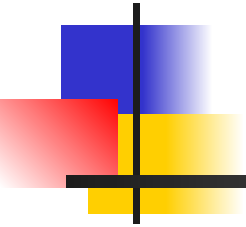
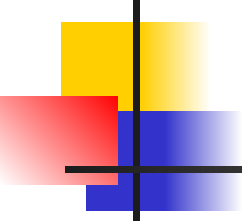
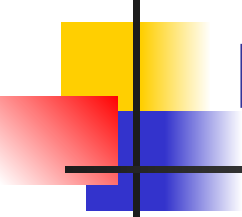


**Детерминированные игры с
полной информацией.
Выигрышная стратегия
в игре**

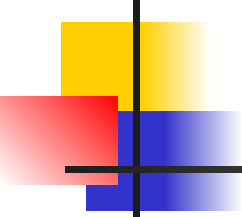


- 
-
- **Игра с полной информацией** — термин, обозначающий логическую игру, в которой для соперников отсутствует элемент неопределённости.



Игра является игрой с полной информацией, если

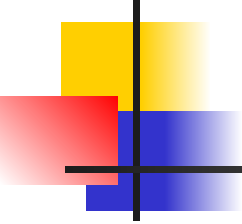
- игроки воздействуют на игровую ситуацию **дискретными действиями** — ходами, порядок ходов определён правилами и не зависит от таких параметров, как скорость реакции игроков (то есть очередной ход делает тот, кто должен его сделать по правилам, а не тот, кто первым догадался или успел его сделать);
- в любой момент игры все игроки имеют **полную информацию** о состоянии игры, то есть о позиции и всех возможных ходах любого из игроков.

- 
-
- Если ни в каких аспектах игры (правилах, возможности или очерёдности ходов, определении момента завершения игры или результата) не участвует элемент случайности, такая игра будет **детерминированной**.

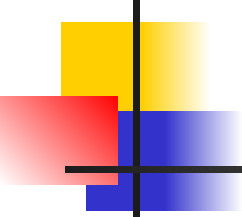


Стратегия

- **стратегия** игрока в игре — это полный план действий при всевозможных ситуациях, способных возникнуть. Стратегия определяет действие игрока в любой момент игры и для каждого возможного течения игры, способного привести к каждой ситуации.
- **Набор стратегий** — стратегии для каждого из игроков, которые полностью описывают все действия в игре. Набор стратегий обязан включать одну и только одну стратегию для каждого игрока.



- Для любой детерминированной игры с полной информацией, теоретически, можно просчитать все возможные ходы игроков и определить последовательность ходов (алгоритм), которая гарантированно приведёт по крайней мере одного из них к выигрышу или ничьей.

- 
-
- К играм с полной информацией относятся детерминированные **настольные игры** (например, шахматы, шашки, крестики-нолики и др.).
 - Для большинства из них алгоритм выигрыша или гарантированной ничьей неизвестен, хотя теоретически он существует. На практике вариантов слишком много, чтобы их можно было построить и проанализировать за приемлемое время.

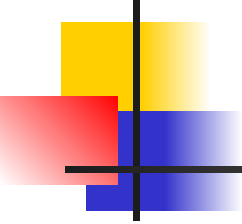


Крестики-нолики

- Правила игры

Игроки по очереди ставят на свободные клетки поля свои знаки (крестики и нолики соответственно). Первый, выстроивший в ряд 3 своих фигуры по вертикали, горизонтали или диагонали, выигрывает.

Первый ход делает игрок, ставящий крестики.

- 
-
- Общеизвестный алгоритм, который при правильной игре гарантирует **ничью любой стороне**, а при ошибке противника позволяет выиграть.
 - Данный алгоритм предполагает оптимальную игру противника.

■ За крестики

- Сделать первый ход в **центральное поле**.
- Противник может ответить ходом либо в угол, либо на сторону поля.
 - Если противник ответил **ходом в угловое поле** — сходить в ответ в соседний угол.
 - Противник будет вынужден пойти в противоположный угол, чтобы на следующем ходу не проиграть.
 - Дальнейшие ходы делаются так, чтобы заблокировать построение тройки противником. — **Ничья**.
 - Если противник ответил **ходом на сторону** — **он проиграл**. Следует ответить ходом в угол.
 - Противник будет вынужден пойти в противоположный угол, чтобы на следующем ходу не проиграть.
 - Сходить в угол, соседний с предыдущим, так, чтобы крестики образовали треугольник — получится «вилка», позволяющая следующим ходом построить тройку двумя способами.
 - Как бы ни ответил противник, следующим ходом строится одна из троек. — **Выигрыш**.

■ За крестики

Или:

- Сделать **первый ход в угол**.
- Противник может ответить либо ходом на сторону, либо ходом в угол, либо ходом в центр.
 - Если противник ответил **ходом на сторону**, он проиграл. Следует ответить ходом в центр, сводя к предыдущей стратегии. - **Выигрыш**.
 - Если противник ответил **ходом в угол**, он вновь проигрывает. Следует ответить ходом в любой из оставшихся углов.
 - Противник будет вынужден блокировать угрозу, следующим ходом нужно занять последний угол, что дает вилку. - **Выигрыш**.
 - Если противник ответил **ходом в центр**, то нужно занять угол противоположный первому углу. Противник может ответить либо ходом на сторону, либо ходом в угол.
 - Если противник ответил ходом в угол, он проиграл -- следует немедленно занять другой угол, блокируя тройку противника и образуя свою вилку. - **Выигрыш**.
 - Если противник ответил ходом на сторону, то следующие ходы строятся так, чтобы блокировать тройки соперника - **Ничья**.



За нолики.

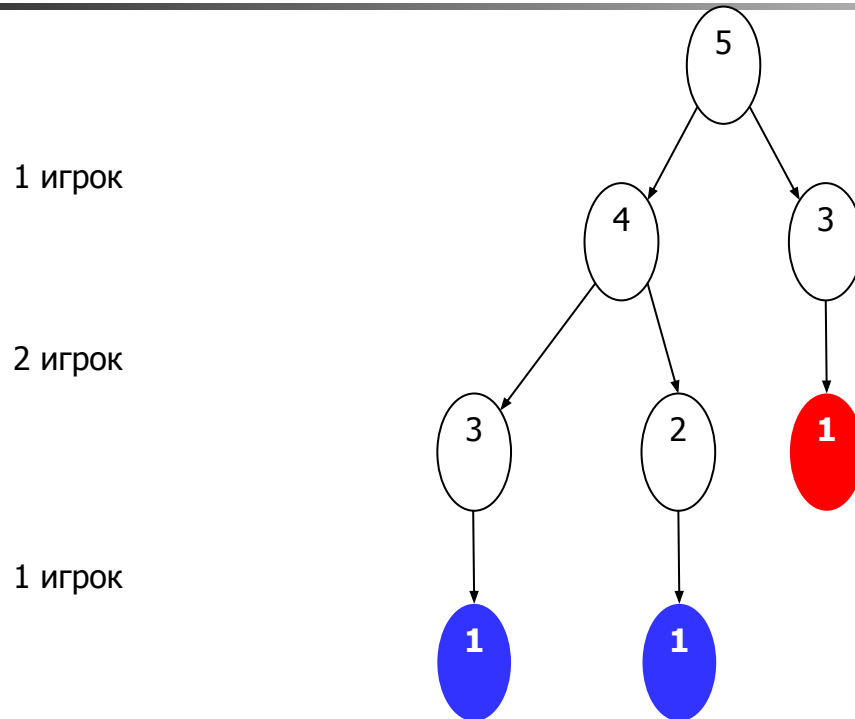
- Если противник сходил **первым ходом в центр**, ответить **ходом в любой из углов**, затем каждым следующим ходом блокировать возможность построения противником очередной тройки, при возможности выбора предпочитая ходы в углы. — **Ничья.**
- Если противник сходит первым ходом **не в центр**, ответить **ходом в центр**. Если ответным ходом противник займёт два противоположных угла, ответить ходом на сторону. Затем каждым следующим ходом блокировать возможность построения противником очередной тройки, при возможности выбора предпочитая ходы в углы. — **Ничья.**



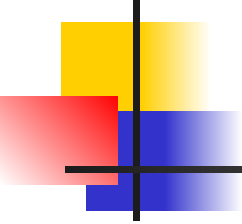
Игра «Спички»

- сначала в кучке лежит 5 спичек;
- два игрока убирают спички по очереди, причем за 1 ход можно убрать 1 или 2 спички;

Дерево игры



выигрывает тот, кто оставит в кучке 1 спичку

- 
-
- простроенная схема называется «деревом игры», она показывает все возможные варианты, начиная с некоторого начального положения
 - при правильной игре **выиграет первый игрок**, для этого ему достаточно первым ходом убрать всего одну спичку



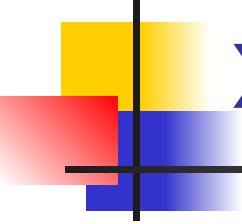
Задача 1

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2011 г. ИНФОРМАТИКА и ИКТ, 11 класс

19

C3

Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 3, а во второй 4 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то кучке или добавляет 4 камня в какую-то кучку. Игрок, после хода которого общее число камней в двух кучках становится больше 25, проигрывает. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков – игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.



Каким должен быть первый ход **выигравшего** игрока?

- Каждый хочет выиграть!
- Никто не ошибается!
- Выигрыш зависит только от начального положения и правил игры.
- Тот, кто получил 25 или больше камней в обеих кучках, **проигрывает**

«Поиск в глубины»

	I игрок	II игрок	I игрок	II игрок	I игрок
(3,4) 7	(7,4) 11	(14,4) 18	(14,8) 22	(14,12) 26*	
		(11,4) 15	(22,4) 26 ×		
			(15,4) 19	(15,8) 23	(30,8) 38 × (19,8) 27 × (15,16) 31 × (15,12) 27 ×
			(11,8) 19	(11,12) 23	(11,24) 35 × (22,12) 34 × (11,16) 27 × (15,12) 27 ×

при первом ходе I-ого игрока (7,4) выиграет II-й – у него есть ход (11,4), который приводит к выигрышу

	I игрок	II игрок	I игрок	II игрок	I игрок
			(24,4) 28 ✗		
(3,4) 7	(6,4) 10	(12,4) 16	(16,4) 20	(16,8) 24	(32,8) 40 ✗
			(12,8) 20		(20,8) 28 ✗
					(16,16) 32 ✗
			(16,12) 26 ✗		

- при первом ходе (6,4) также выигрывает II-й игрок, если пойдет (12,4)

	I игрок	II игрок	I игрок	II игрок	I игрок
(3,4) 7	(3,8) 11	(3,16) 19	(3,20) 23	(6,20)26*	
		(3,12) 15	(3,24) 27 ×		
			(3,16) 19	(6,16) 22	(6,32) 38 × (6,20) 26 × (12,16) 28 × (10,16) 26 ×
			(6,12) 18	(12,12) 24	(12,24) 36 × (12,16) 28 × (24,12) 36 × (16,12) 28 ×
			(7,12) 19	(11,12) 23	(11,24) 35 × (11,16) 27 × (22,12) 34 × (15,12) 27 ×

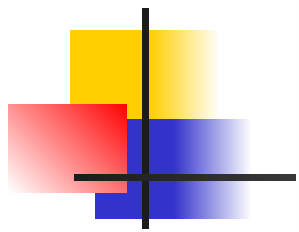
- при первом ходе (3,8) также выигрывает II-й игрок, если пойдет (3,12)



Выигрышная стратегия

- Выигрывает II-й игрок;
- своим первым ходом ему нужно свести игру к позиции $(11,4)$, $(12,4)$ или $(3,12)$,
- а вторым ходом – к одной из позиций $(15,8)$, $(16,8)$, $(11,12)$, $(12,12)$ или $(6,16)$.

Для выигрывающего игрока достаточно указать только один выигрышный ход, а для проигравшего нужно рассмотреть все ходы на каждом шаге!



	I игрок	II игрок	I игрок	II игрок	I игрок
(3,4) 7	(3,8) 11	<u>(3,12)</u> 15	(3,24) 27 ×		
			(3,16) 19	<u>(6,16)</u> 22	(6,32) 38 × (6,20) 26 × (12,16) 28 × (10,16) 26 ×
			(6,12) 18	<u>(12,12)</u> 24	(12,24) 36 × (12,16) 28 × (24,12) 36 × (16,12) 28 ×
			(7,12) 19	<u>(11,12)</u> 23	(11,24) 35 × (11,16) 27 × (22,12) 34 × (15,12) 27 ×
	(7,4) 11	<u>(11,4)</u> 15	(22,4) 26 ×		
			(15,4) 19	<u>(15,8)</u> 23	(30,8) 38 × (19,8) 27 × (15,16) 31 × (15,12) 27 ×
			(11,8) 19	<u>(11,12)</u> 23	(11,24) 35 × (22,12) 34 × (11,16) 27 × (15,12) 27 ×
	(6,4) 10	<u>(12,4)</u> 16	(24,4) 28 ×		
			(16,4) 19	<u>(16,8)</u> 24	(32,8) 40 × (20,8) 28 × (16,16) 32 × (16,12) 28 ×
			(12,8) 19	<u>(12,12)</u> 24	(12,24) 36 × (12,16) 28 ×

Выигрывает второй игрок.

Для доказательства рассмотрим неполное дерево игры, оформленное в виде таблицы, где в каждой ячейке записаны пары чисел, разделенные запятой. Эти числа соответствуют количеству камней на каждом этапе игры в первой и второй кучках соответственно.

	1 ход	2 ход	3 ход	4 ход	
Стартовая позиция	I-й игрок (все варианты хода)	II-й игрок (выигрышный ход)	I-й игрок (все варианты хода кроме непосредственно проигрышных)	II-й игрок (выигрышные ходы, экзаменуемому достаточно указать один из вариантов)	Пояснение
3, 4	6, 4	<u>12, 4</u>	12, 8	<u>16, 8</u> <u>12, 12</u>	Любой следующий ход первого игрока является непосредственно проигрышным
			16, 4	<u>20, 4</u> <u>16, 8</u>	
	3, 8	<u>3, 12</u>	6, 12	<u>10, 12</u> <u>6, 16</u> <u>12, 12</u>	
			3, 16	<u>7, 16</u> <u>3, 20</u> <u>6, 16</u>	
			7, 12	<u>11, 12</u> <u>7, 16</u>	
	7, 4	<u>11, 4</u>	15, 4	<u>19, 4</u> <u>15, 8</u>	
			11, 8	<u>15, 8</u> <u>11, 12</u>	

Таблица содержит *все возможные* варианты ходов первого игрока. Из нее видно, что при любом ходе первого игрока у второго имеется ход, приводящий к победе.

Указания по оцениванию	Баллы
Правильное указание выигрывающего игрока и его ходов со строгим доказательством правильности (с помощью или без помощи дерева игры).	3
Наличие в представленном решении одного из пунктов: 1. Правильное указание выигрывающего игрока, стратегии игры, приводящей к победе, при отсутствии доказательства ее правильности. 2. Правильно указан выигрывающий игрок, приведено дерево игры, но отсутствует обоснование правильности выигрывающей стратегии. 3. Правильно указан выигрыш второго игрока, рассмотрены все варианты хода первого игрока, для каждого из них правильно указан выигрывающий ответ второго игрока. Однако анализ игры не доведен до конца и отсутствует обоснование стратегии.	2
Наличие в представленном решении одного из пунктов: 1. Правильно указаны все варианты хода первого игрока и возможные ответы второго игрока (в том числе и все выигрышные), но неверно определены дальнейшие действия и неправильно указан победитель. 2. Правильно указан выигрыш второго игрока, но описание выигрышной стратегии неполно и для некоторых (больше одного, но не для всех) вариантов хода первого игрока правильно указан выигрывающий ответ второго игрока.	1
Задание не выполнено, или в представленном решении полностью отсутствует описание элементов выигрышной стратегии и отсутствует анализ вариантов первого-второго ходов играющих (даже при наличии правильного указания выигрывающего игрока).	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Задача 2.

- Два игрока играют в следующую игру. На координатной плоскости стоит фишка. Игроки ходят по очереди. В начале игры фишка находится в точке с координатами **(5,2)**. Ход состоит в том, что игрок перемещает фишку из точки с координатами **(x,y)** в **одну из трех точек**: или в точку с координатами **(x+3,y)**, или в точку с координатами **(x,y+3)**, или в точку с координатами **(x,y+4)**. Выигрывает игрок, после хода которого расстояние по прямой от фишки до точки с координатами **(0,0)** не меньше 13 единиц. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков – игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

- из каждой ситуации в этой игре возможно **три продолжения**

- по теореме Пифагора расстояние L от точки с координатами (x, y) до начала координат – это $L = \sqrt{x^2 + y^2}$ или

$$L^2 \geq 13^2 = 169$$

- в начальный момент $L^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29$
условие не выполнено

	I игрок	II игрок	I игрок	II игрок
(5,2) 29	(8,2) 68	(11,2) 125	(14,2) 200	
		(8,5) 89	(11,5) 146	(14,5) 221
			(8,8) 128	(11,8) 185
			(8,9) 145	(11,9) 202
		(8,6) 100	(11,6) 157	(14,6) 232
			(8,9) 145	
	(8,10) 164		(11,10) 221	
	(5,5) 50	(8,5) 89		
		(5,8) 89	(5,12) 169	
		(5,9) 106	(5,12) 169	
	(5,6) 61	(8,6) 100		
		(5,9) 106		
		(5,10) 125	(5,13) 196	

Для выигрывающего игрока достаточно указать только один выигрышный ход, а для проигравшего нужно рассмотреть все ходы на каждом шаге!

	1-й ход	2-й ход	3-й ход	4-й ход
стартовая позиция	I-й игрок (все варианты хода)	II-ой игрок, выигрышный ход	I-й игрок (все варианты хода)	II-ой игрок, выигрышный ход
(5,2) 29	(8,2) 68	<u>(8,5)</u> 89	(11,5) 146	<u>(14,5)</u> 221
			(8,8) 128	<u>(11,8)</u> 185
			(8,9) 145	<u>(11,9)</u> 202
	(5,5) 50	<u>(8,5)</u> 89	(11,5) 146	<u>(14,5)</u> 221
			(8,8) 128	<u>(11,8)</u> 185
			(8,9) 145	<u>(11,9)</u> 202
	(5,6) 61	<u>(8,6)</u> 100	(11,6) 157	<u>(14,6)</u> 232
			(8,9) 145	<u>(11,9)</u> 202
			(8,10) 164	<u>(11,10)</u> 221

Выигрывает игрок, который делает второй ход. Таблица содержит все варианты хода первого игрока. Из нее видно, что при любом ходе первого игрока у второго есть ход, приводящий к победе