

Элементы теоретического программирования

Машина Тьюринга – математическое
понятие алгоритма

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Каждой паре вида (s_i, q_i) , где $s_i \in A$ и $q_i \in Q \setminus \{q_0\}$, соответствует тройка (s_j, t, q_j) , где $s_j \in A$, $t \in T$ и $q_j \in Q$ (q_0 не участвует в парах (s_i, q_i) , так как паре (s_i, q_0) уже ничего не соответствует, машина останавливается в заключительном состоянии q_0).

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Множество всех пар вида (s_i, q_i) , где $s_i \in A$ и $q_i \in Q \setminus \{q_0\}$, называется **произведением множеств** A и $Q \setminus \{q_0\}$ и обозначается $A \times Q \setminus \{q_0\}$. Аналогично, множество всех троек вида (s_j, t, q_j) , где $s_j \in A$, $t \in T$ и $q_j \in Q$, называется **произведением множеств** A , T и Q и обозначается $A \times T \times Q$

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Таким образом, программа машины Тьюринга представляет собой функцию с областью определения $A \times Q \setminus \{q_0\}$, принимающую значения из множества $A \times T \times Q$, или отображение первого множества во второе: $A \times Q \setminus \{q_0\} \rightarrow A \times T \times Q$

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

Машиной Тьюринга (МТ) называется система вида

$(A, s_0, Q, q_1, q_0, T, \tau)$, где

A – конечное множество – алфавит МТ,

$s_0 \in A$ и называется пустой буквой алфавита,

Q – конечное множество, элементы которого называются состояниями МТ (Q – множество состояний МТ),

$q_1 \in Q$, q_1 – начальное состояние МТ,

$q_0 \in Q$, q_0 – пассивное или заключительное состояние МТ,

$T = \{Л, Н, П\}$ – множество сдвигов МТ,

$\tau : A \times Q \setminus \{q_0\} \rightarrow A \times T \times Q$, τ – программа МТ.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Машина Тьюринга перерабатывает слова в алфавите машины согласно программе этой машины.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Какую бы МТ, имеющую алфавит $A = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$, состояния q_0, q_1, \dots, q_p и программу τ , мы ни взяли, можем считать, что имеется алгоритм, исходными объектами, промежуточными и окончательными результатами которого являются слова в алфавите A . Предписанием, задающим этот алгоритм, является программа τ .

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Другими словами, с математической точки зрения МТ — это алгоритм для переработки слов в алфавите этой машины (ради удобства отождествляем МТ с ее программой).

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

◆ **Массовость алгоритма.**

Множество исходных данных для алгоритма — множество всевозможных слов в алфавите A машины. Это множество бесконечно, его элементы записываются на ленте машины.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

◆ **Результативность алгоритма.**

Алгоритм по любому исходному данному позволяет в конечное число шагов получить результат.

Программа МТ применяется единообразно ко всевозможным исходным данным и не меняется в процессе работы машины над исходным словом.

Программа описывает переход от одного состояния к другому. Некоторое состояние опознается как заключительное. Появившееся при этом на ленте слово в алфавите A является результатом переработки слова, записанного на ленте в начальном состоянии машины.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

◆ **Конструктивность объектов.**

Исходные объекты, промежуточные и окончательные результаты для МТ — слова в алфавите A машины. Такие объекты являются конструктивными.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

◆ Детерминированность (определенность) алгоритма.

Программа τ составлена таким образом, что ее исполнение однозначно осуществимо.

Действительно, программа τ — это совокупность команд вида $s_i q_j \rightarrow s_m T q_p$, причем любые две различные команды не содержат одинаковых левых частей. При этом условии система команд не может требовать двух или более различных действий в одно и то же время.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ **Детерминированность (определенность) алгоритма.**
Свойство детерминированности означает также, что применение программы τ к одному и тому же слову в алфавите A приводит к одному и тому же результату с одной и той же последовательностью состояний ленты.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ **Конечность предписания, задающего алгоритм.**

Программа τ представляет собой конечное предписание, причем процесс вычислений протекает только согласно программе и исходным данным, ничего более не используется.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- ◆ Нельзя ли задавать посредством МТ и другие известные нам алгоритмы, задаваемые обычно с помощью предписаний. Другими словами, насколько «богат» класс МТ? Быть может он включает все алгоритмы?

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

◆ Тезис Тьюринга:

**Всякий алгоритм может быть задан
посредством МТ**

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

В тезисе Тьюринга речь идет, с одной стороны, о понятии алгоритма, которое не является точным математическим понятием; с другой стороны, о точном математическом понятии — МТ. Значение этого тезиса и заключается в том, что он уточняет понятие алгоритма через математическое понятие — машину Тьюринга

Классы задач не имеющих разрешающего алгоритма

1. Существует ли алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению с целыми коэффициентами выяснить, имеет оно целочисленное решение или нет?

Классы задач не имеющих разрешающего алгоритма

2. Существует ли алгоритм, позволяющий по любому ассоциативному исчислению выяснить, разрешима в нем проблема эквивалентности слов или нет?

Машина Тьюринга ~ Нормальный алгоритм Маркова

Класс алгоритмов в форме машин
Тьюринга и класс нормальных
алгоритмов совпадают, эти
алгоритмы равносильны.

Машина Тьюринга ~ Нормальный алгоритм Маркова

Иными словами, для каждого алгоритма из класса машин Тьюринга существует равносильный ему алгоритм в классе нормальных алгоритмов, и наоборот.

Машина Тьюринга ~ Нормальный алгоритм Маркова

В этом смысле две математические теории алгоритмов: теория нормальных алгоритмов и теория машин Тьюринга, считаются эквивалентными (равносильными).