Элементы математической логики

Логика в информатике и **искусственном интеллекте.**

Алгебра логики (алгебра высказываний) — раздел **математической логики**, в котором изучаются логические операции над **высказываниями**. Предполагается, что высказывания могут быть только истинными или ложными (т.н. бинарная или двоичная логика, в отличие от, например, троичной логики, когда есть три варианта истинности высказывания: «истина», «ложь» и «не определено»).

Логика высказываний – основной математический инструмент при создании компьютеров, легко преобразуется в **битовую**: (0 — ЛОЖЬ, 1 — ИСТИНА);

Историческая справка

Начало исследований в области формальной логики было положено греческим философом **Аристотелем**, 384-322 гг. до н.э. Он основоположник формальной логики.

Впервые перевести логику на язык математики предложил немецкий математик Г. **Лейбниц** в конце XVII века. Эту идею впервые реализовал англ. математик Дж. **Буль** (1815 – 1864г.).

Джордж Буль

Буль создал алгебру, в которой буквами м обозначены высказывания, и это привело к алгебре высказываний.

Алгебра логики находит непосредственное и широкое применение при разработке средств электронной и вычислительной техники.

Определения

Высказывание – это повествовательное предложение, которому можно поставить в соответствие одно из двух значений – истина или ложь. Высказывания строятся над **множеством** $\{B, \neg, \wedge, \vee, 0, 1\}$, где B — непустое множество, над элементами которого определены три **операции**: $\neg$ **-** ***отрицание*** (унарная операция), $\wedge$ **-** ***конъюнкция*** (бинарная), $\vee$ **-** ***дизъюнкция*** (бинарная), а также константы — логический ноль **0** и логическая единица **1**.

B = {Ложь, Истина}. Для B можно задать четыре унарные и шестнадцать бинарных отношений и все они могут быть получены через суперпозицию трёх выбранных операций.

Отрицание

Отрицанием высказывания *A* называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание *A* ложно, и ложным, если высказывание *A* истинно. Обозначается отрицание $\overline{A}$ или ¬ *A* и читается "не *A*" или "неверно, что *A*". Логические значения высказываний можно описать с помощью таблицы истинности, где 0 означает ложь, а 1 – истину. Таблица истинности для отрицания имеет вид:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Двойное **отрицание высказывания *A* совпадает с самим высказыванием *A*.**

Конъюнкция

Логическое умножение. **Конъюнкцией** двух высказываний *A*, *B* называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания *A*, *B* истины, и ложным, если хотя бы одно из них ложно. Обозначается конъюнкция по-разному. Например, $A \times B$, AB, $A \wedge B$, $A \& B$, $A \cdot B$, читается “*A* и *B*”. Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

A	*B*	*AB*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

Логическое сложение. **Дизъюнкцией** двух высказываний A, B называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний истинно, и ложным, если они оба ложны. Дизъюнкция высказываний A, B обозначается символом $A \vee B$, ($A + B$) читается «A или B». Высказывания A, B при этом называются членами дизъюнкции. Логические значения дизъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликация

Импликацией двух высказываний *A*, *B* называется новое высказывание, которое считается ложным, если *A* истинно, а *B* - ложно, и истинным во всех остальных случаях. Обозначается символом $A \rightarrow B$, читается «Если *A*, то *B*» или «из *A* следует *B*». При этом высказывание *A* называется ***условием*** или ***посылкой***, высказывание *B* – следствием или заключением, высказывание $A \rightarrow B$ ***следованием*** или ***импликацией***.

Таблица истинности:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция

Эквиваленцией (или эквивалентностью) двух высказываний A, B называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания A, B либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях. Эквиваленция высказываний A, B обозначается символом $A \leftrightarrow B$, читается «для того, чтобы B, необходимо и достаточно, чтобы A», или «A тогда и только тогда, когда B».

Таблица истинности

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Формулы алгебры логики

Приоритеты при выполнении операций алгебры логики:

1. Выполнение операций в скобках
2. Операция логического отрицания
3. Операция логического умножения
4. Операция логического сложения
5. Операция импликации
6. Операция эквивалентности

Операции с равным приоритетом выполняются слева направо.

$$((A \cdot B) \vee (\overline{A \vee C})) \vee A \qquad A \cdot B \vee \overline{A \vee C} \vee A$$

$$(\overline{A} \vee B) \cdot C \cdot A \rightarrow \overline{(B \cdot (A \vee C))} \qquad (\overline{A} \vee B) \cdot C \cdot A \rightarrow \overline{B \cdot (A \vee C)}$$

Пример. Высказывание «Треугольник ABC с вершиной в точке C и основанием AB равнобедренный тогда и только тогда, когда $\angle A = \angle B$ » является истинным, так как высказывания «Треугольник ABC с вершиной в точке C и основанием AB равнобедренный» и «В равнобедренном треугольнике ABC с вершиной в точке C и основанием AB $\angle A = \angle B$» либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Эквивалентность играет важную роль в ***математических доказательствах***. Известно, что значительное число теорем математики формулируется в форме ***необходимых и достаточных условий***, то есть в форме эквивалентности. В этом случае, зная об истинности или ложности одного из двух элементов эквивалентности и доказав истинности самой эквивалентности, мы заключаем об истинности или ложности второго члена эквивалентности.

Пример. Пусть A - высказывание «Вася изучает программирование», B - высказывание «Вася любит математику». Рассмотрим словесную формулировку высказываний: 1) $A \vee B$; 2) $\overline{A} \,\&\, \overline{B}$; 3) $A \to B$; 4) $\overline{A \to B}$; 5) $\overline{\overline{A} \cdot B}$; 6) $\overline{B} \leftrightarrow \overline{A}$.

Решение:

1) «Вася изучает программирование или любит математику».

2) «Вася не изучает программирование и не любит математику».

3) «Если Вася изучает программирование, то он любит математику».

4) «Неверно, что если Вася изучает программирование, то он любит математику».

Все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности. Например, для формулы $X \cdot \overline{Y} \rightarrow X \vee Y$ таблица истинности имеет вид:

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$X \cdot \overline{Y}$	$\overline{X} \vee Y$	$X \cdot Y \rightarrow \overline{X} \vee Y$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1

Для формулы, содержащей три переменные, таблица истинности будет иметь $2^3 = 8$ строк, и формула принимает 8 значений, состояших из нулей и единиц. Например, для формулы $(X \cdot \bar{Y}) \vee Z$ таблица истинности имеет вид:

X	Y	Z	$\bar{Y}$	$(X \cdot \bar{Y})$	$(X \cdot \bar{Y}) \vee Z$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

Равносильные формулы алгебры логики

Две формулы алгебры логики *A* и *B* называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений элементарных высказываний, входящих в формулу. Запись $A=B$ означает, что формулы *A* и *B* равносильны.

Например, очевидно, что равносильны формулы:

$X=X$; $X \& X=X$; $X \& 0=0$; $X \vee 1=1$; $X \vee \overline{X}=1$;

$X \vee X=X$; $X \& 1=X$; $X \vee 0=X$; $X \& \overline{X}=0$.

Легко видеть, что если $A = B$, то $\overline{A} = \overline{B}$.

Тавтология

Формула *A* называется ***тождественно истинной*** (или **тавтологией**), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее переменных. Например, тождественно истинной является формула $X \to (Y \to X)$, что можно проверить, построив таблицу истинности.

Формула называется ***тождественно ложной***, если она принимает значение ноль при всех значениях входящих в нее переменных. Как уже отмечалось $A \cdot \overline{A} = 0$, то есть формула тождественно ложная.

Свойства отношений равносильности

- $A=A$ (*рефлексивно*);
- Если $A=B$, то $B=A$ (*симметрично*);
- Если $A=B$ и $B=C$, то $A=C$ *(транзитивно)*.

Между понятиями равносильности и эквивалентности существует следующая связь: если формулы A и B равносильны, то формула $A \leftrightarrow B$ тавтология (то есть тождественно истинная), и, обратно, если формула $A \leftrightarrow B$ тавтология, то формулы A и B равносильны.

Равносильности, выражающие одни логические операции через другие

1. $X \leftrightarrow Y = (X \to Y) \cdot (Y \to X)$

   или $X \leftrightarrow Y = X \cdot Y \vee \overline{X} \cdot \overline{Y}$
2. $X \to Y = \overline{X} \vee Y$
3. $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}$
4. $\overline{X \vee Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$
5. $X \cdot Y = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}$
6. $X \vee Y = \overline{\overline{X} \cdot \overline{Y}}$

Всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только две логических операции: конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание.

Штрих Шеффера

X	Y	$X\|Y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Очевидно, что имеют место равносильности: $\overline{X}=X|X$, $X\cdot Y=(X|Y)|(X|Y)$. Из этих двух равносильностей следует, что всякая формула алгебры логики может быть заменена равносильной формулой, содержащей только операцию «штрих Шеффера». Отметим, что $X|Y=\overline{X\cdot Y}$. Аналогично операции «штрих Шеффера» может быть использована операция, называемая «стрелкой Пирса»:

$$X\downarrow Y=\overline{X\vee Y}$$

Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики

Название	Дизъюнктивная форма	Конъюнктивная форма
1. Коммутативный закон	$A \vee B = B \vee A$	$A \cdot B = B \cdot A$
2. Ассоциативный закон	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3. Дистрибутивный закон	$A \vee (B \cdot C) = (A \vee B) \cdot (A \vee C)$	$A \cdot (B \vee C) = (A \cdot B) \vee (A \cdot C)$
4. Закон поглощения	$A \vee A \cdot B = A$	$A \cdot (A \vee B) = A$
5. Закон слияния	$A \vee \overline{A} \cdot B = A \vee B$	$A \cdot (\overline{A} \vee B) = AB$
6. Закон идемпотентности	$A \vee A = A$	$A \cdot A = A$
7. Законы исключения констант	$A \vee 1 = 1; \quad A \vee 0 = A$	$A \cdot 1 = A; \quad A \cdot 0 = 0$
Законы отрицания	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Закон двойственности

Следует отметить, что между равносильностями, записанными в дизъюнктивной форме и в конъюнктивной форме, существует свойство симметрии: если дизъюнкцию заменить конъюнкцией, а конъюнкцию заменить дизъюнкцией, 0 заменить на 1, а 1 заменить на 0, при этом отрицания сохранить без изменений, то записанные слева и справа равносильности перейдут друг в друга. Следовательно, с помощью указанных замен можно из одних равносильностей получить другие. Это называется ***законом двойственности***.

Многие законы можно обобщить на случай большого числа переменных

$$\overline{(A \vee B \vee C \vee D \vee \ldots \vee P)} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} \cdot \ldots \cdot \bar{P}$$

$$\overline{(A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot \ldots \cdot P)} = \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{D} \vee \ldots \vee \bar{P}$$

$A \vee B \cdot C \cdot D \cdot \ldots \cdot P = (A \vee B) \cdot (A \vee C) \cdot (A \vee D) \cdot \ \ldots \ \cdot (A \vee P)$ и

$A \cdot (B \vee C \vee D \vee \ldots \vee P) = A \cdot B \vee A \cdot C \vee A \cdot D \vee \ldots \vee A \cdot P$

$$(A \vee B) \cdot (C \vee D) = A \cdot C \vee A \cdot D \vee B \cdot C \vee B \cdot D$$

$$A \cdot B \vee C \cdot D = (A \vee C) \cdot (A \vee D) \cdot (B \vee C) \cdot (B \vee D)$$

$A \vee A \cdot B \vee A \cdot B \cdot C \cdot D = A;$

$A \cdot (A \vee C \vee D \vee \ldots \vee P) = A;$

$(A \vee C) \vee \overline{(A \vee C)} D = A \vee C \vee D$

$\overline{(A \vee C)} \vee (A \vee C) D = \overline{(A \vee C)} \vee D$

$$AB \vee AC \vee \bar{B}C = AB \vee AC \cdot (B \vee \bar{B}) \vee \bar{B}C = ABC \vee A\bar{B}C \vee AB \vee \bar{B}C = AB \vee \bar{B}C$$

$$AB \vee A\bar{C} \vee \bar{B}C = A(B \vee \bar{C}) \vee \bar{B}C = A \cdot \overline{\bar{B}C} \vee \bar{B}C = A \vee \bar{B}C$$

Пример. Упростить выражение $(ABD \vee A\overline{B} \vee B\overline{AD}) \cdot (AD \vee \overline{A}BD \vee \overline{A}\overline{BD})$.

Решение. Упростим выражения в скобках:

$$ABD \vee A\overline{B} \vee B\overline{AD} = B(AD \vee \overline{AD}) \vee A\overline{B} = B \vee A\overline{B} = B \vee A$$

$$\overline{A}B \vee \overline{A}\overline{BD} = \overline{A}B \vee \overline{A}(\overline{B} \vee \overline{D}) = \overline{A}B \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot \overline{D} = \overline{A}(B \vee \overline{B}) \vee \overline{A} \cdot \overline{D} = \overline{A} \vee \overline{A} \cdot \overline{D} = \overline{A}$$

1. Перемножим полученные выражения.

   $$(B \vee A) \cdot \overline{A} = \overline{A}B \vee A \cdot \overline{A} = \overline{A}B$$

2. Таким образом, $(ABD \vee A\overline{B} \vee B\overline{AD}) \cdot (AD \vee \overline{A}BD \vee \overline{A}\overline{BD}) = \overline{A}B$.

Равносильные формулы алгебры логики

Две формулы алгебры логики *A* и *B* называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений элементарных высказываний, входящих в формулу. Запись *A*=*B* означает, что формулы *A* и *B* равносильны.

Например, очевидно, что равносильны формулы:

$X=X$; $X\&X=X$; $X\&0=0$; $X\vee 1=1$; $X\vee\overline{X}=1$;

$X\vee X=X$; $X\&1=X$; $X\vee 0=X$; $X\&\overline{X}=0$.

Легко видеть, что если $A=B$, то $\overline{A}=\overline{B}$.

Нормальные формы логических выражений

Совершенная дизъюнктивно нормальная форма (**СДНФ**):
ДНФ, удовлетворяющая условиям:

- Все элементарные конъюнкции различны;
- Нет нулевых конъюнкций;
- Ни одна из элементарных конъюнкций не повторяется;
- Каждая элементарная конъюнкция содержит все переменные или их отрицания.

Аналогичны условия для **СКНФ**.

СДНФ и **СКНФ** используются при проектировании элементов и узлов компьютера

- **СДНФ.** Для всех наборов переменных, на которых функция принимает единичные значения, записываются конъюнкции этих переменных, инвертируя те переменные, которым соответствуют нулевые значения. Затем конъюнкции соединяют знаком дизъюнкции.

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\overline{A}B \vee A\overline{B}$$

- **СКНФ**. Для всех наборов переменных, на которых функция принимает нулевые значения, записываются конъюнкции этих переменных, инвертируя те переменные, которым соответствуют единичные значения. Затем дизъюнкции соединяют знаком конъюнкции.

$$(\overline{A} \vee \overline{B})(A \vee B)$$

$$\left(C \xrightarrow{3} \left(\bar{A} \xleftrightarrow{2} B \overset{1}{\vee} C\right)\right) \xrightarrow{7} \left(AC \overset{4}{\vee} B \xleftrightarrow{6} A\overset{5}{B}C\right)$$

A	B	C	1	2	3*	4	5	6	7*	AC	$\vee\ \bar{B}$	
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	$\vee$ 1	= 1
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1

* „из правды не может следовать ложь".

$$\overline{\overline{C}\vee\overline{A}(B\vee C)\vee A\,\overline{B\vee C}}\vee(AC\vee B)ABC\vee\overline{AC\vee B}\cdot\overline{ABC}=$$

$$=C\cdot(A\vee\overline{B\vee C})\cdot\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}\vee ABC\vee\overline{AC}\cdot\overline{B}\cdot(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C})=$$

$$=(AC\vee\underset{0}{C\overline{B}\overline{C}})\cdot(\overline{A}\vee B\vee C)\vee ABC\vee(\overline{A}\vee\overline{C})\cdot\underbrace{\overline{B}\cdot(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C})}_{\overline{B}}=$$

$$=\cancel{ABC}\vee AC\vee\overline{A}\overline{B}\vee\overline{B}\overline{C}=\overline{B}\vee AC$$

симметрия трехчлена нарушена по 2-м переменным

Контрольные задания

6. Привести формулу к минимальной ДНФ:

$[(A\overline{B} \to C) \to B] \to (C \leftrightarrow A \vee B)$.

Ответы: 1) $B\overline{A} \vee \overline{B}C$ 2) $C \vee \overline{B} \cdot \overline{A}$ 3) $A\overline{C} \vee CB$

4) $C \vee B\overline{A}$ 5) $AB \vee AC \vee BC$

6. Привести формулу к минимальной ДНФ:

$[AB \to (A \vee \overline{C} \to \overline{B})] \to (A \vee C \leftrightarrow B \vee \overline{C})$.

Ответы: 1) $B\overline{A} \vee \overline{B}C$ 2) $C \vee \overline{B} \cdot \overline{A}$ 3) $A\overline{C} \vee CB$

4) $C \vee B\overline{A}$ 5) $AB \vee AC \vee BC$

Контрольные задания

1. Представить в МДНФ: $\overline{A \vee B \rightarrow \bar{B} \vee C} \leftrightarrow (\bar{A} \cdot B \vee \overline{A \cdot C}) \cdot (A \cdot B \vee \bar{B} \cdot C)$

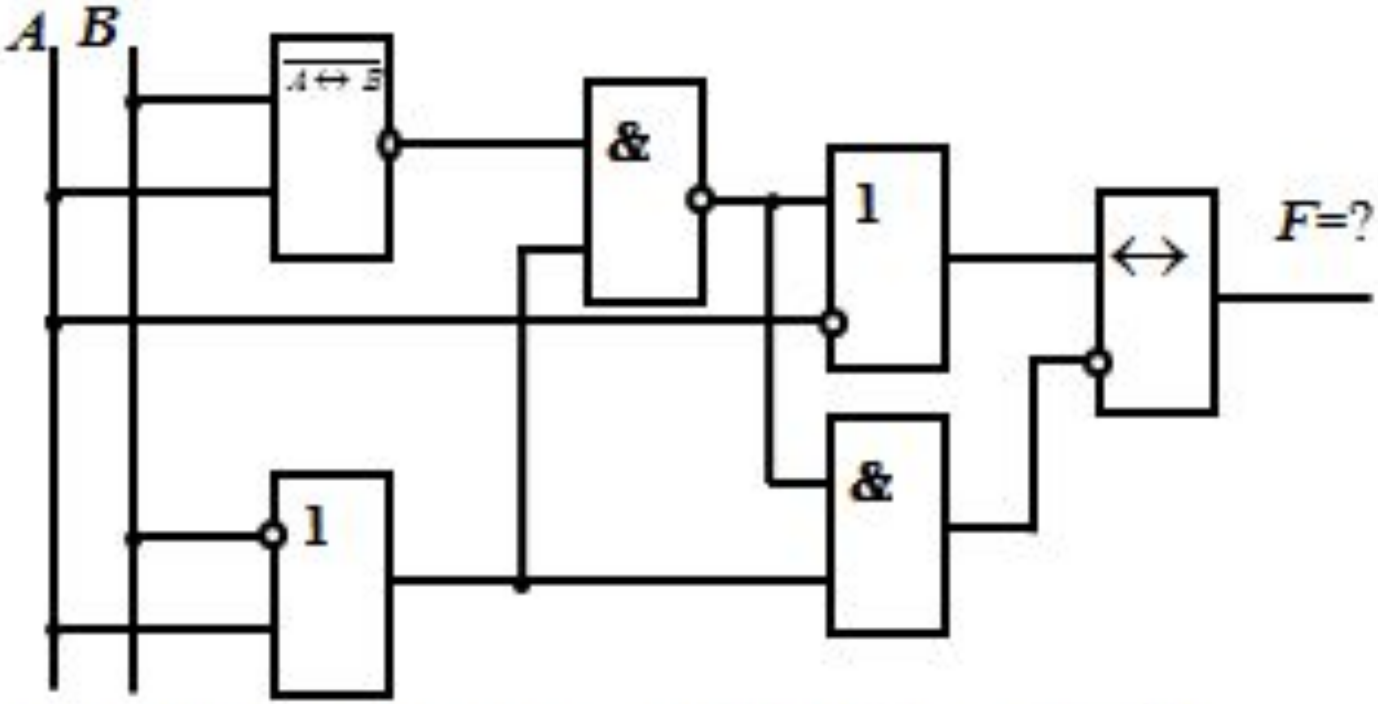
2. Даны три числа в различных системах счисления: $A=16_{(10)}$, $B=21_{(8)}$, $C=12_{(10)}$. Выполните следующие логические операции: $AB+C$. Ответ напишите в шестнадцатеричной системе счисления и в десятичной системе.

3. Постройте таблицу истинности для логической функции $(C \rightarrow (\bar{A} \leftrightarrow B+C)) \rightarrow (AC+B \leftrightarrow ABC)$.

4. Построить логическую функцию по заданной таблице истинности, которая имеет нулевые значения при следующих наборах переменных A, B, C: (001), (010), (011), (110).

Контрольные задания

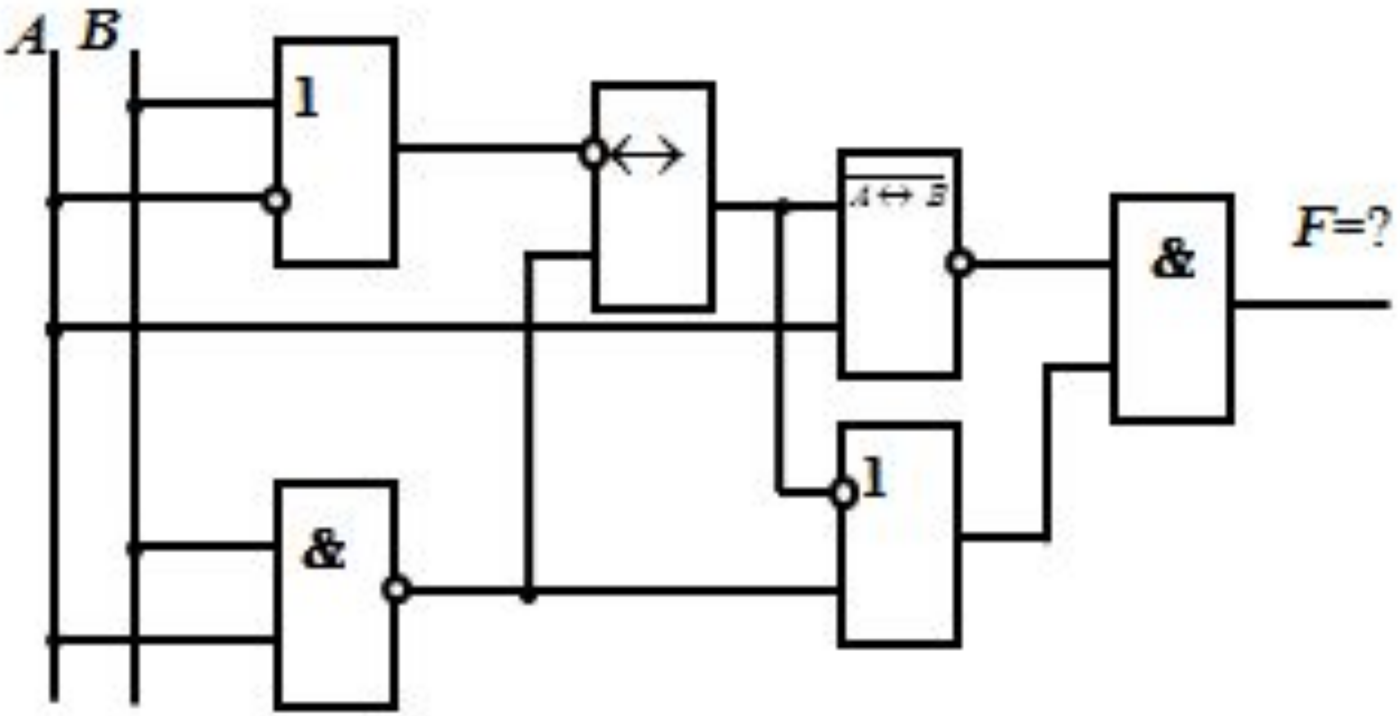
7. Какую логическую функцию F(A,B) реализует приведенная комбинационная схема?



Ответы: 1) $A \leftrightarrow B$ 2) B 3) $A \cdot \overline{B}$ 4) $\overline{A}$ 5) $\overline{A \vee B}$

Контрольные задания

7. Какую логическую функцию F(A,B) реализует приведенная комбинационная схема?



Ответы: 1) $A \leftrightarrow B$ 2) $\overline{A \leftrightarrow B}$ 3) $A \cdot \overline{B}$ 4) $\overline{A}$ 5) $\overline{A \vee B}$