# Игровые аспекты принятия решений

ЛЕКЦИЯ 7

# Содержание

# Текущий контроль

- Прогнозировать результаты голосования с помощью дерева вариантов, если число голосов каждой коалиции определяется номером студента k.

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| $\lvert 5-k \rvert$ | $\lvert 10-k \rvert$ | $\lvert 15-k \rvert$ |
| A | B | C |
| B | C | A |
| C | A | A |

# Часть 1

Общие положения теории игр и их классификация

# Основные компоненты любой игры

- конфликт;
- принятие решения;
- оптимальность решения.

# Характеризующие игру элементы

- чередование либо одновременность ходов, которые могут быть, как логичными, так и случайными;
- возможная недостаточность информации;
- функция выигрыша, определяющая цену игры.

# Классификация игр

- Матричные и позиционные;
- Антагонистические и неантагонистические;
- С полной и неполной информацией;
- Игры двух и более лиц;
- Игры с коалициями и без них;
- Игры в чистых и смешанных стратегиях;
- Игры с нулевой и произвольной суммой;
- Игры с седловой точкой и без нее;
- Конечные и бесконечные игры…

## Часть 2

# Примеры игр

# Антагонистические и неантагонистические игры

- **Антагонистическая игра: матричная игра с полной информацией и нулевой суммой**
- **Неантагонистическая игра: первый игрок выбирает наилучшую для себя стратегию, второй –выбирает ее случайно.**
- **«Игра с болваном»: первый игрок выбирает наилучшую для себя стратегию, второй действует в интересах первого игрока.**

# Теорема о предательстве

- Игрок вступивший в коалицию и нарушивший ее рискует проиграть все.

# Дилемма заключенного

- Каждому из двух заключенных, обвиняемых в одном преступлении, предлагается на выбор три альтернативы:
- Признать вину – тогда он получит срок t лет, а другой заключенный выйдет на свободу.
- Не признавать вину, тогда ему грозит срок T лет.
- Обвинить в преступлении другого заключенного, тогда обвинивший будет выпущен на свободу, а другой заключенный получит срок T лет.

# Матричные антагонистические игры двух лиц с нулевой суммой и полной информацией

- Игра определяется матрицей M, строки которой соответствуют стратегиям максимизирующего игрока, а столбцы – минимизирующего:
- M =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 1 | 12 |
| 4 | 11 | 3 | 7 |
| 6 | 9 | 5 | 10 |
| 7 | 14 | 4 | 5 |
| 8 | 16 | 2 | 20 |

## Часть 3

# Эквивалентные преобразования игр

# Доминирующая и доминируемая стратегии

- **Стратегии i  и  j называются соответственно <u>доминирующей</u> и <u>доминируемой</u>, если каждый элемент i-ой стратегии “лучше” одноименного элемента j-ой стратегии. Это позволяет <u>игнорировать доминируемые стратегии</u> и, таким образом, облегчить поиск оптимальных стратегий игроков.**

# Пример 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 1 | 12 |
| 4 | 11 | 3 | 7 |
| 6 | 9 | 5 | 10 |
| 7 | 14 | 4 | 5 |
| 8 | 16 | 2 | 20 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 1 | 12 |
| 4 | 3 | 7 |
| 6 | 5 | 10 |
| 7 | 4 | 5 |
| 8 | 2 | 20 |

| | |
|---|---|
| 5 | 1 |
| 4 | 3 |
| 6 | 5 |
| 7 | 4 |
| 8 | 2 |

| |
|---|
| 1 |
| 3 |
| 5 |
| 4 |
| 2 |

| |
|---|
| 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) Первый столбец доминирующий , второй – доминируемый. | 2) Второй столбец - доминирующий, третий – доминируемый. | 3) Второй столбец – доминирующий , первый - доминируемый | 4) Третья строка - доминирующая | 5) Цена игры равна пяти. |

Вопрос: влияет ли на цену игры изменение порядка отбрасывания доминируемых стратегий ?

# Самостоятельно

- Отбросить доминируемые стратегии в игре, заданной матрицей М:

- М =

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 1 | 12 | 2 |
| 4 | 11 | 8 | 7 | 5 |
| 6 | 9 | 5 | 10 | 4 |
| 7 | 14 | 4 | 5 | 3 |
| 8 | 16 | 2 | 20 | 6 |
| 7 | 4 | 3 | 11 | 12 |

## Часть 4

# Поиск решения игры в чистых стратегиях

# Равновесные стратегии

- Ситуация (пара стратегий) называется равновесной, если соответствующий ей элемент матрицы игры является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке.

# Пример 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 1 | 12 |
| 4 | 11 | 3 | 7 |
| 6 | 9 | 5 | 10 |
| 7 | 14 | 4 | 5 |
| 8 | 16 | 2 | 20 |

| |
|---|
| 1 |
| 3 |
| 5 |
| 4 |
| 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 16 | 5 | 20 |

$\max_i \min_j = M_{i,j} = M_{3,3} = 5$ **- Седловая точка**

# Самостоятельно

- Определить оптимальную стратегию преподавателя, определяемую седловой точкой в антагонистической игре двух лиц, заданной матрицей М (столбцы отвечают студентам, строки – стратегиям преподавателя):
- М =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 2 | 10 |
| 4 | 9 | 3 | 7 |
| 7 | 11 | 6 | 10 |
| 9 | 14 | 4 | 6 |
| 8 | 16 | 5 | 20 |

# Гарантирующие стратегии

- Гарантирующие стратегии применяются в играх с полной информацией, когда отсутствует седловая точка.
- Применительно к каждому игроку гарантирующей является стратегия, обеспечивающая ему лучшую цену игры из худших.

# Пример 3

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 2 | 10 |
| 4 | 9 | 3 | 7 |
| 7 | 11 | 10 | 6 |
| 9 | 14 | 4 | 6 |
| 8 | 16 | 5 | 20 |

| |
|---|
| 2 |
| 3 |
| 6 |
| 4 |
| 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 16 | 10 | 20 |

**Желтым цветом выделены гарантирующие стратегии игроков. Цена игры  при использовании гарантирующих стратегий равна семи**

# Самостоятельно

- **Формально определить гарантирующие стратегии игроков.**
- **Чем гарантирующие стратегии отличаются от равновесных?**
- **Определить гарантирующие стратегии игроков и цену игры, заданной матрицей М:**
- М =

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 2 | 10 | 6 |
| 4 | 9 | 3 | 7 | 5 |
| 7 | 11 | 10 | 6 | 8 |
| 9 | 14 | 4 | 6 | 12 |

- **Отбросить в М доминируемые стратегии.**

## Часть 5

# Поиск решения игры в смешанных стратегиях

# Смешанные стратегии

- **Игры с полной информацией, т.е. такие, в которых каждый игрок знает возможности и “наклонности” противника, реализуются, как в чистых, так и в смешанных стратегиях. В первом случае каждый игрок в ходе игры может придерживаться только одной, выбранной им стратегии, а во втором – нескольких стратегий, применительно к которым фиксируются лишь вероятности их выбора. <u>Цель многоходовой антагонистической матричной игры с полной информацией состоит в определении оптимальных вероятностей выбора стратегий каждым из игроков.</u>**

# Формальная постановка задачи поиска оптимальной смешанной стратегии

- Пусть  - вероятность выбора *i* –ой стратегии одним игроком, а  - вероятность выбора *j* –ой стратегии другим игроком. Цена игры *V(Г)* при фиксированных стратегиях  и  равна:

$$\begin{cases} V(\Gamma) = \sum_i \sum_j x_i y_j a_{i,j}; \\ \sum_i x_i = 1; \\ \sum_j y_j = 1; \\ \forall i, x_i \ge 0; \\ \forall j, y_j \ge 0. \end{cases}$$

# Теорема о минимаксе

- **Справедлива теорема о минимаксе, в некотором смысле аналогичная теореме о седловой точке для матричной игры в чистых стратегиях:**

$$\max_{x \in \overrightarrow{X}} \min_{y \in \overrightarrow{Y}} V(x, y) = \min_{y \in \overrightarrow{Y}} \max_{x \in \overrightarrow{X}} V(x, y)$$

# Метод Брауна-Робинсона

- **Идея метода заключается в том, что игра разыгрывается много раз, причем при каждом разыгрывании каждый игрок фиксирует эмпирические вероятности стратегий противника: если II игрок использовал $j$ –ю стратегию $q_i$ раз, то игрок I выбирает $i$ так, чтобы максимизировать $\sum_j a_{i,j} q_j$. Аналогично, если игрок I использовал $i$ –ую стратегию $p_i$ раз, то игрок II выбирает j так, чтобы минимизировать $\sum_i a_{i,j} p_i$.**
- **Доказано, что с ростом числа разыгрываний эмпирические распределения сходятся к оптимальным стратегиям.**

# Алгоритм Брауна-Робинсона

- **Шаг 1. Ввод матрицы игры «*a*» и точности Ɛ.**
- **Шаг 2.** $\forall i,\ \mathrm{x}_{\mathrm{i}} = 1.$
- **Шаг 3.** $\forall j,\ \mathrm{y}_{\mathrm{j}} = 1.$
- **Шаг 4. Определяется цена игры** $V_0 = \sum_i \sum_j \frac{x_i y_j a_{i,j}}{\sum_k x_k \sum_t y_t}$
- **Шаг 5. S= ∞.**
- **Шаг 6. Выбор такого *i*, для которого сумма D=** $\sum_j a_{i,j} y_j$ **максимальна (*i*=A).**
- **Шаг 7. Выбор такого j=B, для которого сумма C =**
- $\sum_i a_{i,j} x_i$ **минимальна.**

# Алгоритм Брауна-Робинсона (продолжение)

- Шаг 8. $x_a = x_a + 1$.
- Шаг 9. $y_в = y_в + 1$.
- Шаг 10. Вычисляется новая цена игры $V_1$ :

$$V_1 = \sum_i \sum_j \frac{x_i y_j a_{i,j}}{\sum_k x_k \sum_t y_t}.$$

- Шаг 11. Если $|V_1 - V_0| \le \varepsilon$, то перейти к шагу 14, в противном случае – к шагу 12.
- Шаг 12. $V_o = V_1$
- Шаг 13. Перейти к шагу 6.
- Шаг 14. Конец алгоритма, печать векторов X и У.

# Пример 3

- Решить игру, заданную матрицей $a$ точностью ε:
- $a =$

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 10 | 6 |
| 9 | 4 | 6 |
| 8 | 5 | 20 |

- $\varepsilon = 0{,}1.$

# Решение

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 10 | 6 |
| 9 | 4 | 6 |
| 8 | 5 | 20 |

- 1. $\forall 1 \le i \le 3,\ x_i = 1.$
- 2. $\forall 1 \le i \le 3,\ y_i = 1.$
- 3. $V_0 = 8{,}33(3)$ .

$$V_0 = \sum_i \sum_j \frac{x_i y_j a_{i,j}}{\sum_k x_k \sum_t y_t}$$

- 4. $D = 33,\ A = 3.$
- 5. $C = 19,\ B = 2.$
- 6. $x_3 = 2,\ x_1 = x_2 = 1.$
- 7. $y_2 = 2,\ y_1 = y_3 = 1.$

$$V_1 = \sum_i \sum_j \frac{x_i y_j a_{i,j}}{\sum_k x_k \sum_t y_t}$$

- 8. $V_1 = 8{,}25.$
- 9. Т. к. $|V_1 - V_0| \le \varepsilon$, алгоритм закончен. **Ответ:**

**$p_1 = p_2 = 0{,}25$; $p_3 = 0{,}5$; $q_1 = q_3 = 0{,}25$; $q_2 = 0{,}5$, $V = 8{,}25$.**

# Самостоятельно

- Определить достоинства и недостатки метода Брауна-Робинсона.
- Решить игру с матрицей $a$ и точностью Ɛ=0,1:
- $a =$

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 12 | 7 |
| 10 | 6 | 8 |
| 11 | 5 | 25 |