

Игровые аспекты принятия решений



ЛЕКЦИЯ 7

Содержание



- Текущий контроль
- Часть 1. Общие положения теории игр и их классификация.
- Часть 2. Примеры игр.
- Часть 3. Эквивалентные преобразования игр.
- Часть 4. Поиск решения игр в чистых стратегиях.
- Часть 5. Поиск решения игр в смешанных стратегиях (алгоритм Брауна-Робинсона).

Текущий контроль



- Прогнозировать результаты голосования с помощью дерева вариантов, если число голосов каждой коалиции определяется номером студента k .

1	2	3
$ 5-k $	$ 10-k $	$ 15-k $
A	B	C
B	C	B
C	A	A

Часть 1



Общие положения теории игр и их классификация

Основные компоненты любой игры



- конфликт;
- принятие решения;
- оптимальность решения.

Характеризующие игру элементы



- чередование либо одновременность ходов, которые могут быть, как логичными, так и случайными;
- возможная недостаточность информации;
- функция выигрыша, определяющая цену игры.

Классификация игр



- Матричные и позиционные;
- Антагонистические и неантагонистические;
- С полной и неполной информацией;
- Игры двух и более лиц;
- Игры с коалициями и без них;
- Игры в чистых и смешанных стратегиях;
- Игры с нулевой и произвольной суммой;
- Игры с седловой точкой и без нее;
- Конечные и бесконечные игры...

Часть 2



Примеры игр

Антагонистические и неантагонистические игры



- **Антагонистическая игра: матричная игра с полной информацией и нулевой суммой**
- **Неантагонистическая игра: первый игрок выбирает наилучшую для себя стратегию, второй – выбирает ее случайно.**
- **«Игра с болваном»: первый игрок выбирает наилучшую для себя стратегию, второй действует в интересах первого игрока.**

Теорема о предательстве



- Игрок вступивший в коалицию и нарушивший ее рискует проиграть все.

Дилемма заключенного



- Каждому из двух заключенных, обвиняемых в одном преступлении, предлагается на выбор три альтернативы:
- Признать вину – тогда он получит срок t лет, а другой заключенный выйдет на свободу.
- Не признавать вину, тогда ему грозит срок T лет.
- Обвинить в преступлении другого заключенного, тогда обвинивший будет выпущен на свободу, а другой заключенный получит срок T лет.

Матричные антагонистические игры двух лиц с нулевой суммой и полной информацией



- Игра определяется матрицей M , строки которой соответствуют стратегиям максимизирующего игрока, а столбцы – минимизирующего:

● $M =$

5	8	1	12
4	11	3	7
6	9	5	10
7	14	4	5
8	16	2	20

Часть 3



Эквивалентные преобразования игр

Доминирующая и доминируемая стратегии



- Стратегии i и j называются соответственно доминирующей и доминируемой, если каждый элемент i -ой стратегии “лучше” одноименного элемента j -ой стратегии. Это позволяет игнорировать доминируемые стратегии и, таким образом, облегчить поиск оптимальных стратегий игроков.

Пример 1



5	8	1	12
4	11	3	7
6	9	5	10
7	14	4	5
8	16	2	20

5	1	12
4	3	7
6	5	10
7	4	5
8	2	20

5	1
4	3
6	5
7	4
8	2

1
3
5
4
2

5

1) Первый столбец доминирующий, второй – доминируемый.

2) Второй столбец - доминирующий, третий – доминируемый.

3) Второй столбец – доминирующий, первый - доминируемый

4) Третья строка - доминирующая

5) Цена игры равна пяти.

Вопрос: влияет ли на цену игры изменение порядка отбрасывания доминируемых стратегий ?

Самостоятельно



- Отбросить доминируемые стратегии в игре, заданной матрицей M :

● $M =$

5	8	1	12	2
4	11	8	7	5
6	9	5	10	4
7	14	4	5	3
8	16	2	20	6
7	4	3	11	12

Часть 4



Поиск решения игры в чистых стратегиях

Равновесные стратегии



- Ситуация (пара стратегий) называется равновесной, если соответствующий ей элемент матрицы игры является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке.

Пример 2



5	8	1	12
4	11	3	7
6	9	5	10
7	14	4	5
8	16	2	20

1
3
5
4
2

8	16	5	20
---	----	---	----

$$\max_i \min_j = M_{i,j} = M_{3,3} = 5 \text{ - Седловая точка}$$

Самостоятельно



- Определить оптимальную стратегию преподавателя, определяемую седловой точкой в антагонистической игре двух лиц, заданной матрицей M (столбцы отвечают студентам, строки – стратегиям преподавателя):

● $M =$

5	8	2	10
4	9	3	7
7	11	6	10
9	14	4	6
8	16	5	20

Гарантирующие стратегии



- Гарантирующие стратегии применяются в играх с полной информацией, когда отсутствует седловая точка.
- Применительно к каждому игроку гарантирующей является стратегия, обеспечивающая ему лучшую цену игры из худших.

Пример 3



5	8	2	10
4	9	3	7
7	11	10	6
9	14	4	6
8	16	5	20

2
3
6
4
5

9	16	10	20
---	----	----	----

**Желтым цветом выделены
гарантирующие стратегии игроков.
Цена игры при использовании
гарантирующих стратегий равна семи**

Самостоятельно



- Формально определить гарантирующие стратегии игроков.
- Чем гарантирующие стратегии отличаются от равновесных?
- Определить гарантирующие стратегии игроков и цену игры, заданной матрицей M :

M :

5	8	2	10	6
4	9	3	7	5
7	11	10	6	8
9	14	4	6	12

● $M =$

- Отбросить в M доминируемые стратегии.

Часть 5



Поиск решения игры в смешанных стратегиях

Смешанные стратегии



- **Игры с полной информацией, т.е. такие, в которых каждый игрок знает возможности и “наклонности” противника, реализуются, как в чистых, так и в смешанных стратегиях. В первом случае каждый игрок в ходе игры может придерживаться только одной, выбранной им стратегии, а во втором – нескольких стратегий, применительно к которым фиксируются лишь вероятности их выбора. Цель многоходовой антагонистической матричной игры с полной информацией состоит в определении оптимальных вероятностей выбора стратегий каждым из игроков.**

Формальная постановка задачи поиска оптимальной смешанной стратегии



- Пусть x_i - вероятность выбора i -ой стратегии одним игроком, а y_j - вероятность выбора j -ой стратегии другим игроком. Цена игры $V(\Gamma)$ при фиксированных стратегиях и равна:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\Gamma) = \sum_i \sum_j x_i y_j a_{i,j}; \\ \sum_i x_i = 1; \\ \sum_j y_j = 1; \\ \forall i, x_i \geq 0; \\ \forall j, y_j \geq 0. \end{array} \right.$$

Теорема о минимаксе



- **Справедлива теорема о минимаксе, в некотором смысле аналогичная теореме о седловой точке для матричной игры в чистых стратегиях:**

$$\max_{x \in \vec{X}} \min_{y \in \vec{Y}} V(x, y) = \min_{y \in \vec{Y}} \max_{x \in \vec{X}} V(x, y)$$

Метод Брауна-Робинсона



- Идея метода заключается в том, что игра разыгрывается много раз, причем при каждом разыгрывании каждый игрок фиксирует эмпирические вероятности стратегий противника: если II игрок использовал j -ю стратегию q_j раз, то игрок I выбирает i так, чтобы максимизировать $\sum_j a_{i,j} q_j$. Аналогично, если игрок I использовал i -ую стратегию p_i раз, то игрок II выбирает j так, чтобы минимизировать $\sum_i a_{i,j} p_i$.
- Доказано, что с ростом числа разыгрываний эмпирические распределения сходятся к оптимальным стратегиям.

Алгоритм Брауна-Робинсона



- Шаг 1. Ввод матрицы игры « a » и точности ϵ .
- Шаг 2. $\forall i, x_i = 1$.
- Шаг 3. $\forall j, y_j = 1$.
- Шаг 4. Определяется цена игры $V_0 = \sum_i \sum_j \frac{x_i y_j a_{i,j}}{\sum_k x_k \sum_t y_t}$
- Шаг 5. $S = \infty$.
- Шаг 6. Выбор такого i , для которого сумма $D = \sum_j a_{i,j} y_j$ максимальна ($i=A$).
- Шаг 7. Выбор такого $j=B$, для которого сумма $C = \sum_i a_{i,j} x_i$ минимальна.

Алгоритм Брауна-Робинсона (продолжение)



● Шаг 8. $x_a = x_a + 1$.

● Шаг 9. $y_b = y_b + 1$.

● Шаг 10. Вычисляется новая цена игры V_1 :

$$V_1 = \frac{\sum_i x_i \sum_j y_j a_{i,j}}{\sum_k x_k \sum_t y_t}$$

● Шаг 11. Если $|V_1 - V_0| \leq \varepsilon$, то перейти к шагу 14, в противном случае – к шагу 12.

● Шаг 12. $V_0 = V_1$

● Шаг 13. Перейти к шагу 6.

● Шаг 14. Конец алгоритма, печать векторов X и Y .

Пример 3



- Решить игру, заданную матрицей a точностью ε :

● $a =$

7	10	6
9	4	6
8	5	20

- $\varepsilon = 0,1$.

Решение



● 1. $\forall 1 \leq i \leq 3, x_i = 1.$

● 2. $\forall 1 \leq i \leq 3, y_i = 1.$

● 3. $V_0 = 8,33(3).$

● 4. $D = 33, A = 3.$

● 5. $C = 19, B = 2.$

● 6. $x_3 = 2, x_1 = x_2 = 1.$

● 7. $y_2 = 2, y_1 = y_3 = 1.$

● 8. $V_1 = 8,25.$

● 9. Т. к. $|V_1 - V_0| \leq \varepsilon$, алгоритм закончен. **Ответ:**

$p_1 = p_2 = 0,25; p_3 = 0,5; q_1 = q_3 = 0,25; q_2 = 0,5, V = 8,25.$

$$V_0 = \sum_i \sum_j \frac{x_i y_j a_{i,j}}{\sum_k x_k \sum_t y_t}$$

$$V_1 = \sum_i \sum_j \frac{x_i y_j a_{i,j}}{\sum_k x_k \sum_t y_t}$$

7	10	6
9	4	6
8	5	20

Самостоятельно



- Определить достоинства и недостатки метода Брауна-Робинсона.
- Решить игру с матрицей a и точностью $\varepsilon=0,1$:

● $a =$

9	12	7
10	6	8
11	5	25