

# ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ИНФОРМАТИКИ





**Турист шел к озеру. У перекрестка сидели двое парней, каждый из которых знал, какая дорога ведет к озеру. На вопросы они отвечали только «да» или «нет». Один из них всегда говорил правду, другой всегда лгал. Все это знал турист, но не знал, какая из двух дорог ведет к озеру.**

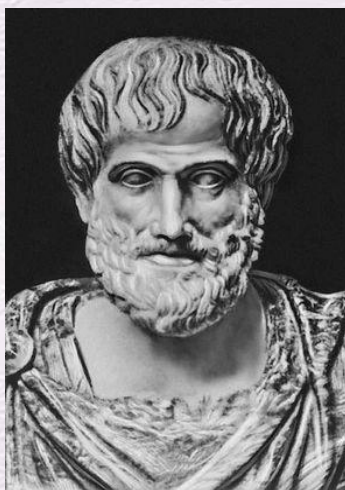
Турист задал один вопрос одному из парней и узнал какая дорога ведет к озеру. Какой вопрос мог задать турист парню?

Турист задал два вопроса одному из парней и узнал какая дорога ведет к озеру. Какие вопросы мог задать турист парню?



**Логика** – это наука правильно рассуждать, наука о формах и законах человеческого мышления.

**Формальная логика** – это наука, пытавшаяся найти ответ на вопрос, как мы рассуждаем, изучающая логические операции и правила мышления.



Ее основоположник –  
древнегреческий  
мыслитель  
**Аристотель (384-322  
года до н. э.).**

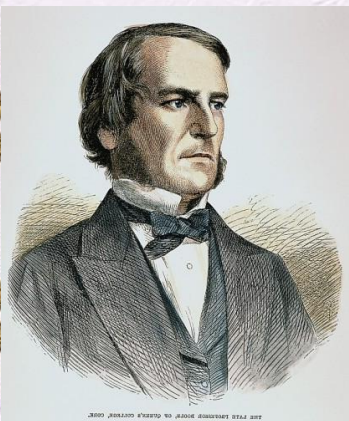


# ЛОГИКА



*Вильгельм Лейбниц* (1646-1716).

Основоположник математической логики (пытался построить первые логические исчисления: арифметические и буквенно-алгебраические).



*Джордж Буль* (1815-1864). Создал новую область науки - Алгебру логики (Булеву алгебру или Алгебру высказываний).



**Главная задача логики** состоит в том, чтобы **ВЫЯВИТЬ**, какие способы рассуждения правильные, а какие нет.

**Задача логики** – описать и исследовать те способы рассуждений, которые являются правильными.





Основные формы мышления: *понятие, суждение (высказывание), умозаключение.*

## Понятие.

**Понятие** - это форма мышления, фиксирующая основные, существенные признаки объекта.

В структуре каждого понятия различают две стороны: **содержание** и **объем**.

**Содержание понятия** составляет совокупность существенных признаков объекта.

Чтобы раскрыть содержание понятия, следует выделить признаки, необходимые и достаточные для выделения данного предмета по отношению к другим предметам.

**Объем понятия** определяется совокупностью предметов, на которую оно распространяется, и может быть представлено в форме множества объектов, состоящего из элементов множества.



## **Высказывание.**

**Высказывание (суждение)** - это форма мышления, выраженная с помощью понятий, посредством которой что-либо утверждают или отрицают о предметах, их свойствах и отношениях между ними. Высказывание может быть *истинно* либо *ложно*.

**Истинное суждение=1, ложное=0**

Каждое высказывание состоит из трех элементов :

**субъекта** - Понятие о предмете мысли;

**предиката** - Понятие о свойствах и отношениях предмета мысли ;

**связки (двух терминов и связки)** - Отношения между субъектом и предикатом выражается *связкой* «есть», «не есть», «является», «состоит» и т. д.



## Пример

Определить, что в суждении «Компьютер состоит из процессора, памяти и внешних устройств» является субъектом, предикатом и связкой.

«Компьютер» - субъект,

«процессора, памяти и внешних устройств» - предикат,

«состоит» - связка.

## Задания для самостоятельного выполнения

**1. Определить, что является субъектом, предикатом и связкой в следующих суждениях:**

- А) Сканер — это устройство ввода информации.
- Б) Луна является спутником Земли.
- В) Атом состоит из ядра и электронов.

**2. Приведите примеры понятий, суждений из различных наук: математики; информатики; физики и химии.**



# Высказывание

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями:

*Земля вращается вокруг Солнца.  
Москва - столица.*

Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием:

*Это высказывание ложное.*

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

*Без стука не входить!  
Откройте учебники.  
Ты выучил стихотворение?*



# Высказывание или нет?

- ✓ На улице жарко.
- ✓ Информатика – это наука.

Ура, снег пошел!

- ✓ У треугольника 3 стороны и 3 угла.

Верно ли, что  $\pi=3,14$ ?

Переведите число в десятичную систему.

Запишите домашнее задание





## Суждения подразделяются на частные и общие:

**ЧАСТНЫЕ** суждения выражают конкретные (частные) факты.

**Пример:**  $7-2=5$

Луна-спутник Земли.

**ОБЩИЕ** суждения характеризуют свойства групп объектов или явлений.

**Пример:** Всякий человек – млекопитающее.

В любом прямоугольном треугольнике есть угол в  $90^{\circ}$ .

**Высказывания** могут выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков. Из двух числовых выражений можно составить высказывания, соединив их знаками равенства или неравенства.



# Простые и сложные высказывания

Высказывания бывают простые и сложные.

Высказывание называется *простым*, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Пример: Завтра пойдет дождь. Я буду смотреть дома телевизор.

*Сложные* (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

Пример: Если завтра пойдет дождь, то я буду смотреть дома телевизор.



# Простые или сложные высказывания?

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Луна – спутник земли.

Студент запланировал выполнить следующие дела: подготовиться к зачету, побывать на тренировке, почитать интересную книгу, поиграть в шахматы.



## Умозаключение

**Умозаключение** – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение).

### Примеры:

Если король под шахом и ему некуда ходить, то – мат.

Если идет дождь, то необходимо открыть зонтик.

### Задания:

*В следующих умозаключениях выделите посылки и заключения. Определите, истинны они или нет:*

- Произведение двух чисел равно 0, если хотя бы один из сомножителей равен 0.
- Если  $A \cdot B = 0$ , то  $A > 0$  и  $B > 0$ .



# Алгебра логики

*Алгебра логики* определяет правила записи, вычисления значений, упрощения и преобразования высказываний.

В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют *логическими переменными*.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей ( $A = 1$ ), а если ложно - нулём ( $B = 0$ ).

**0** и **1** называются *логическими значениями*.





# Логические операции





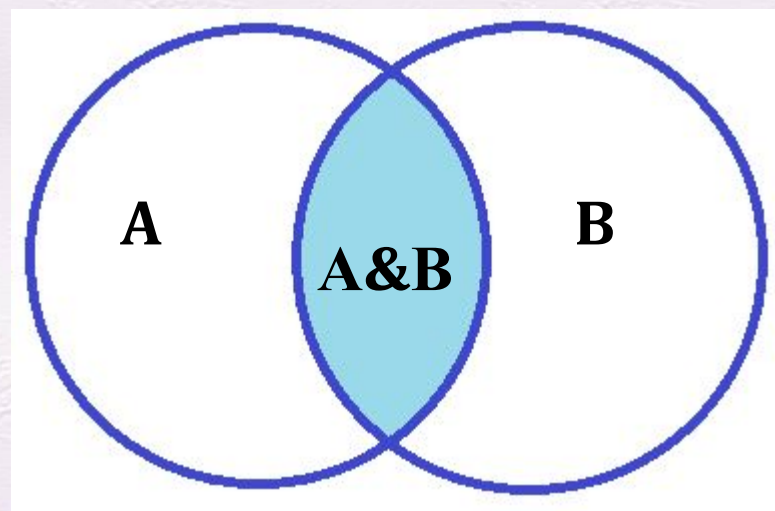
**Логическое умножение или конъюнкция** - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Обозначения:  $\wedge$  ,  $\times$  ,  $\&$  , И.

Таблица истинности:

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A&amp;B</b>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Графическое представление





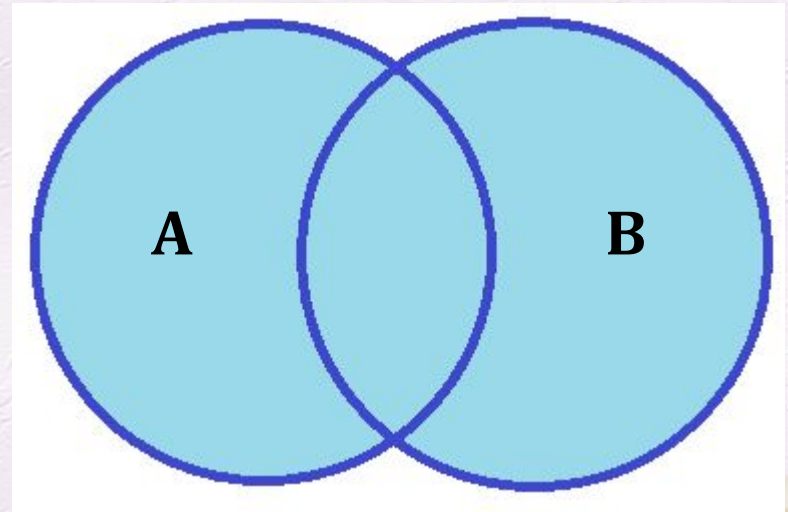
**Логическое сложение или дизъюнкция** - логическая операция, которая каждому двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

Обозначения: **V, |, ИЛИ, +.**

Таблица истинности:

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>AVB</b>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Графическое представление



**AVB**



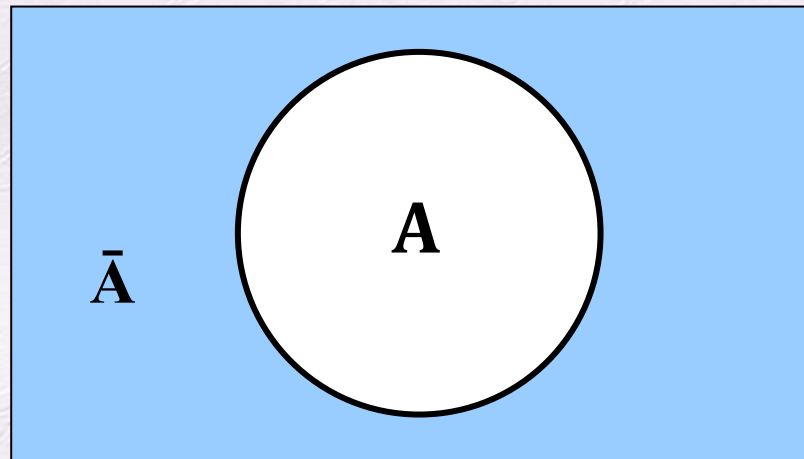
*Логическое отрицание или инверсия* - логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

Обозначения: **НЕ**,  $\neg$ ,  $\bar{\phantom{A}}$ .

Таблица истинности:

<b>A</b>	<b><math>\bar{A}</math></b>
0	1
1	0

Графическое представление





*Логическое следование или импликация* - это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание.

Если А, то В; Из А следует В; А влечет В; для А необходимо В; для В достаточно А;



Обозначения: **ИЛИ  $\rightarrow$**  .

Таблица истинности:

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A<math>\rightarrow</math>B</b>
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



**Логическая равнозначность или эквивалентность** - это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Обозначения:  $\Leftrightarrow$  ,  $\sim$  .

Таблица истинности:

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A<math>\Leftrightarrow</math>B</b>
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



# ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ





## Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении

1. Инверсия;
2. Конъюнкция;
3. Дизъюнкция;
4. Импликация;
5. Эквивалентность.





**Определите истинность составного высказывания:**

**$\overline{(A \& B)} \& (C \setminus D)$ , состоящего из простых высказываний:**

**$A = \{\text{Принтер - устройство вывода информации}\}$ ,**

**$B = \{\text{Процессор - устройство хранения информации}\}$ ,**

**$C = \{\text{Монитор - устройство вывода информации}\}$ ,**

**$D = \{\text{Клавиатура - устройство обработки информации}\}$ .**

**Сначала на основании знания устройства компьютера устанавливаем истинность простых высказываний:**

**$A = 1, B = 0, C = 1, D = 0$ .**

**Определим теперь истинность составного высказывания, используя таблицы истинности логических операций:**

$$\overline{(1 \& 0)} \& (1 \setminus 0) = (0 \& 1) \& (1 \setminus 0) = 0$$

**Составное высказывание ложно.**



## Даны простые высказывания:

$A = \{\text{Принтер – устройство ввода информации}\},$

$B = \{\text{Процессор – устройство обработки информации}\},$

$C = \{\text{Монитор – устройство хранения информации}\},$

$D = \{\text{Клавиатура – устройство ввода информации}\}.$

## Определите истинность составных высказываний:

а)  $(A \& B) \& (C \vee D);$

б)  $(A \& B) \Rightarrow (C \vee D);$

в)  $(A \vee B) \Leftrightarrow (C \& D);$

г)  $\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}.$



**Определите истинность составных высказываний:**

а)  $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$ ;

б)  $((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1$ ;

в)  $(0 \& 1) \& 1$ ;

г)  $1 \& (1 \& 1) \& 1$ ;

д)  $((1 \vee 0) \& (1 \& 1)) \& (0 \vee 1)$ ;

е)  $((1 \& 1) \vee 0) \& (0 \vee 1)$ ;

ж)  $((1 \& 0) \vee (1 \& 0)) \vee 1$ ;

з)  $((0 \& 0) \vee 0) \& (1 \vee 1)$





# Построение таблиц ИСТИННОСТИ





# Построение таблиц истинности для логических выражений

подсчитать  $n$  - число переменных в выражении

подсчитать общее число логических операций в выражении

установить последовательность выполнения логических операций

определить число столбцов в таблице

заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции

определить число строк в таблице без шапки:  $m = 2^n$

выписать наборы входных переменных

провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью



# Пример построения таблицы истинности

$$A \vee A \& B$$

$n$  (число переменных) = 2,

$t$  (количество строк без шапки) =  $2^2 = 4$ .

Операций – 2, значит количество столбцов будет:  $n+2=4$

Приоритет операций:  $\&$ ,  $\vee$

$A$	$B$	$A \& B$	$A \vee A \& B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1



# Пример построения таблицы истинности

*Найдите значение логического выражения для указанных значений X:*

$$(X > 2) \& (X > 5)$$

X	A (X>2)	$\bar{A}$	B (X>5)	$\bar{A} \& B$
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0
4	1	0	0	0
5	1	0	0	0



# Построить таблицы истинности

1.  $B \& (A \vee B)$
2.  $A \& \overline{(B \vee B)}$
3.  $A \& B \& C$
4.  $F = (A \vee B) \& (A \vee B)$

A)  $(A \Rightarrow B) \vee \overline{B}$

B)  $\overline{(A \& \overline{B})} \Leftrightarrow (\overline{A} \vee (A \& B))$

C)  $\overline{(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))} \Leftrightarrow (A \& \overline{B} \& C)$