

# Элементы теоретического программирования

Машина Тьюринга – математическое  
понятие алгоритма

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Каждой паре вида  $(s_i, q_i)$ , где  $s_i \in A$  и  $q_i \in Q \setminus \{q_0\}$ , соответствует тройка  $(s_j, t, q_j)$ , где  $s_j \in A$ ,  $t \in T$  и  $q_j \in Q$  ( $q_0$  не участвует в парах  $(s_i, q_i)$ , так как паре  $(s_i, q_0)$  уже ничего не соответствует, машина останавливается в заключительном состоянии  $q_0$ ).

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Множество всех пар вида  $(s_i, q_i)$ , где  $s_i \in A$  и  $q_i \in Q \setminus \{q_0\}$ , называется **произведением множеств**  $A$  и  $Q \setminus \{q_0\}$  и обозначается  $A \times Q \setminus \{q_0\}$ . Аналогично, множество всех троек вида  $(s_j, t, q_j)$ , где  $s_j \in A$ ,  $t \in T$  и  $q_j \in Q$ , называется **произведением множеств**  $A$ ,  $T$  и  $Q$  и обозначается  $A \times T \times Q$

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Таким образом, программа машины Тьюринга представляет собой функцию с областью определения  $A \times Q \setminus \{q_0\}$ , принимающую значения из множества  $A \times T \times Q$ , или отображение первого множества во второе:  $A \times Q \setminus \{q_0\} \rightarrow A \times T \times Q$

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

**Машиной Тьюринга (МТ)** называется система вида

$(A, s_0, Q, q_1, q_0, T, \tau)$ , где

$A$  – конечное множество – **алфавит МТ**,

$s_0 \in A$  и называется **пустой буквой алфавита**,

$Q$  – конечное множество, элементы которого называются **состояниями МТ** ( $Q$  – множество состояний МТ),

$q_1 \in Q$ ,  $q_1$  – **начальное состояние МТ**,

$q_0 \in Q$ ,  $q_0$  – **пассивное** или **заключительное состояние МТ**,

$T = \{Л, Н, П\}$  – **множество сдвигов МТ**,

$\tau : A \times Q \setminus \{q_0\} \rightarrow A \times T \times Q$ ,  $\tau$  – **программа МТ**.

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Машина Тьюринга перерабатывает слова в алфавите машины согласно программе этой машины.

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Какую бы МТ, имеющую алфавит  $A = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$ , состояния  $q_0, q_1, \dots, q_p$  и программу  $\tau$ , мы ни взяли, можем считать, что имеется алгоритм, исходными объектами, промежуточными и окончательными результатами которого являются слова в алфавите  $A$ . Предписанием, задающим этот алгоритм, является программа  $\tau$ .

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Другими словами, с математической точки зрения МТ — это алгоритм для переработки слов в алфавите этой машины (ради удобства отождествляем МТ с ее программой).



# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

## ◆ **Массовость алгоритма.**

Множество исходных данных для алгоритма — множество всевозможных слов в алфавите  $A$  машины. Это множество бесконечно, его элементы записываются на ленте машины.

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

## ◆ **Результативность алгоритма.**

Алгоритм по любому исходному данному позволяет в конечное число шагов получить результат.

Программа МТ применяется единообразно ко всевозможным исходным данным и не меняется в процессе работы машины над исходным словом.

Программа описывает переход от одного состояния к другому. Некоторое состояние опознается как заключительное. Появившееся при этом на ленте слово в алфавите  $A$  является результатом переработки слова, записанного на ленте в начальном состоянии машины.

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

## ◆ **Конструктивность объектов.**

Исходные объекты, промежуточные и окончательные результаты для МТ — слова в алфавите  $A$  машины. Такие объекты являются конструктивными.

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

## ◆ Детерминированность (определенность) алгоритма.

Программа  $\tau$  составлена таким образом, что ее исполнение однозначно осуществимо.

Действительно, программа  $\tau$  — это совокупность команд вида  $s_i q_j \rightarrow s_m T q_p$ , причем любые две различные команды не содержат одинаковых левых частей. При этом условии система команд не может требовать двух или более различных действий в одно и то же время.

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ **Детерминированность (определенность) алгоритма.**  
Свойство детерминированности означает также, что применение программы  $\tau$  к одному и тому же слову в алфавите  $A$  приводит к одному и тому же результату с одной и той же последовательностью состояний ленты.

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ **Конечность предписания, задающего алгоритм.**

Программа  $\tau$  представляет собой конечное предписание, причем процесс вычислений протекает только согласно программе и исходным данным, ничего более не используется.

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Нельзя ли задавать посредством МТ и другие известные нам алгоритмы, задаваемые обычно с помощью предписаний. Другими словами, насколько «богат» класс МТ? Быть может он включает все алгоритмы?

# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

## ◆ Тезис Тьюринга:

**Всякий алгоритм может быть задан  
посредством МТ**



# Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

В тезисе Тьюринга речь идет, с одной стороны, о понятии алгоритма, которое не является точным математическим понятием; с другой стороны, о точном математическом понятии — МТ. Значение этого тезиса и заключается в том, что он уточняет понятие алгоритма через математическое понятие — машину Тьюринга

# Классы задач не имеющих разрешающего алгоритма

1. Существует ли алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению с целыми коэффициентами выяснить, имеет оно целочисленное решение или нет?

# Классы задач не имеющих разрешающего алгоритма

2. Существует ли алгоритм, позволяющий по любому ассоциативному исчислению выяснить, разрешима в нем проблема эквивалентности слов или нет?

# Машина Тьюринга ~ Нормальный алгоритм Маркова

Класс алгоритмов в форме машин  
Тьюринга и класс нормальных  
алгоритмов совпадают, эти  
алгоритмы **равносильны**.

# Машина Тьюринга ~ Нормальный алгоритм Маркова

Иными словами, для каждого алгоритма из класса машин Тьюринга существует равносильный ему алгоритм в классе нормальных алгоритмов, и наоборот.

# Машина Тьюринга ~ Нормальный алгоритм Маркова

В этом смысле две математические теории алгоритмов: теория нормальных алгоритмов и теория машин Тьюринга, считаются эквивалентными (равносильными).