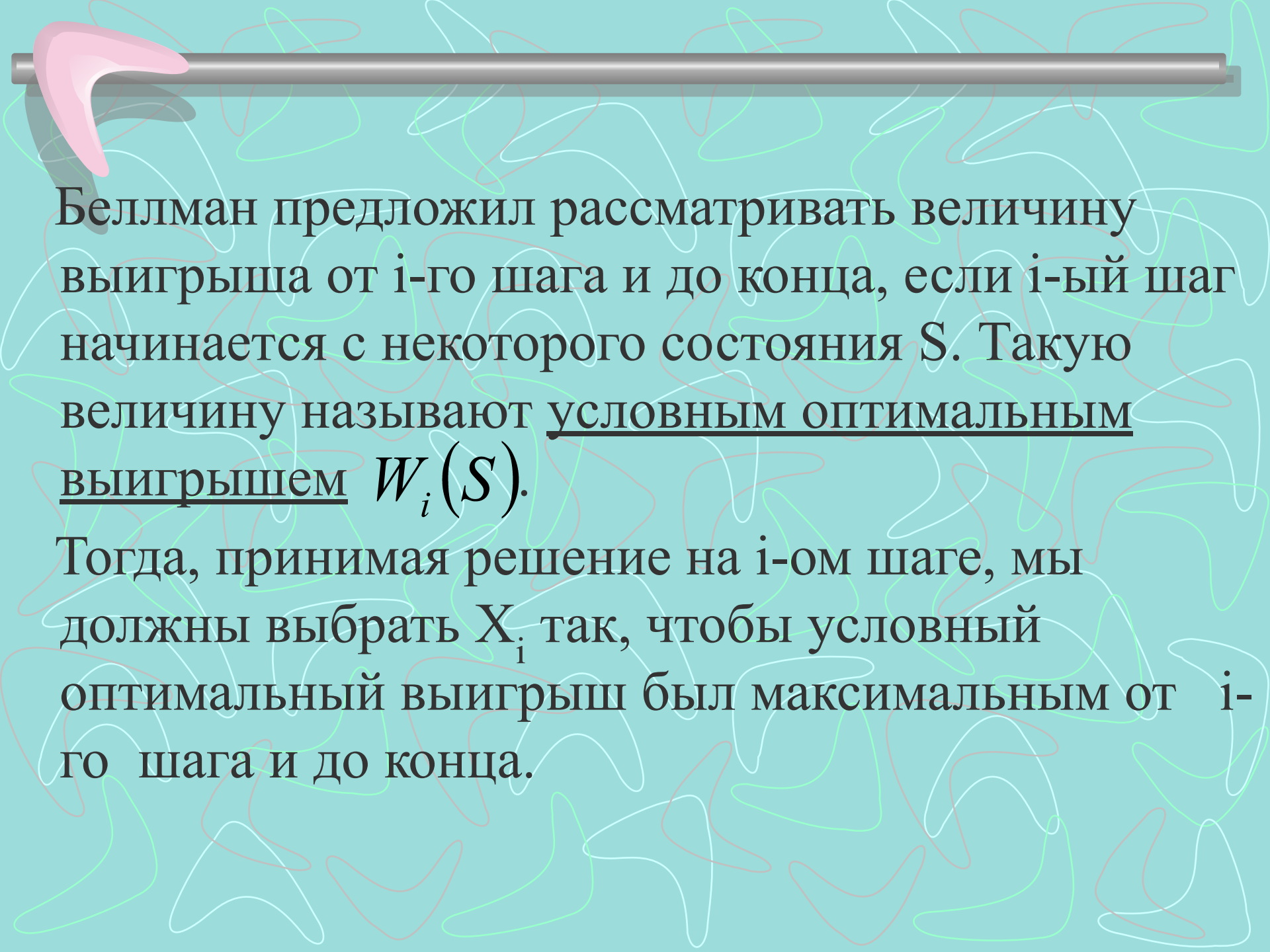
$$\sum x_i \leq x_0.$$

Оказывается, на первых 100 метров бегун будет обеспечивать минимальное время.



Принцип оптимальности Беллмана

Принцип оптимальности Беллмана ставит вопрос о том, что такое оптимальность отдельного элемента системы с точки зрения оптимальности всей системы. Принимая решение на отдельном этапе, мы должны выбирать управление на этом этапе с прицелом на будущее, т. к. нас интересует результат в целом за все шаги.



Беллман предложил рассматривать величину выигрыша от i -го шага и до конца, если i -ый шаг начинается с некоторого состояния S . Такую величину называют условным оптимальным выигрышем $W_i(S)$.

Тогда, принимая решение на i -ом шаге, мы должны выбрать X_i так, чтобы условный оптимальный выигрыш был максимальным от i -го шага и до конца.



Определение: оптимальность в малом понимается через оптимальность в большом.

Любой процесс имеет где-то окончание, т. е. имеет горизонт планирования. Тогда последний этап «не имеет будущего». Вот именно его можно оптимизировать только из условий данного этапа. После этого приступают к оптимизации $(m - 1)$ – го этапа.

Выбирают такое X_{m-1} , чтобы при применении этого X_{m-1} его внести в управление последнего шага.



При этом мы задаём состояние, с которого начинается $(m - 1)$ - ый шаг.

Поэтому функцию $W_i(S)$ называют условным оптимальным выигрышем.

Таким образом, процесс оптимизации разворачивается от конца к началу, и начальное состояние становится известно.

Принцип Беллмана нашёл применение в методе программно-целевого планирования (любое действие планируется некоторым проектом).



Функциональное уравнение Беллмана.

Назовём состоянием системы вектор координат:

$$S = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_L)$$

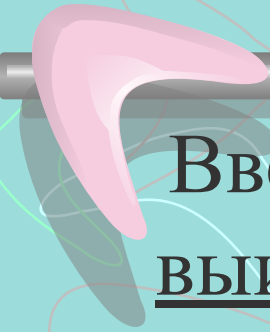
В некоторых задачах состояние – одна величина. Тогда работу системы можно представить как движение в фазовом пространстве – пространстве состояний. Назовём шаговым управлением – управление на i -ом шаге.

Рассмотрим процесс управления системой за m шагов. Функция $W_i(S, U_i)$ называется выигрышем на i -ом шаге. Здесь S -состояние перед i -ым шагом, а U - управление на i -ом шаге.

Величина $W_i(S, U_i)$ должна быть известна до начала динамического программирования. Если состояние перед i -ым шагом было S и мы приняли какое-то управление U_i , то система перейдёт в новое состояние

$$S' = \varphi_i(S, U_i)$$

Эта функция должна быть так же известна. Если эти функции не заданы, то их надо сформулировать.



Введём $W_i(S)$ - условный оптимальный выигрыш. Это выигрыш на всех этапах от i до конца, если i -ый шаг начинается с состояния S .


Рассмотрим m шагов. Начнём с $(i+1)$ -го шага. Мы системой управляем оптимально, величина оптимального выигрыша

$$W_{i+1}(S')$$

На i -ом шаге - любое управление.

$$\tilde{W}_i(S)$$

неоптимальный выигрыш, т. к. на i -ом шаге мы применяем управление U_i .


$$W_i(S) = \max_{U_i} \{W_i(S, U_i) + W_{i+1}(S')\}; \quad S' = \varphi_i(S, U_i)$$

$$\underbrace{W_i(S)}_{\text{неизвестно}} = \max_{U_i} \left\{ \underbrace{W_i(S, U_i)}_{\text{известно}} + \underbrace{W_{i+1}[\varphi_i(S, U_i)]}_{\text{неизвестно}} \right\}$$

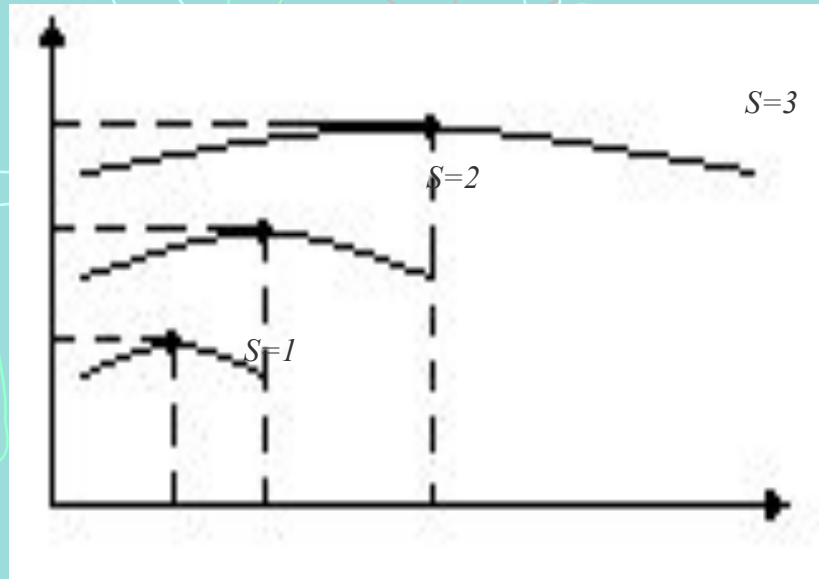
Это функциональное уравнение Беллмана.

Для использования уравнения Беллмана
начинают с конца:

1. $i = m$

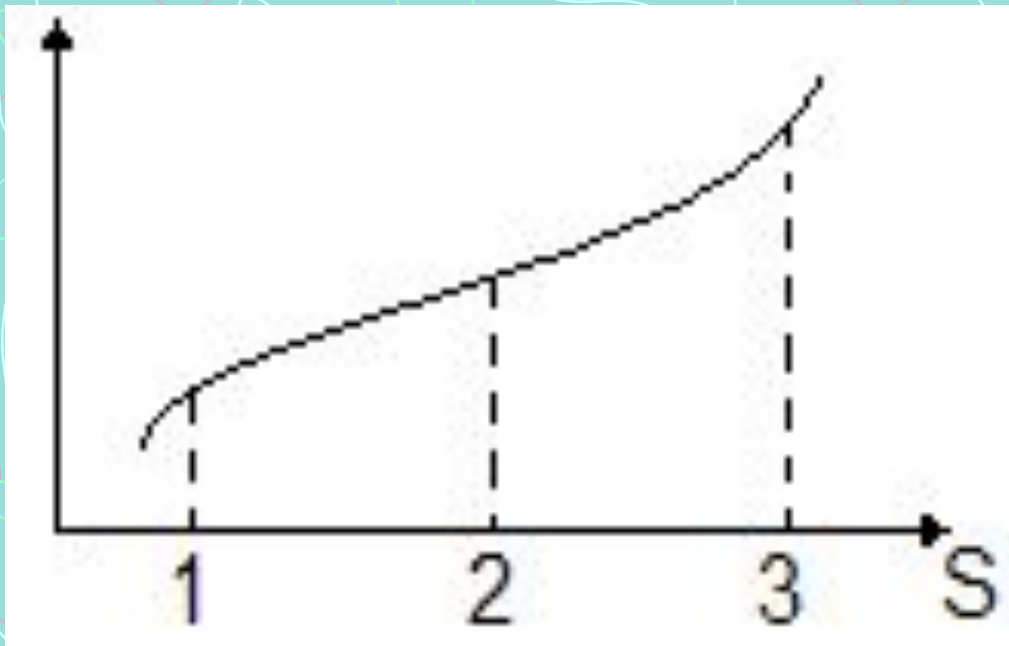
$$W_m(S) = \max_{U_m} \{ f_m(S, U_m) \}$$

$$f_m(S, U_m)$$



2. $i = m - 1$

$$W_{m-1}(S) = \max_{U_{m-1}} \{ f_{m-1}(S, U_{m-1}) + W_m[\varphi_{m-1}(S, U_{m-1})] \}$$






Итак, идя от конца к началу, мы получаем
последовательно:

$$W_m(S), W_{m-1}(S), \dots, W_1(S)$$

$$U_m(S), U_{m-1}(S), \dots, U_1(S)$$

Придя в начальное состояние $W_1(S)$, мы можем
подставить $S = S_0$ и $W_1(S_0) = W_{\max}$ — это
безусловный выигрыш.



Теперь необходимо получить, идя от начала к концу по цепочке, безусловно оптимальное уравнение:

$$U_1(S) = U_1(S_0) = U_1^*$$

$$\varphi_1(S, U_1) = \varphi(S_0, U_1^*) = S_1^*$$

$$U_2(S) = U_2^*$$

$$\varphi_2(S, U_2) = \varphi(S_1^*, U_2^*)$$

Итак, в конце мы получаем:

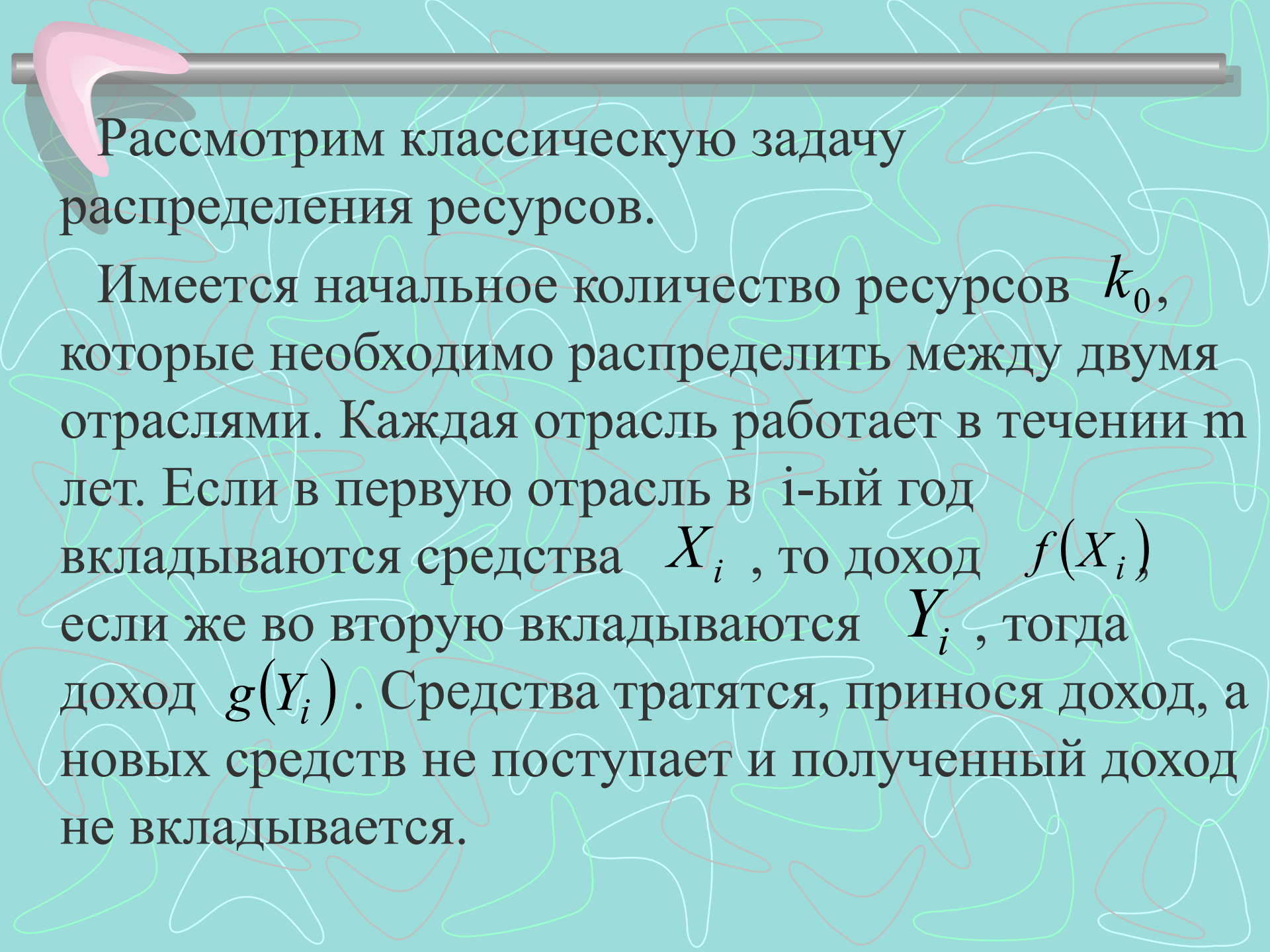
$$U_1^*, U_2^*, \dots, U_m^*; W_{\max}$$



Задача распределения ресурсов.

Это едва ли не самая распространённая операция. Под ресурсом в общем случае понимают физическую или абстрактную величину, которую система использует для производства полезного продукта.

Например: горючее, деньги, время, объём склада. Как правило – ресурс ограничен, поэтому встаёт задача так распределить ресурс между отдельными элементами системы, чтобы суммарный эффект был максимальным.



Рассмотрим классическую задачу распределения ресурсов.

Имеется начальное количество ресурсов k_0 , которые необходимо распределить между двумя отраслями. Каждая отрасль работает в течении m лет. Если в первую отрасль в i -ый год вкладываются средства X_i , то доход $f(X_i)$, если же во вторую вкладываются Y_i , тогда доход $g(Y_i)$. Средства тратятся, принося доход, а новых средств не поступает и полученный доход не вкладывается.



Нас интересует суммарный доход:

$$W = \sum_{i=1}^m f(X_i) + g(Y_i)$$

Суммарный выигрыш равен сумме выигрышей на каждом шаге. Состоянием системы является количество средств перед i -ым шагом. Так как новых средств не поступает, то ресурсы «тают».

Управление Y_i может быть записано как

$$Y_i = k - X_i$$

После i -го шага в первой отрасли остаются средства $\varphi(X_i)$ а во второй $\psi(Y_i) = \psi(k - X_i)$

Эти функции называются функциями траты. Мы можем составить уравнение Беллмана. В этой задаче на i -ом шаге одно управление X_i и одно состояние k

$$W_i(k) = \max_{X_i} \{ f(X_i) + g(k - X_i) + W_{i+1}[\varphi(X_i) + \psi(k - X_i)] \}$$

$$i = m: W_m(k) = \max_{X_m} \{ f(X_m) + g(k - X_m) \} \text{ и т.д.}$$

$$W_1(k), k = k_0, W_1(k_0) = W_{\max}; \quad X_1(k_0) = X_1^*, Y_1^* = k_0 - X_1^*$$



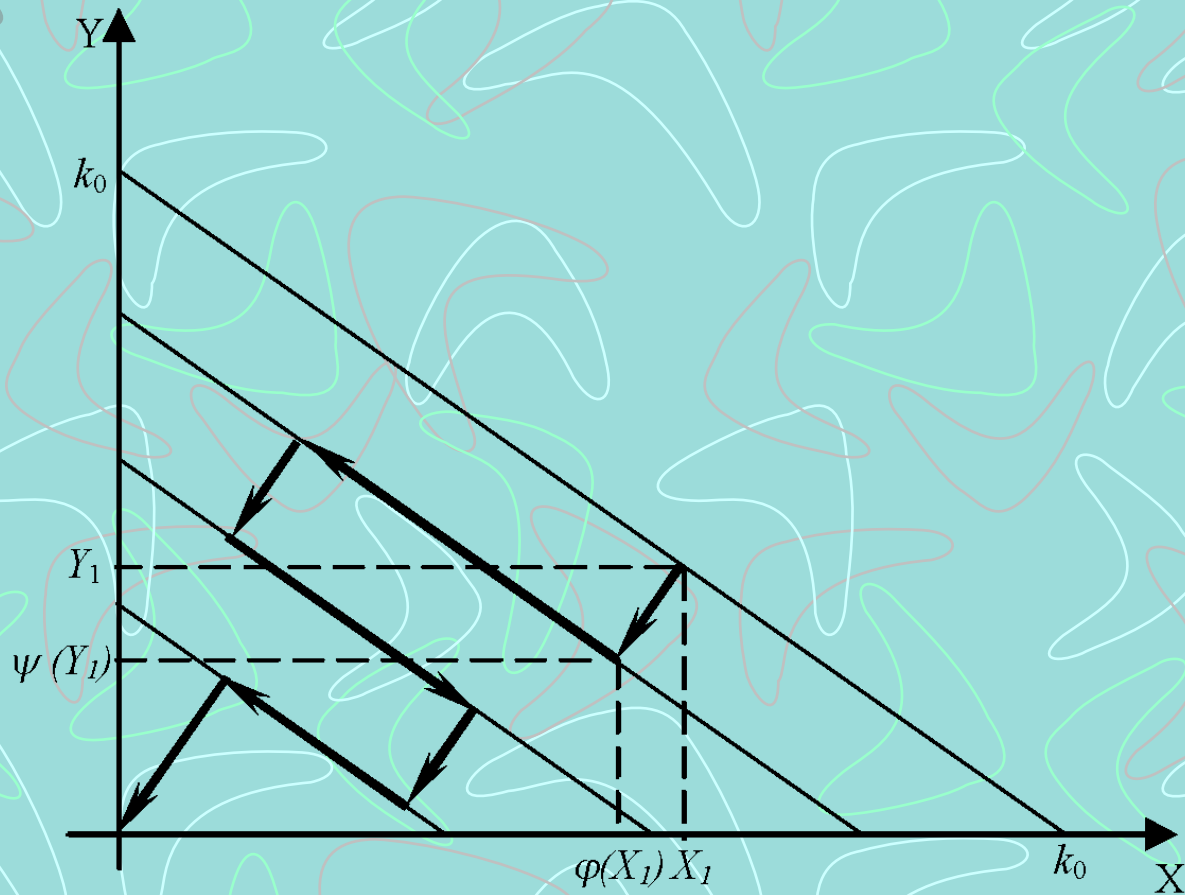
Исследуя функции траты, получим количество средств после i -го шага:

$$\varphi(X_1^*) + \psi(Y_1^*) = k_1^*; \quad X_2(k_1^*) = X_2^* \text{ è ò.ä.}$$

Задача о распределении ресурсов допускает геометрическую интерпретацию.

$$X_1 + Y_1 = k_0$$

Распределение на первом шаге – указание точки на гипотенузе. После этого средства тратятся



Распределение средств – движение внутрь треугольника. Рассмотрим частные случаи задач о распределении ресурсов.



Распределение по неоднородным этапам.

Выше мы считали, что все функции одинаковы на всех этапах. Во многих задачах функции меняются от этапа к этапу: $f_i(X_i), g_i(Y_i); \varphi_i(X_i), \psi_i(Y_i)$

Покажем, что процедура динамического программирования принципиально не меняется.

Запишем уравнение Беллмана:

$$W_i(k) = \max_{X_i} \{ f_i(X_i) + g_i(k - X_i) + W_{i+1}[\varphi_i(X_i) + \psi_i(k - X_i)] \}$$

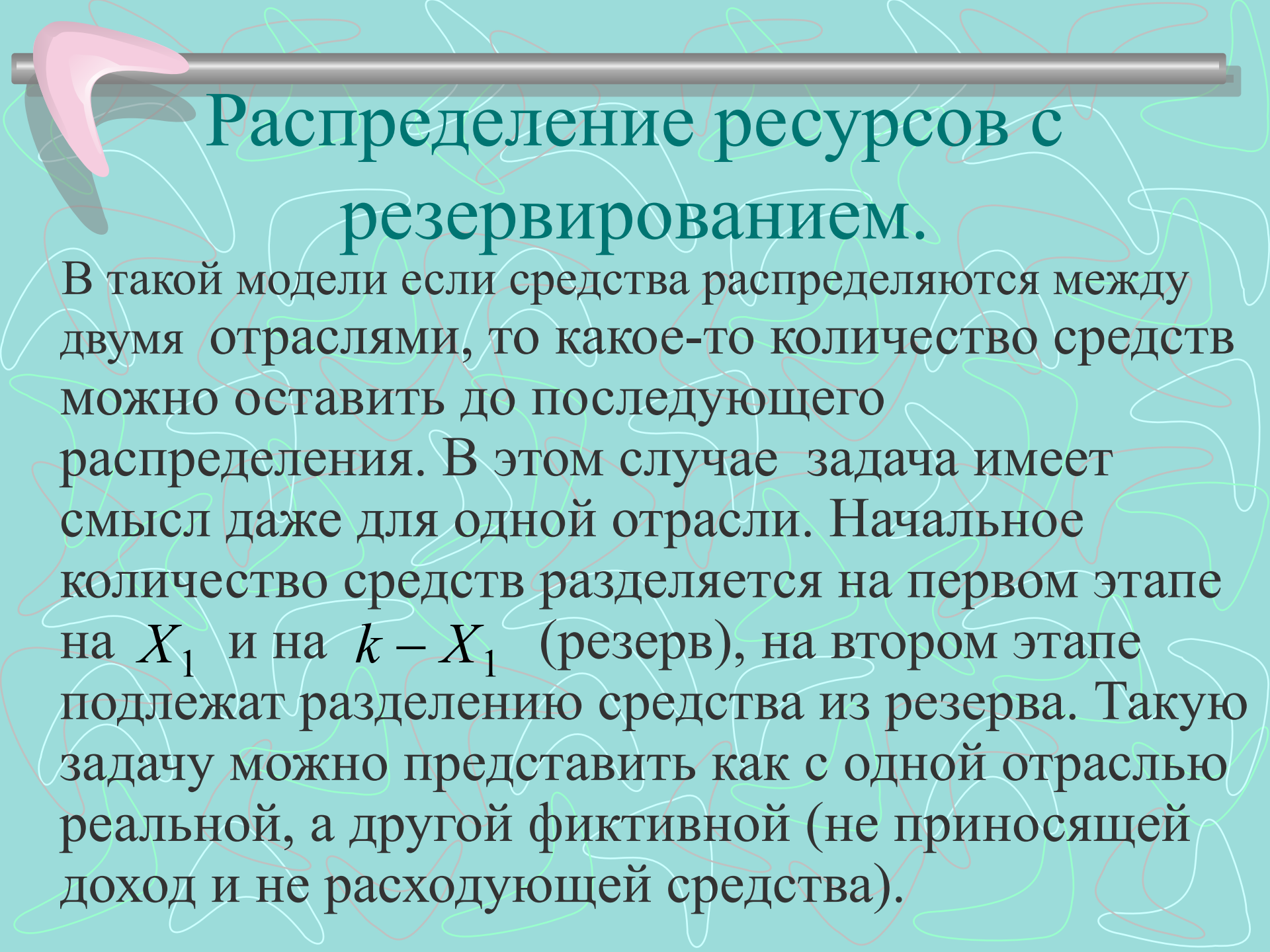


Распределение ресурсов между тремя и более отраслями.

В этом случае на каждом шаге будет уже управлений, но одно из них может быть выражено как:

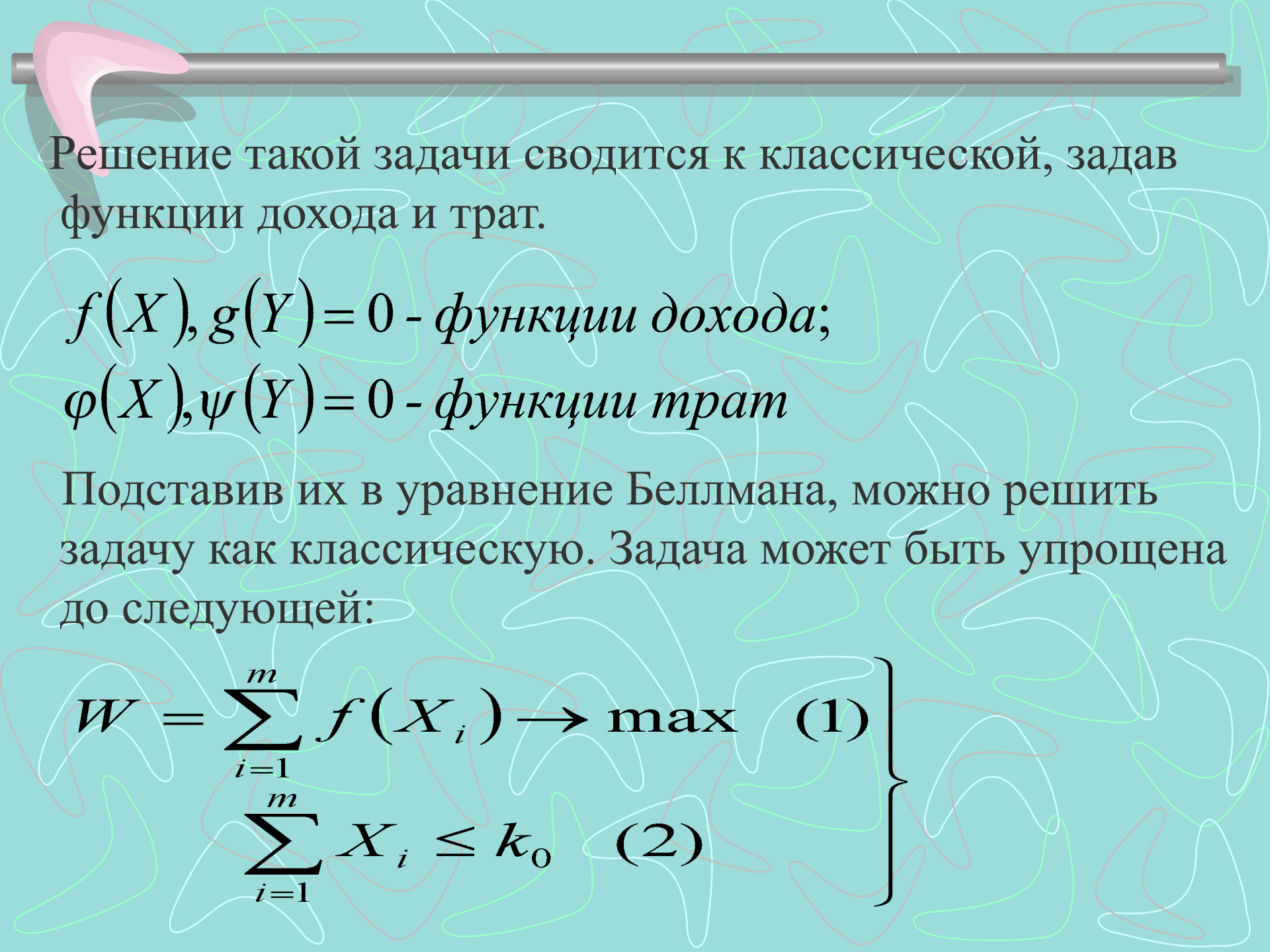
$$X_i^n = k - \sum_{j=1}^{n-1} X_i^j$$

В этом случае, в правой части уравнения Беллмана будет две и более переменных, по которым ищется максимум, и задача усложняется.



Распределение ресурсов с резервированием.

В такой модели если средства распределяются между двумя отраслями, то какое-то количество средств можно оставить до последующего распределения. В этом случае задача имеет смысл даже для одной отрасли. Начальное количество средств разделяется на первом этапе на X_1 и на $k - X_1$ (резерв), на втором этапе подлежат разделению средства из резерва. Такую задачу можно представить как с одной отраслью реальной, а другой фиктивной (не приносящей доход и не расходующей средства).



Решение такой задачи сводится к классической, задав функции дохода и трат.

$f(X), g(Y) = 0$ - функции дохода;

$\varphi(X), \psi(Y) = 0$ - функции трат

Подставив их в уравнение Беллмана, можно решить задачу как классическую. Задача может быть упрощена до следующей:

$$W = \sum_{i=1}^m f(X_i) \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m X_i \leq k_0 \quad (2)$$



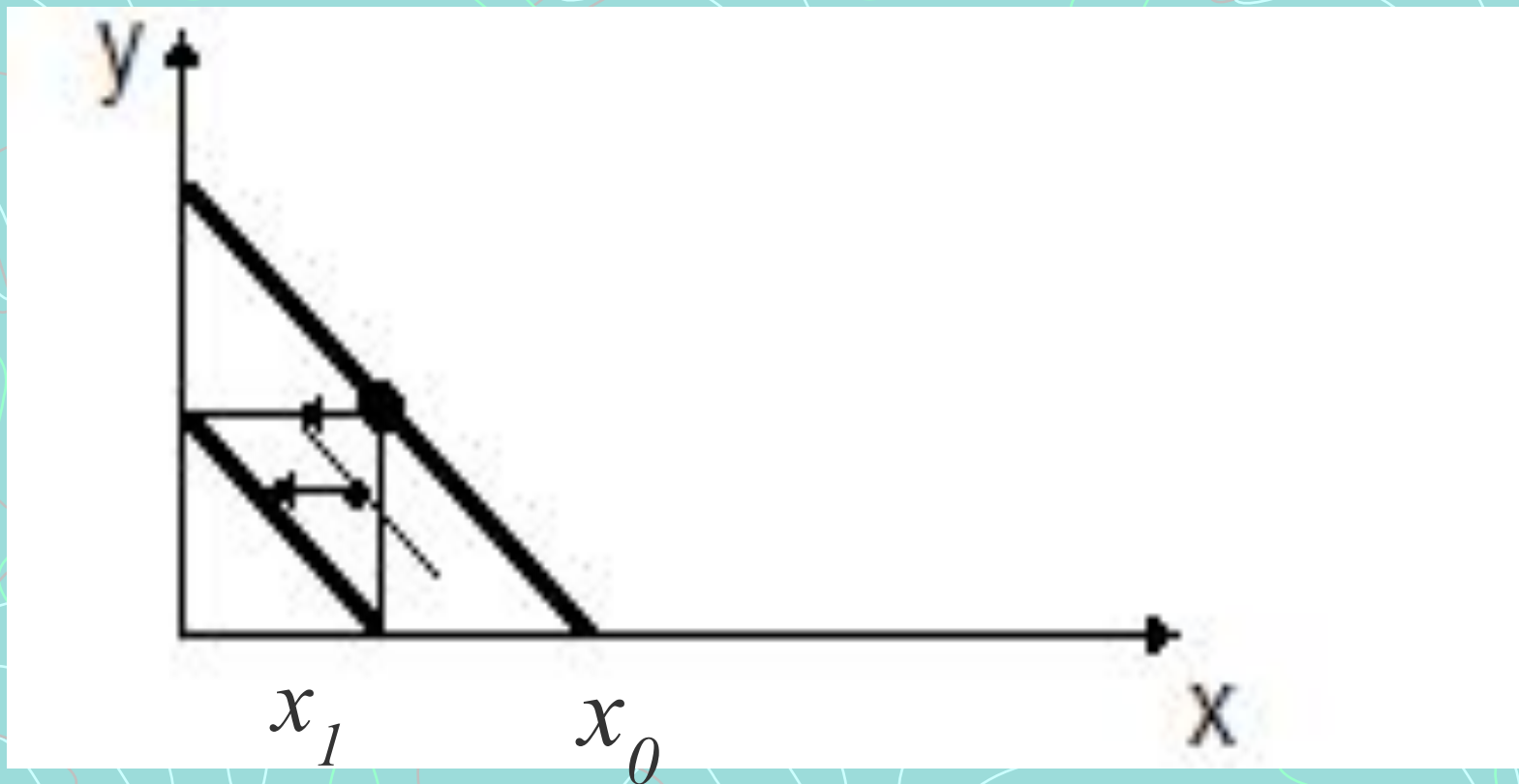
Задача линейного программирования с одной переменной.

Пусть вид функции $f(X_i)$ не убывающий в этом случае недоиспользовать средства не выгодно. В этом случае решение допускают теоремы, обосновывающие, если:

1. $f(X)$ неубывающая и выпуклая вверх, оптимальное распределение ресурсов равномерное.

2. $f(X)$ возрастающая и выпуклая вниз, оптимальное решение – вложить все средства в один этап, и ничего не резервировать.

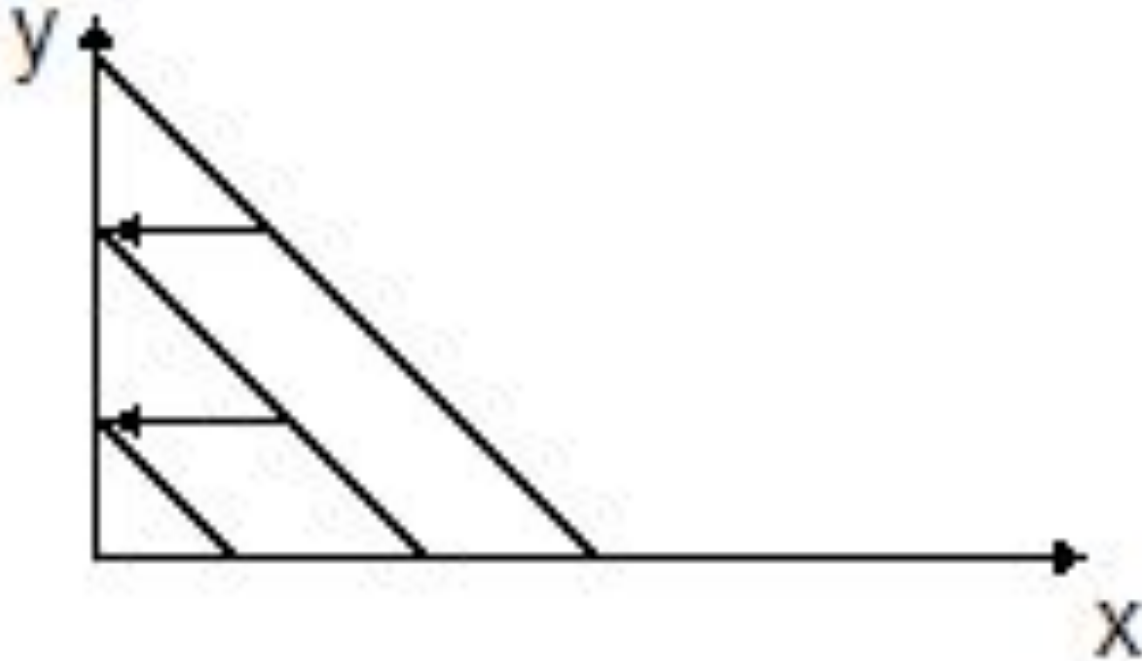
Таким образом приходим к классической задаче.



Трата \parallel оси X.

Задача с резервированием в одной отрасли при параллельных функциях траты.

Все функции траты $\varphi(x_i) = 0$





В этом случае задача сводится к более простой.

$$\varphi(x_i) = 0$$

$$W = \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \rightarrow \max$$

$$\sum x_i \leq x_0$$

Рассмотрим более частный случай: все функции одинаковые на всех шагах .

$$f_i(x) = f(x), \forall i$$



Эти функции неубывающие.

$$W = \sum_{i=1}^m f(x_i) \rightarrow \max \quad (1)$$

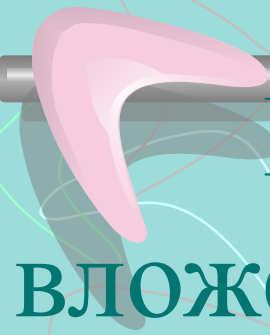
$$\sum x_i = x_0 \quad (2)$$

(2) – равенство, т.к. функция неубывающая и недоиспользование средств невыгодно.

Это имеет теоретическое обоснование:

1. если функция неубывающая и выпуклая вверх, то оптимальным распределением является равномерное распределение.

2. если функция неубывающая и выпуклая вниз, то оптимальным распределением является такое: все распределение в один этап (элемент) и ничего в другие.




Распределение ресурсов «с вложением доходов в производство».

В классической задаче считается, что полученный доход на i -ом шаге в производство не вкладывается, т. е. он отчисляется и подсчитывается как эффект.

Во многих задачах полученный эффект можно использовать как ресурс для следующего шага объединяя его с оставшимся ресурсом.

Если ресурс не деньги, то средства можно привести к единому эквиваленту с оставшимися средствами. Такая модель является развитием классической модели.



Так как оставшиеся средства и доход объединяются, то можно ввести единую интегральную функцию – функцию изменения средств.

$F(X_i)$ – количество оставшихся средств плюс доход после i -го шага, если вложили X_i

I $F(X_i)$

II $G(Y_i) = G(k - X_i)$

k – количество средств перед i -м шагом.

Выигрыш на i -ом шаге зависит от того, как мы подсчитываем доход (эффект) от управления всеми ресурсами. Поставим задачу: максимальный доход в конце m -го шага. Тогда на всех шагах $i = \overline{1, m-1}$ доход $= 0$, $W_i = 0$

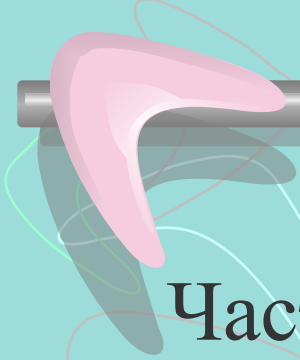
На m -ом шаге выигрыш

$$W_m = F_m(X_m) + G_m(k - X_m)$$

Подставив эти выражения в уравнение Беллмана, мы программируем задачу от начала к концу, если имеется начальное количество средств


Здесь функция траты:

$$k' = F_i(X_i) + G_i(k - X_i)$$



Частный случай: когда F и G неубывающие

В этом случае чем больше значение доход + средства получается в конце i -го шага, тем лучшим условием это будет для проведения $(i + 1)$ шага. Поэтому можно не заботиться о следующих шагах, достаточно обеспечить максимум на каждом шаге.



Таким образом процедура оптимизации возможна в одном направлении от начала к концу, т. е. задача динамического программирования вырождается в задачу последовательной оптимизации.

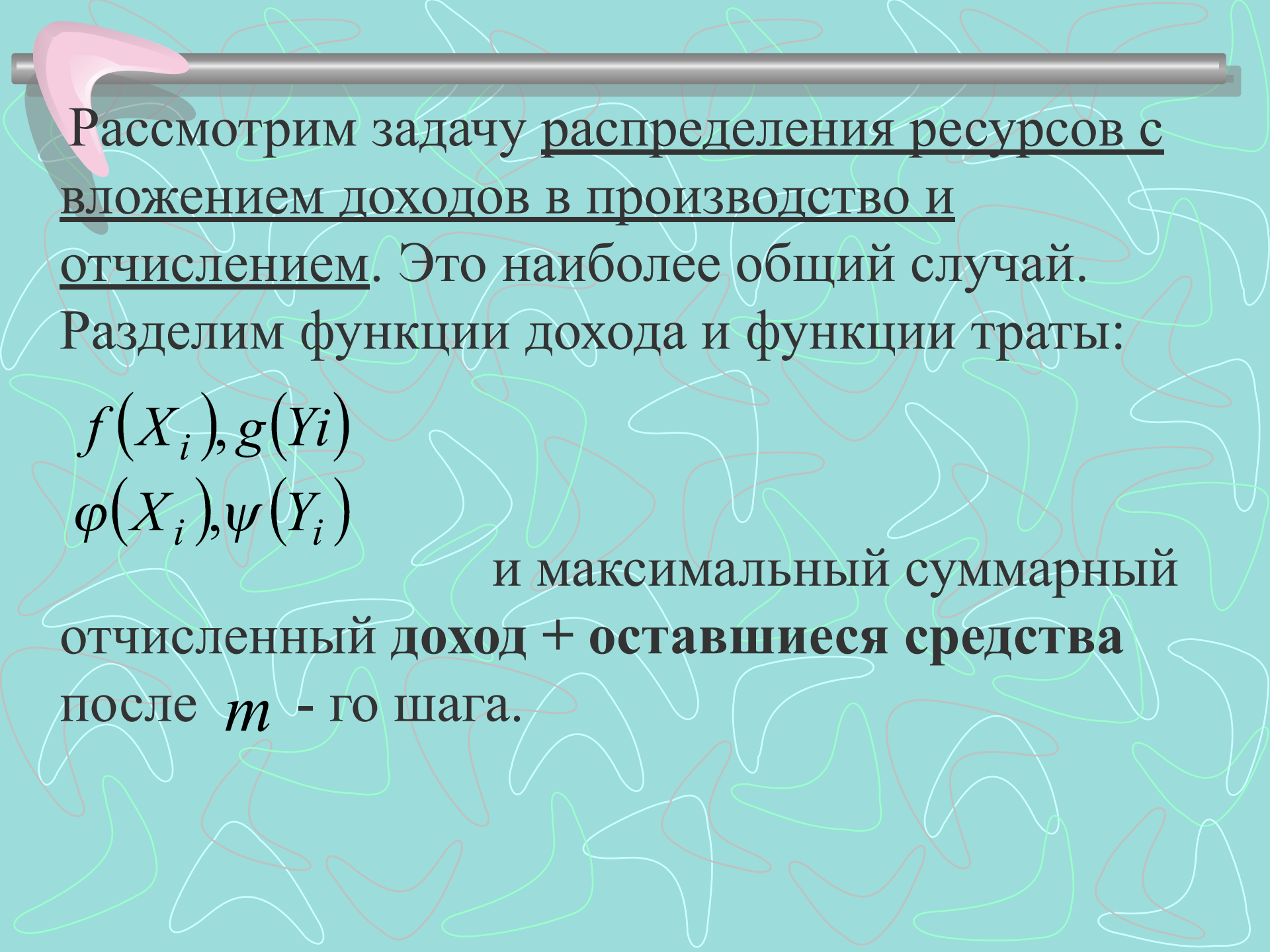
$$\max_{X_1} \{F_1(X_1) + G_1(k_0 - X_1)\} = k_1^*$$

$$\max_{X_2} \{F_2(X_2) + G_2(k_1^* - X_2)\} = k_2^*$$

□

$$W_{\max} = k_m^*$$

$$\max_{X_m} \{F_m(X_m) + G_m(k_{m-1}^* - X_m)\} = k_m^*$$



Рассмотрим задачу распределения ресурсов с вложением доходов в производство и отчислением. Это наиболее общий случай. Разделим функции дохода и функции траты:

$$f(X_i), g(Y_i)$$

$$\varphi(X_i), \psi(Y_i)$$

и максимальный суммарный

отчисленный доход + оставшиеся средства

после m - го шага.



Введём функцию отчисления $r_i(D_i)$

D – доход. Тогда выигрыш на каждом шаге:

$$W_i = r_i[f(X_i) + g(k - X_i)] \quad i = \overline{1, m-1}$$

$$W_m = r_m[f(X_m) + g(k - X_m)] + \varphi(X_m) + \psi(k - X_m) \quad (*)$$

$$W = \sum_{i=1}^m W_i \rightarrow \max$$

$$k' = \varphi(X_i) + \psi(k - X_i) + f(X_i) + g(k - X_i) - r_i[f(X_i) + g(k - X_i)]$$



Уравнение Беллмана для го шага будет
выглядеть так:

$$W_i(k) = \max_{X_i} \left\{ r_i [f(X_i) + g(k - X_i)] + \right. \\ \left. W_{i+1} \left[\varphi(X_i) + \psi(k - X_i) + f(X_i) + \right. \right. \\ \left. \left. \overbrace{g(k - X_i) - r_i [f(X_i) + g(k - X_i)]} \right] \right\} \\ i = 1, m - 1$$

для $i = m$ надо учесть (*)

Если $r_i = 1$ то мы получаем классическую задачу.



Учёт предыстории процесса.

Мы считаем, что функции как выигрыша, так и траты зависят от состояния перед i -ым шагом, т. е. не зависят от более ранних состояний. Такие процессы называются процессами без памяти.

Но иногда при рассмотрении процессов, связанных с «живыми» организациями требуется помнить всю историю происходящего. Такая задача более сложна.



Введём расширенное состояние:

$$S = (S, S_{i-1}, S_{i-2}, \dots, S_{i-L})$$

S_{i-L} состояние за L шагов до i -го.

Тогда $W_i(S, U_i), \varphi_i(S, U_i)$

Но задача сложна вычислительном аспекте.

Пусть S имеет k координат и предыстория распространяется на L шагов, тогда результат

$k \times L$. Вот почему подобные задачи можно решать если $k \times L \leq 3$.



Задача с мультипликативным критерием.

До сих пор мы считали, что суммарный выигрыш равен сумме выигрыш на i -ом шаге. Но есть задачи, где общий критерий равен произведению критериальных величин на каждом шаге. В этом случае так же можно применить уравнение Беллмана.

$$W = \prod_{i=1}^m W_i \quad \text{но вместо этого можно взять функцию } W' = \ln W$$

Оптимальные решения будут одинаковы ввиду многоэтапности функций.

Но можно при вводе уравнения Беллмана учесть, что:

$$W_i(S) = \max_{U_i} \{W_i \times W_{i+1}(S')\}$$

$$W = F(W_1, W_2, \dots, W_n) = F(W_1) \otimes F(W_2) \otimes \dots \otimes F(W_n)$$

Пример: устройство состоит из узлов. Имеется некоторое устройство k_0 , которое может использоваться для повышения надёжности каждого узла. Необходимо так распределить ресурс, чтобы суммарная надёжность была максимальной. $q(X_i)$ надёжность каждого узла.

$$Q = \prod_{i=1}^m q_i(X_i) \rightarrow \max \quad \sum X_i \leq k_0$$



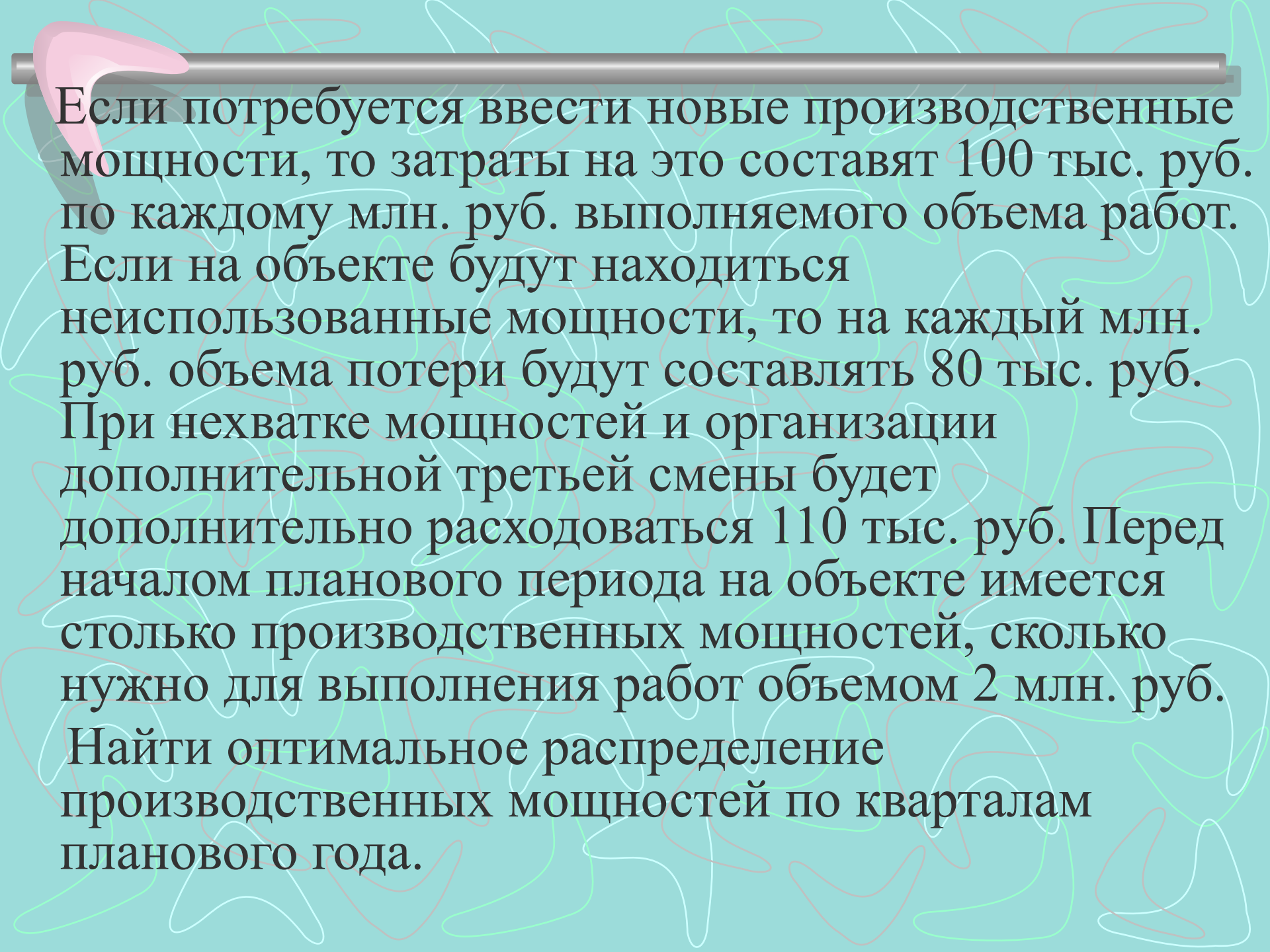
Операции не связанные со временем

Во многих задачах распределение ресурсов не связано с временными шагами. Ресурс обычно распределяется по объектам. Например, если расписать распределение ресурсов между n объектами и на каждый объект задана функция выигрыша, то такая задача эквивалентна рассмотренной нами задаче о распределении ресурсов с резервированием в одной отрасли по n шагам.



Рассмотрим технику расчетов метода динамического программирования на примере.

Задача: Распределение объема строительно-монтажных работ на объекте по кварталам планового года составляет: 2 млн. руб. на первый квартал, 5 млн. руб. на второй квартал, 3 млн. руб. на третий и 1 млн. руб. на четвертый. Подрядная организация планирует, какие производственные мощности должны быть на объекте. Работа ведется в две смены, но при необходимости может быть организована и третья смена. Если понадобится уменьшить производственные мощности на объекте, то затраты по их переброске на другие объекты составят 70 тыс. руб. на каждый млн. руб. выполняемого объема работ.



Если потребуется ввести новые производственные мощности, то затраты на это составят 100 тыс. руб. по каждому млн. руб. выполняемого объема работ. Если на объекте будут находиться неиспользованные мощности, то на каждый млн. руб. объема потери будут составлять 80 тыс. руб. При нехватке мощностей и организации дополнительной третьей смены будет дополнительно расходоваться 110 тыс. руб. Перед началом планового периода на объекте имеется столько производственных мощностей, сколько нужно для выполнения работ объемом 2 млн. руб. Найти оптимальное распределение производственных мощностей по кварталам планового года.

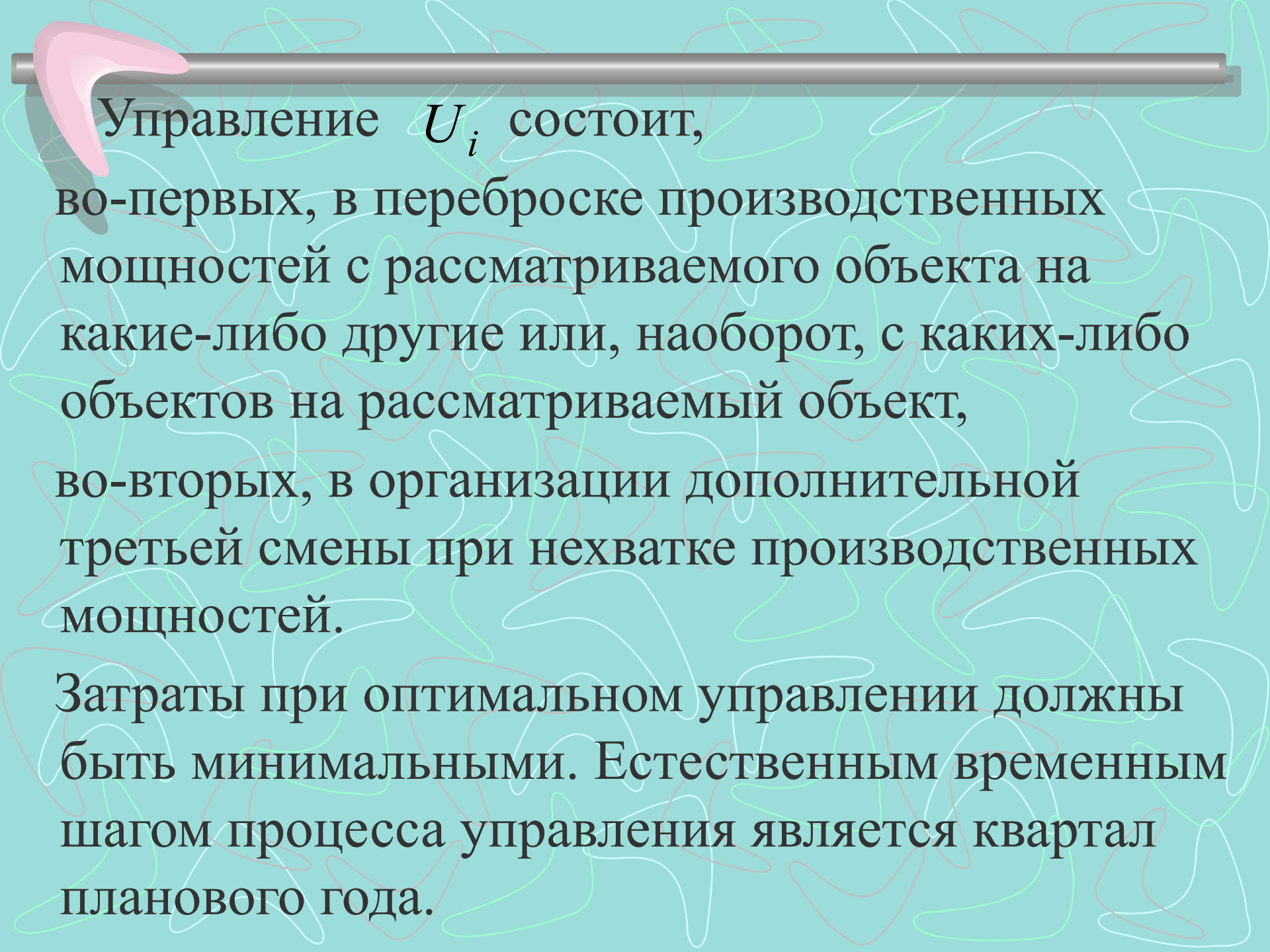
1-ый этап. Описание системы.

Обозначим производственные мощности, имеющиеся в начале i -го квартала ($i=1,2,3,4$). За единицу примем производственные мощности для выполнения объема работ в один млн. руб.

Обозначим через m_i требуемое количество производственных мощностей для выполнения заданного в i -ом квартале объема работ

($m_1 = 2, m_2 = 5, m_3 = 3, m_4 = 1$). Состояние системы

S_i таким образом, определяется величиной X_i



Управление U_i состоит, во-первых, в переброске производственных мощностей с рассматриваемого объекта на какие-либо другие или, наоборот, с каких-либо объектов на рассматриваемый объект, во-вторых, в организации дополнительной третьей смены при нехватке производственных мощностей.


Затраты при оптимальном управлении должны быть минимальными. Естественным временным шагом процесса управления является квартал планового года.



2-й этап. Определение функций эффекта для i -го шага.

В зависимости от применяемого управления, т.е. изменения производственных мощностей X_i на объекте, либо дополнительного использования имеющихся мощностей за счет организации третьей смены затраты определяются различным образом.

При изменении (переброске мощностей) функцию затрат по условиям задачи можно записать следующим образом:



$$f_i(X_i) = \begin{cases} 100(X_i - X_{i-1}), & X_i > X_{i-1}, \\ 70(X_{i-1} - X_i), & X_i < X_{i-1}; \end{cases}$$

а при неизменном X_i (сохранении уровня мощности):

$$\varphi_i(X_i) = \begin{cases} 80(X_i - m_i), & X_i > m_i \\ 110(m_i - X_i), & X_i < m_i; \end{cases}$$

общая функция затрат имеет вид:

$$W_i(X_i) = f_i(X_i) + \varphi_i(X_i)$$



3-й этап. Определение функции изменения состояния системы (производственных мощностей) на i -ом шаге.

В конце i -го шага производственные мощности должны быть равны мощностям в начале $(i+1)$ -го шага, запишем:

$$S_i^* = X_i^* + X_{i+1}^*$$



4-й этап. Запись основного рекуррентного соотношения динамического программирования.

Оно имеет вид:

$$W_i(X_i) = \min_{X_i} \{f_i(X_i) + \varphi_i(X_i) + W_{i+1}(X_{i+1})\}$$

Здесь $W_i(X_i)$ и $W_{i+1}(X_{i+1})$ - затраты соответственно на i -ом и $(i+1)$ -м шагах.

5-й этап. Определение оптимальных затрат на последнем четвертом шаге:

$$W_4(X_4) = \min_{X_4} \{f_4(X_4) + \varphi_4(X_4)\}$$

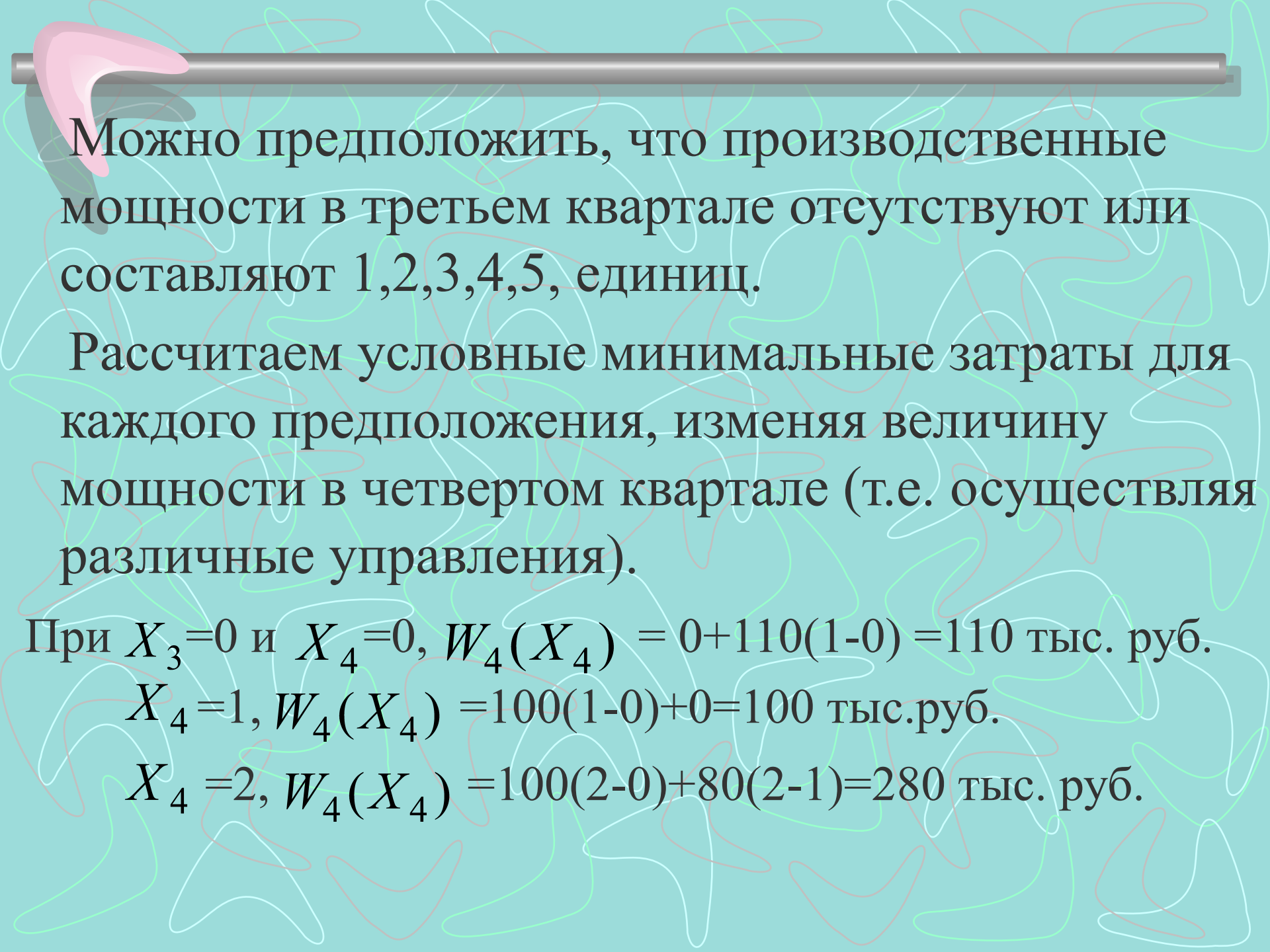
В этой формуле:

$$f_i(X_i) = \begin{cases} 100(X_4 - X_3), & X_4 > X_3, \\ 70(X_3 - X_4), & X_4 < X_3; \end{cases}$$

а при неизменном X_i (сохранении уровня мощности):

$$\varphi_4(X_4) = \begin{cases} 80(X_4 - 1), & X_4 > 1 \\ 110(1 - X_4), & X_4 < 1 \end{cases}$$

где X_3 и X_4 - производственные мощности в 3-м и 4-м кварталах.



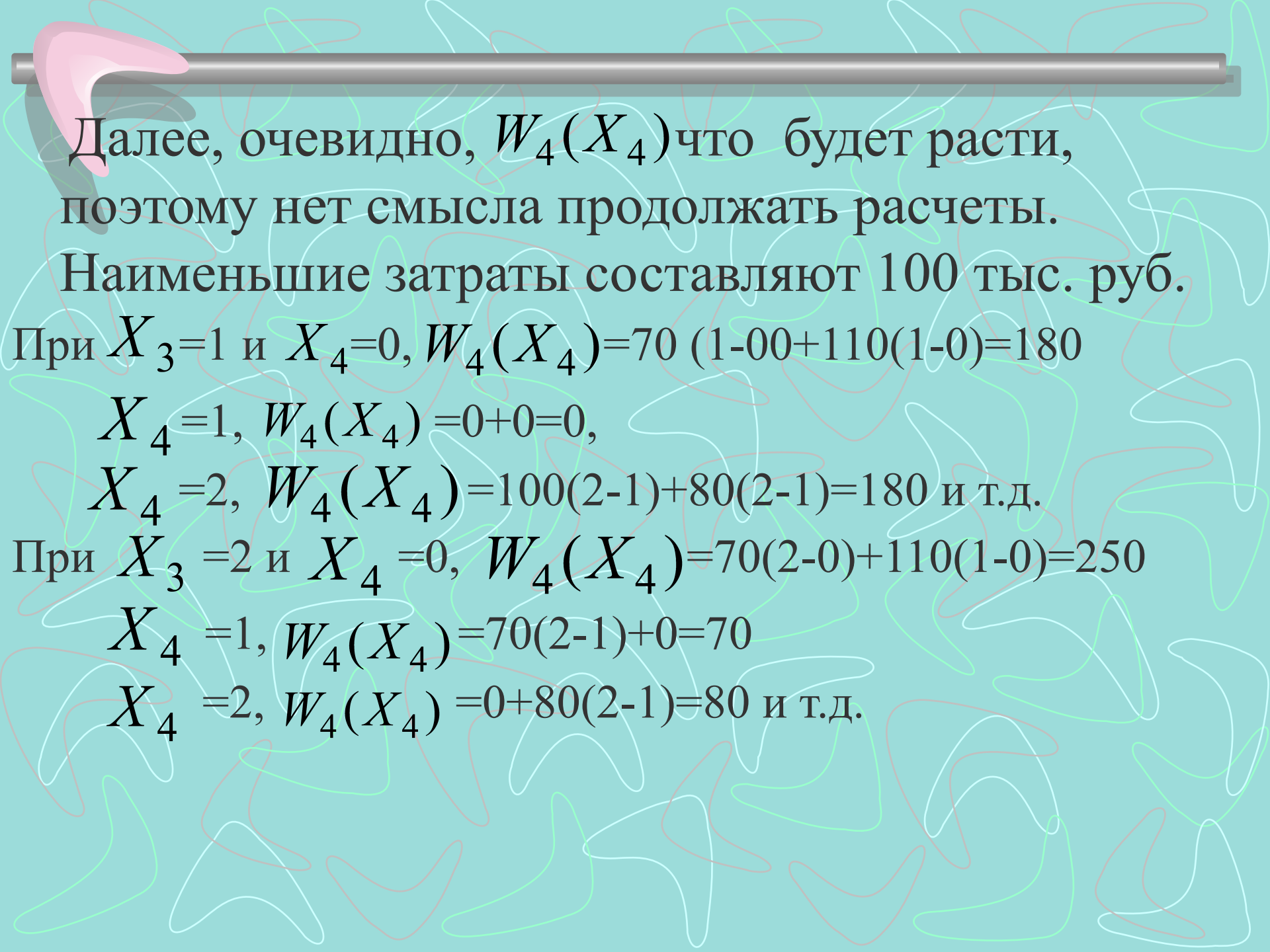
Можно предположить, что производственные мощности в третьем квартале отсутствуют или составляют 1,2,3,4,5, единиц.

Рассчитаем условные минимальные затраты для каждого предположения, изменяя величину мощности в четвертом квартале (т.е. осуществляя различные управления).

При $X_3=0$ и $X_4=0$, $W_4(X_4) = 0+110(1-0) = 110$ тыс. руб.

$X_4=1$, $W_4(X_4) = 100(1-0)+0=100$ тыс.руб.

$X_4=2$, $W_4(X_4) = 100(2-0)+80(2-1)=280$ тыс. руб.



Далее, очевидно, $W_4(X_4)$ что будет расти, поэтому нет смысла продолжать расчеты.

Наименьшие затраты составляют 100 тыс. руб.

При $X_3=1$ и $X_4=0$, $W_4(X_4)=70$ ($1 \cdot 00 + 110(1-0)=180$)

$X_4=1$, $W_4(X_4)=0+0=0$,

$X_4=2$, $W_4(X_4)=100(2-1)+80(2-1)=180$ и т.д.

При $X_3=2$ и $X_4=0$, $W_4(X_4)=70$ ($70(2-0)+110(1-0)=250$)

$X_4=1$, $W_4(X_4)=70(2-1)+0=70$

$X_4=2$, $W_4(X_4)=0+80(2-1)=80$ и т.д.



При $X_3=3$ и $X_4=0$, $W_4(X_4)=70(3-0)+110(1-0)=320$

$$X_4=1, W_4(X_4)=70(3-1)+0=140$$

$$X_4=2, W_4(X_4)=70(3-2)+80(2-1)=150$$

$$X_4=3, W_4(X_4)=0+80(3-1)=160 \text{ и т.д.}$$

При $X_3=4$ и $X_4=0$, $W_4(X_4)=70(4-0)+110(1-0)=390$

$$X_4=1, W_4(X_4)=70(4-1)+0=210$$

$$X_4=2, W_4(X_4)=70(4-2)+80(2-1)=220 \text{ и т.д.}$$

При $X_3=5$ и $X_4=0$, $W_4(X_4)=70(5-0)+110(1-0)=450$

$$X_4=1, W_4(X_4)=70(5-1)+0=280$$

$$X_4=2, W_4(X_4)=70(5-2)+80(2-1)=290 \text{ и т.д.}$$

Отберем все минимальные (условно-оптимальные) значения затрат в четвертом квартале и соответствующие им величины производственных мощностей (управления) в таблицу 1.

Производственные мощности а 3-м квартале	Минимальные затраты 4-го квартала	Условно-оптимальные производственные мощности (управления)
X_3	$W_4(X_4)$	X_4
0	100	1
1	0	1
2	70	1
3	140	1
4	210	1
5	280	1

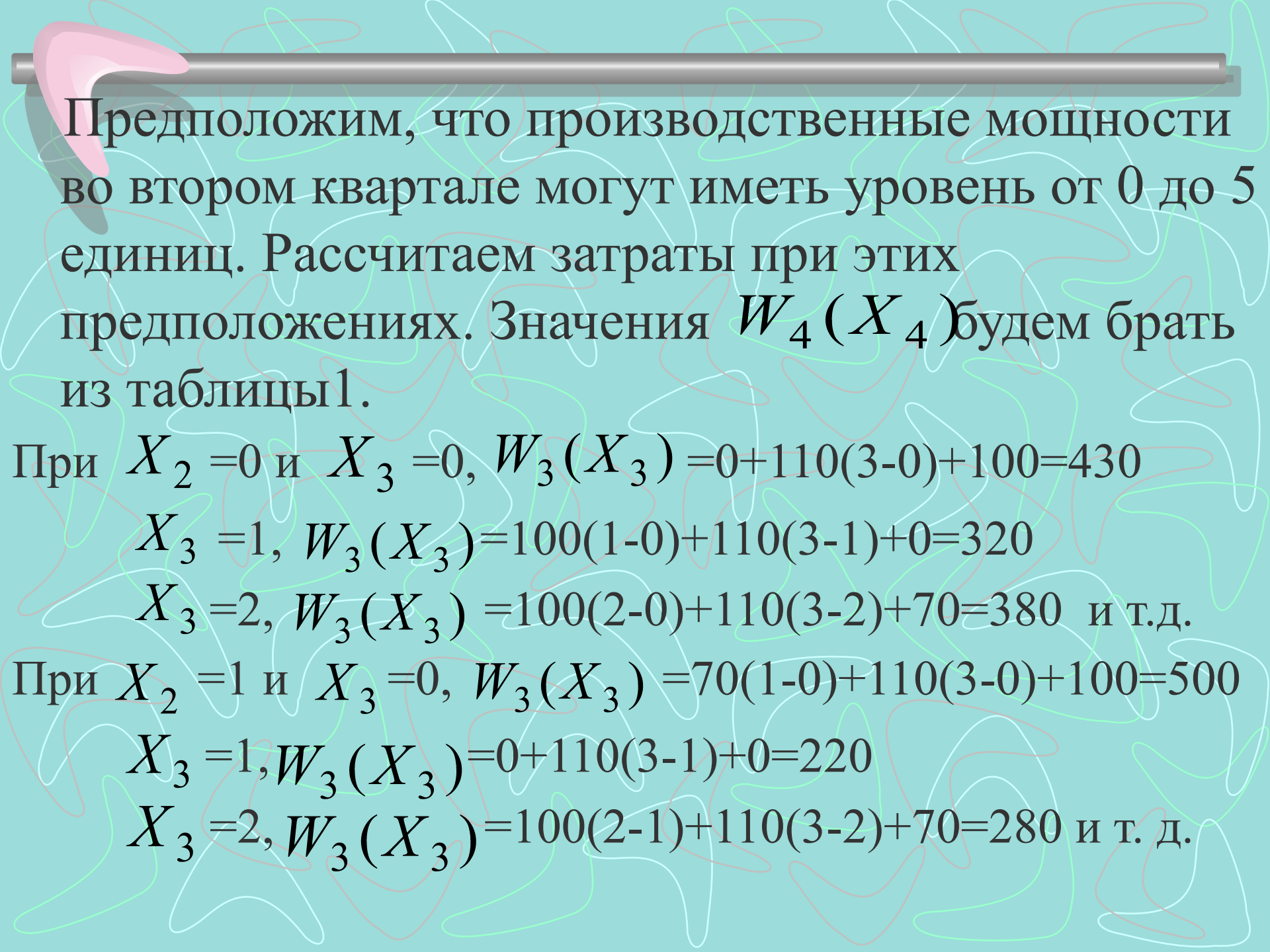
6-й этап. Определение условно-оптимальных затрат, а также соответствующих им управлений на третьем, втором и первом этапах процесса.

Для третьего квартала(предпоследний шаг процесса) рекуррентное соотношение имеет вид:

$$W_3(X_3) = \min_{X_3} \{f_3(X_3) + \varphi_3(X_3) + W_4(X_4)\}$$

где $f_3(X_3) = \begin{cases} 100(X_3 - X_2), & X_3 > X_2, \\ 70(X_2 - X_3), & X_3 < X_2, \end{cases}$

и $\varphi_3(X_3) = \begin{cases} 80(X_3 - 3), & X_3 > 3, \\ 110(3 - X_3), & X_3 < 3. \end{cases}$



Предположим, что производственные мощности во втором квартале могут иметь уровень от 0 до 5 единиц. Рассчитаем затраты при этих предположениях. Значения $W_4(X_4)$ будем брать из таблицы 1.

При $X_2 = 0$ и $X_3 = 0$, $W_3(X_3) = 0 + 110(3 - 0) + 100 = 430$

$X_3 = 1$, $W_3(X_3) = 100(1 - 0) + 110(3 - 1) + 0 = 320$

$X_3 = 2$, $W_3(X_3) = 100(2 - 0) + 110(3 - 2) + 70 = 380$ и т.д.

При $X_2 = 1$ и $X_3 = 0$, $W_3(X_3) = 70(1 - 0) + 110(3 - 0) + 100 = 500$

$X_3 = 1$, $W_3(X_3) = 0 + 110(3 - 1) + 0 = 220$

$X_3 = 2$, $W_3(X_3) = 100(2 - 1) + 110(3 - 2) + 70 = 280$ и т. д.

При $X_2 = 2$ и $X_3 = 0$, $W_3(X_3) = 70(2-0) + 110(3-0) + 100 = 670$

$$X_3 = 1, W_3(X_3) = 70(2-1) + 110(3-1) + 0 = 290$$

$$X_3 = 2, W_3(X_3) = 0 + 110(3-2) + 70 = 180$$

$$X_3 = 3, W_3(X_3) = 100(3-2) + 0 + 140 = 240 \text{ и т.д.}$$

При $X_2 = 3$ и $X_3 = 0$, $W_3(X_3) = 70(3-0) + 110(3-0) + 100 = 640$


$$X_3 = 1, W_3(X_3) = 70(3-1) + 110(3-1) + 0 = 360$$

$$X_3 = 2, W_3(X_3) = 70(3-2) + 110(3-2) + 70 = 250$$

$$X_3 = 3, W_3(X_3) = 0 + 0 + 140 = 140$$

$$X_3 = 4, W_3(X_3) = 100(4-3) + 80(4-3) + 210 = 390 \text{ и т.д.}$$

Далее, учитывая, что начинать с $X_3 = 0$ нет смысла, продолжим расчеты.



При $X_2 = 4$ и $X_3 = 2$, $W_3(X_3) = 70(4-2) + 110(3-2) + 70 = 320$

$X_3 = 3$, $W_3(X_3) = 70(4-3) + 0 + 140 = 210$

$X_3 = 4$, $W_3(X_3) = 0 + 80(4-3) + 210 = 290$ и т.д.

При $X_2 = 5$ и $X_3 = 2$, $W_3(X_3) = 70(5-2) + 110(3-2) + 70 = 390$

$X_3 = 3$, $W_3(X_3) = 70(5-3) + 0 + 140 = 280$

$X_3 = 4$, $W_3(X_3) = 70(5-4) + 80(4-3) + 210 = 380$ и т.д.

Отберем все минимальные (условно-оптимальные) значения затрат в третьем квартале и соответствующие им величины производственных мощностей в 3-м и 4-м кварталах в таблицу 2.



Производственные мощности во 2-м квартале	Минимальные затраты 3-го квартала	Условно-оптимальные мощности в 3-м квартале	Условно-оптимальные мощности в 4-м квартале
X_2	$W_3(X_3)$	X_3	X_4
0	320	1	1
1	220	1	1
2	180	2	1
3	140	3	1
4	210	3	1
5	280	3	1



Второй квартал(предпоследний процесс),

$$W_2(X_2) = \min_{X_2} \{f_2(X_2) + \varphi_2(X_2) + W_3(X_3)\}$$

где

$$f_2(X_2) = \begin{cases} 100(X_2 - X_1), & X_2 > X_1, \\ 70(X_1 - X_2), & X_2 < X_1, \end{cases}$$

и

$$\varphi_2(X_2) = \begin{cases} 80(X_2 - 5), & X_2 > 5, \\ 110(5 - X_2), & X_2 < 5. \end{cases}$$

При $X_1 = 0$ и $X_2 = 0$, $W_2(X_2) = 0 + 110(5 - 0) + 320 = 870$

$X_2 = 1$, $W_2(X_2) = 100(1 - 0) + 110(5 - 1) + 220 = 760$

$X_2 = 2$, $W_2(X_2) = 100(2 - 0) + 110(5 - 2) + 180 = 710$

$X_2 = 3$, $W_2(X_2) = 100(3 - 0) + 110(5 - 3) + 140 = 660$

$X_2 = 4$, $W_2(X_2) = 100(4 - 0) + 110(5 - 4) + 70 = 720$ и т.д.

При $X_1 = 1$ и $X_2 = 2$, $W_2(X_2) = 100(2 - 1) + 110(5 - 2) + 180 = 610$

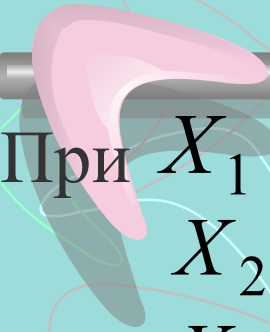
$X_2 = 3$, $W_2(X_2) = 100(3 - 1) + 110(5 - 3) + 140 = 560$

$X_2 = 4$, $W_2(X_2) = 100(4 - 1) + 110(5 - 4) + 210 = 620$ и т.д.

При $X_1 = 2$ и $X_2 = 2$, $W_2(X_2) = 0 + 110(5 - 2) + 180 = 510$

$X_2 = 3$, $W_2(X_2) = 100(3 - 2) + 110(5 - 3) + 140 = 460$

$X_2 = 4$, $W_2(X_2) = 100(4 - 2) + 110(5 - 4) + 210 = 520$ и т.д.



При $X_1 = 3$ и $X_2 = 2$, $W_2(X_2) = 70(3-2) + 110(5-2) + 180 = 610$

$$X_2 = 3, W_2(X_2) = 0 + 110(5-3) + 140 = 360$$

$$X_2 = 4, W_2(X_2) = 100(4-3) + 110(5-4) + 210 = 420 \text{ и т.д.}$$

При $X_1 = 4$ и $X_2 = 2$, $W_2(X_2) = 70(4-2) + 110(5-2) + 180 = 650$

$$X_2 = 3, W_2(X_2) = 70(4-3) + 110(5-3) + 140 = 430$$

$$X_2 = 4, W_2(X_2) = 0 + 110(5-4) + 210 = 320$$

$$X_2 = 5, W_2(X_2) = 100(5-4) + 0 + 280 = 380$$

При $X_1 = 5$ и $X_2 = 3$, $W_2(X_2) = 70(5-3) + 110(5-3) + 140 = 500$

$$X_2 = 4, W_2(X_2) = 70(5-4) + 110(5-4) + 210 = 390$$

$$X_2 = 5, W_2(X_2) = 0 + 0 + 280 = 280$$

Отберем оптимальные затраты и соответствующие производственные мощности в таблицу 3.

Производственные мощности в 1-м квартале	Минимальные затраты в 2-м квартале	Условно-оптимальные мощности во 2-м квартале	Условно-оптимальные мощности в 3-м квартале	Условно-оптимальные мощности в 4-м квартале
X_1	$W_2(X_2)$	X_2	X_3	X_4
0	660	3	3	1
1	560	3	3	1
2	460	3	3	1
3	360	3	3	1
4	320	4	3	1
5	280	5	3	1



Для первого квартала:

$$W_1(X_1) = \min_{X_1} \{f_1(X_1) + \varphi_1(X_1) + W_2(X_2)\}$$

где


$$f_1(X_1) = \begin{cases} 100(X_1 - X_0), & X_1 > X_0, \\ 70(X_0 - X_1), & X_1 < X_0, \end{cases}$$

и

$$\varphi_1(X_1) = \begin{cases} 80(X_1 - 2), & X_1 > 2, \\ 110(2 - X_1), & X_1 < 2. \end{cases}$$

Поскольку X_0 задано по условиям задачи, найдем условно-оптимальные задачи только при

$$X_0 = 2.$$



При $X_0 = 2$ и $X_1 = 0$, $W_1(X_1) = 70(2-0) + 110(2-0) + 660 = 1020$

$X_1 = 1$, $W_1(X_1) = 70(2-1) + 110(2-1) + 560 = 740$

$X_1 = 2$, $W_1(X_1) = 0 + 0 + 460 = 460$

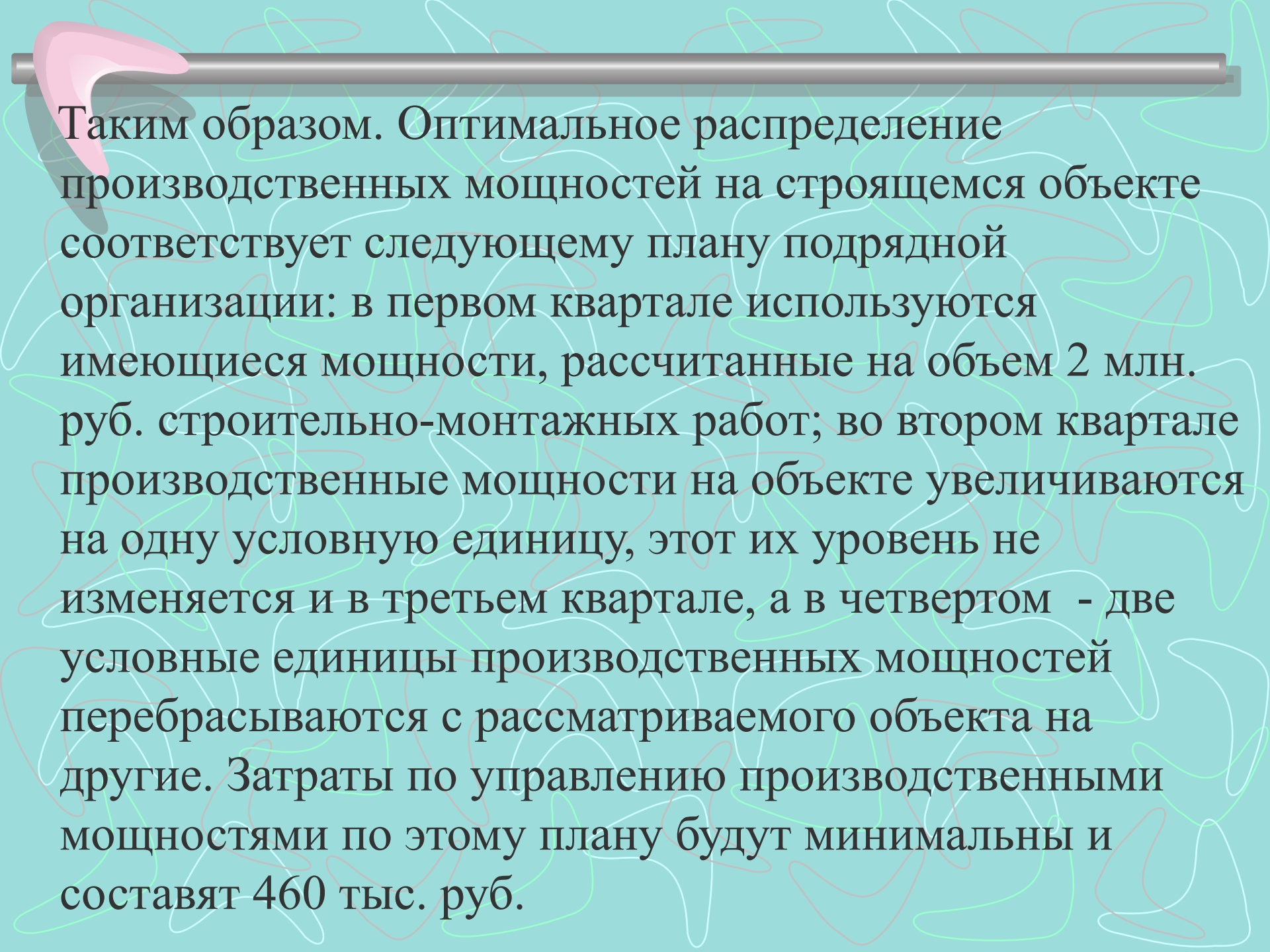
$X_1 = 3$, $W_1(X_1) = 100(3-2) + 80(3-2) + 360 = 540$ и т.д.

Таким образом, условно-оптимальные затраты на первом этапе процесса составляют 460 тыс. руб. при управлении $X_1 = 2$.



7-ой этап. Определение безусловно-оптимальных затрат управлений.

Для затрат в первом квартале оптимальным является управление $X_1=2$. Поскольку $X_1 = X_0$ затраты в первом квартале равны 0. во втором квартале оптимальным управлением является $X_2=3$, затраты составляют 320 тыс. руб. В третьем квартале оптимальным также является управление $X_3=3$, а затраты соответственно составляют 0. Наконец, в четвертом квартале оптимально управление $X_4=1$, при котором затраты составляют 140 тыс. руб. Общая сумма затрат составит 460 тыс. руб.



Таким образом. Оптимальное распределение производственных мощностей на строящемся объекте соответствует следующему плану подрядной организации: в первом квартале используются имеющиеся мощности, рассчитанные на объем 2 млн. руб. строительно-монтажных работ; во втором квартале производственные мощности на объекте увеличиваются на одну условную единицу, этот их уровень не изменяется и в третьем квартале, а в четвертом - две условные единицы производственных мощностей перебрасываются с рассматриваемого объекта на другие. Затраты по управлению производственными мощностями по этому плану будут минимальны и составят 460 тыс. руб.