Элементы теоретического программирования

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- Каждой паре вида (s_i, q_i), где $s_i \in A$ и $q_i \in Q \setminus \{q_0\}$, соответствует тройка (s_j, t, q_j), где $s_j \in A$, $t \in T$ и $q_j \in Q$ (q_0 не участвует в парах (s_i, q_i), так как паре (s_i, q_0) уже ничего не соответствует, машина останавливается в заключительном состоянии q_0).

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- Множество всех пар вида (s_i, q_i), где $s_i \in A$ и $q_i \in Q \setminus \{q_0\}$, называется **произведением множеств** A и $Q \setminus \{q_0\}$ и обозначается $A \times Q \setminus \{q_0\}$. Аналогично, множество всех троек вида (s_j, t, q_j), где $s_j \in A$, $t \in T$ и $q_j \in Q$, называется **произведением множеств** A, T и Q и обозначается $A \times T \times Q$

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- Таким образом, программа машины Тьюринга представляет собой функцию с областью определения $A \times Q \setminus \{q_0\}$, принимающую значения из множества $A \times T \times Q$, или отображение первого множества во второе: $A \times Q \setminus \{q_0\} \rightarrow A \times T \times Q$

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

Машиной Тьюринга (МТ) называется система вида $(A, s_0, Q, q_1, q_0, T, \tau)$, где

A – конечное множество – **алфавит МТ**,

$s_0 \in A$ и называется **пустой буквой алфавита**,

Q – конечное множество, элементы которого называются **состояниями МТ** (Q – множество состояний МТ),

$q_1 \in Q$, q_1 – **начальное состояние МТ**,

$q_0 \in Q$, q_0 – **пассивное** или **заключительное состояние МТ**,

$T=\{Л, Н, П\}$ – **множество сдвигов МТ**,

$\tau : A \times Q \setminus \{q_0\} \rightarrow A \times T \times Q$, τ – **программа МТ**.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- Машина Тьюринга перерабатывает слова в алфавите машины согласно программе этой машины.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- Какую бы МТ, имеющую алфавит $A=\{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$, состояния $q_0, q_1, \ldots, q_p$ и программу τ, мы ни взяли, можем считать, что имеется алгоритм, исходными объектами, промежуточными и окончательными результатами которого являются слова в алфавите A. Предписанием, задающим этот алгоритм, является программа τ.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- Другими словами, с математической точки зрения МТ — это алгоритм для переработки слов в алфавите этой машины (ради удобства отождествляем МТ с ее программой).

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- **Массовость алгоритма.** Множество исходных данных для алгоритма — множество всевозможных слов в алфавите А машины. Это множество бесконечно, его элементы записываются на ленте машины.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- **Результативность алгоритма.** Алгоритм по любому исходному данному позволяет в конечное число шагов получить результат. Программа МТ применяется единообразно ко всевозможным исходным данным и не меняется в процессе работы машины над исходным словом. Программа описывает переход от одного состояния к другому. Некоторое состояние опознается как заключительное. Появившееся при этом на ленте слово в алфавите А является результатом переработки слова, записанного на ленте в начальном состоянии машины.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- **Конструктивность объектов.** Исходные объекты, промежуточные и окончательные результаты для МТ — слова в алфавите А машины. Такие объекты являются конструктивными.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- **Детерминированность (определенность) алгоритма.** Программа τ составлена таким образом, что ее исполнение однозначно осуществимо. Действительно, программа τ — это совокупность команд вида $s_i q_j \rightarrow s_m T q_p$, причем любые две различные команды не содержат одинаковых левых частей. При этом условии система команд не может требовать двух или более различных действий в одно и то же время.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- **Детерминированность (определенность) алгоритма.** Свойство детерминированности означает также, что применение программы τ к одному и тому же слову в алфавите A приводит к одному и тому же результату с одной и той же последовательностью состояний ленты.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- **Конечность предписания, задающего алгоритм.**
  Программа τ представляет собой конечное предписание, причем процесс вычислений протекает только согласно программе и исходным данным, ничего более не используется.

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- Нельзя ли задавать посредством МТ и другие известные нам алгоритмы, задаваемые обычно с помощью предписаний. Другими словами, насколько «богат» класс МТ? Быть может он включает все алгоритмы?

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

- **Тезис Тьюринга:**
  Всякий алгоритм может быть задан посредством МТ

Машина Тьюринга – математическое понятие алгоритма

В тезисе Тьюринга речь идет, с одной стороны, о понятии алгоритма, которое не является точным математическим понятием; с другой стороны, о точном математическом понятии — МТ. Значение этого тезиса и заключается в том, что он уточняет понятие алгоритма через математическое понятие — машину Тьюринга

Классы задач не имеющих разрешающего алгоритма

1. Существует ли алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению с целыми коэффициентами выяснить, имеет оно целочисленное решение или нет?

Классы задач не имеющих разрешающего алгоритма

2. Существует ли алгоритм, позволяющий по любому ассоциативному исчислению выяснить, разрешима в нем проблема эквивалентности слов или нет?

Машина Тьюринга ~ Нормальный алгоритм Маркова

Класс алгоритмов в форме машин Тьюринга и класс нормальных алгоритмов совпадают, эти алгоритмы **равносильны**.

Машина Тьюринга ~ Нормальный алгоритм Маркова

Иными словами, для каждого алгоритма из класса машин Тьюринга существует равносильный ему алгоритм в классе нормальных алгоритмов, и наоборот.

Машина Тьюринга ~ Нормальный алгоритм Маркова

В этом смысле две математические теории алгоритмов: теория нормальных алгоритмов и теория машин Тьюринга, считаются эквивалентными (равносильными).