

Исполнитель Калькулятор

Алгоритмы

Алгоритм – это четко определенный план действий для исполнителя.

Свойства алгоритма

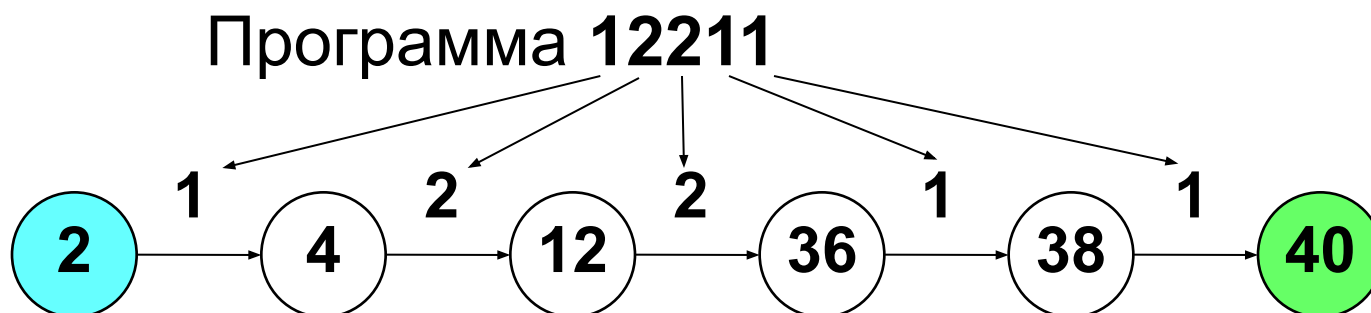
- **дискретность**: состоит из отдельных шагов (команд)
- **понятность**: должен включать только команды, известные исполнителю (входящие в СКИ)
- **определенность**: при одинаковых исходных данных всегда выдает один и тот же результат
- **конечность**: заканчивается за конечное число шагов
- **массовость**: может применяться многократно при различных исходных данных
- **корректность**: дает верное решение при любых допустимых исходных данных

Система команд

Исполнитель Калькулятор работает с одним числом и умеет выполнять с ним две операции (команды):

1. прибавь 2
2. умножь на 3

Программа – это последовательность номеров команд, которые нужно выполнить.



начальное
число

результат

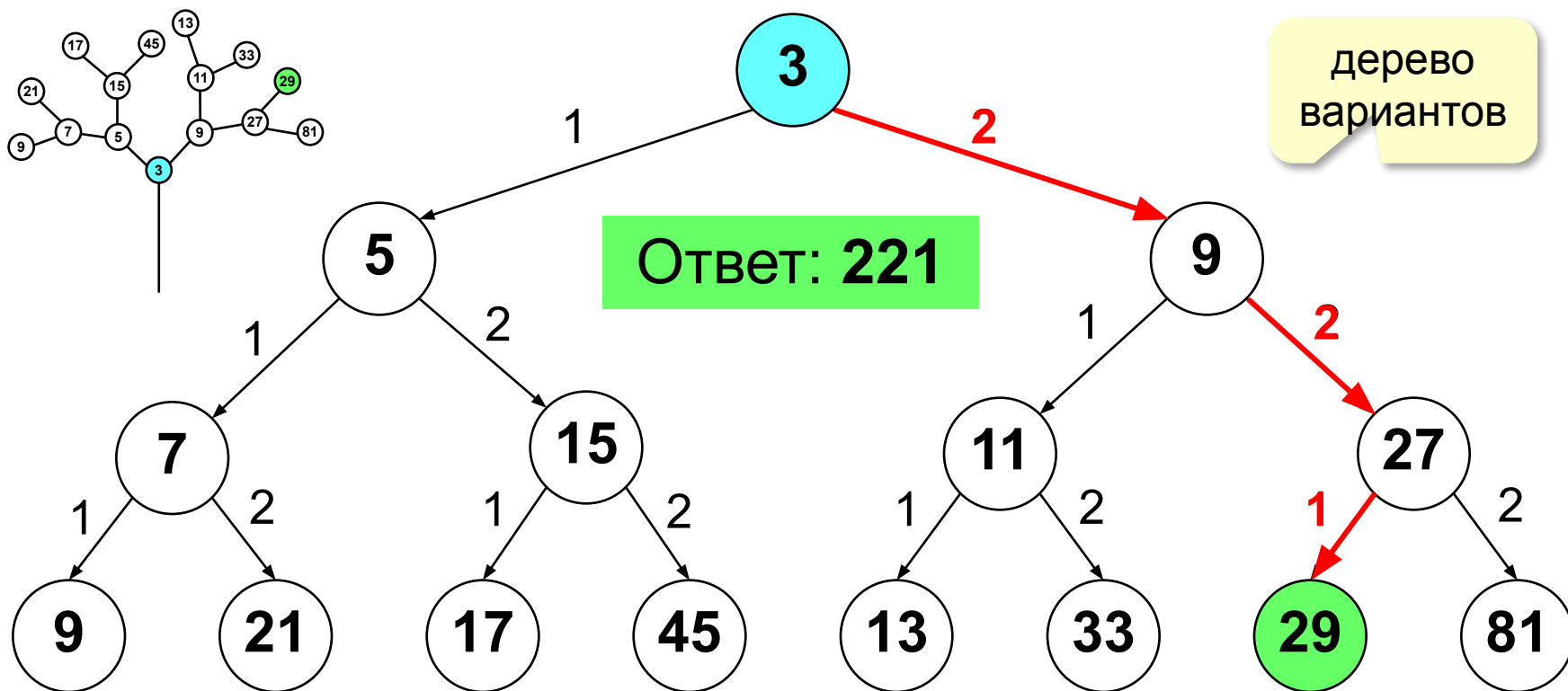
Обратная задача (составление программы)

Используя команды:

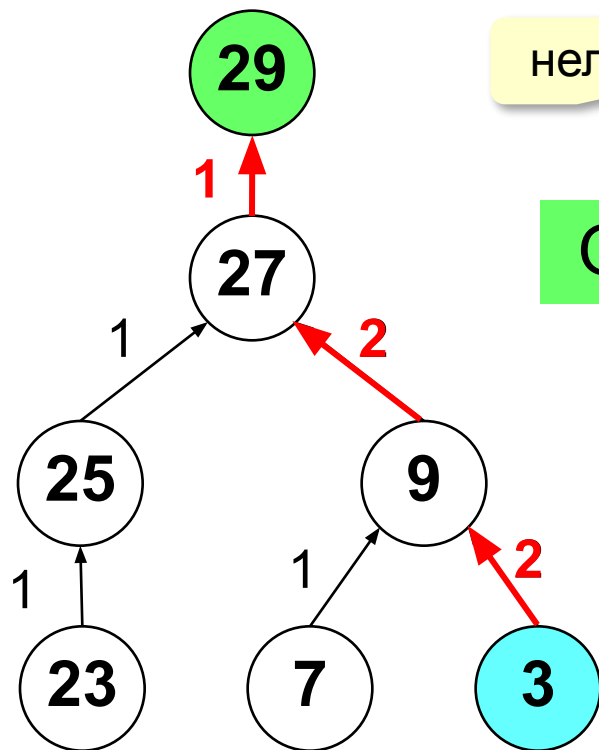
1. прибавь 2

2. умножь на 3

написать программу, которая из 3 получает 29.

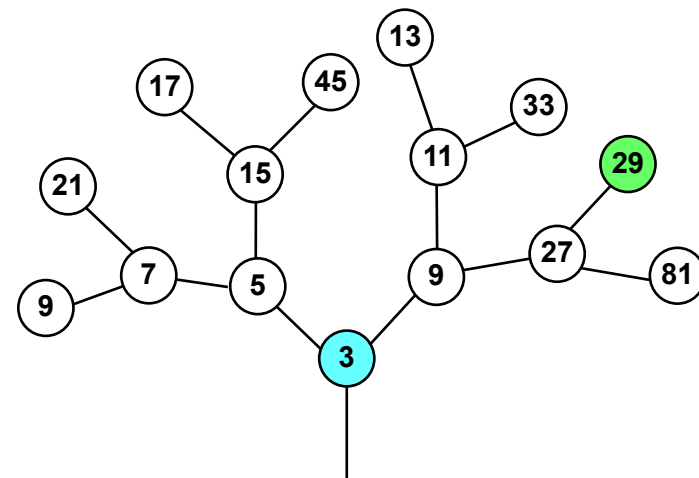


Обратная задача (решение «с конца»)



нельзя делить на 3!

Ответ: 221



Почему решение «с конца» короче?



Решение «с конца» короче, если в списке команд есть **необратимая операция** (каждое целое число можно умножить на 3, но не каждое делится на 3)!

Ещё пример

Используя команды:

1. прибавь 2

2. умножь на 3

написать программу, которая из 2 получает 15.



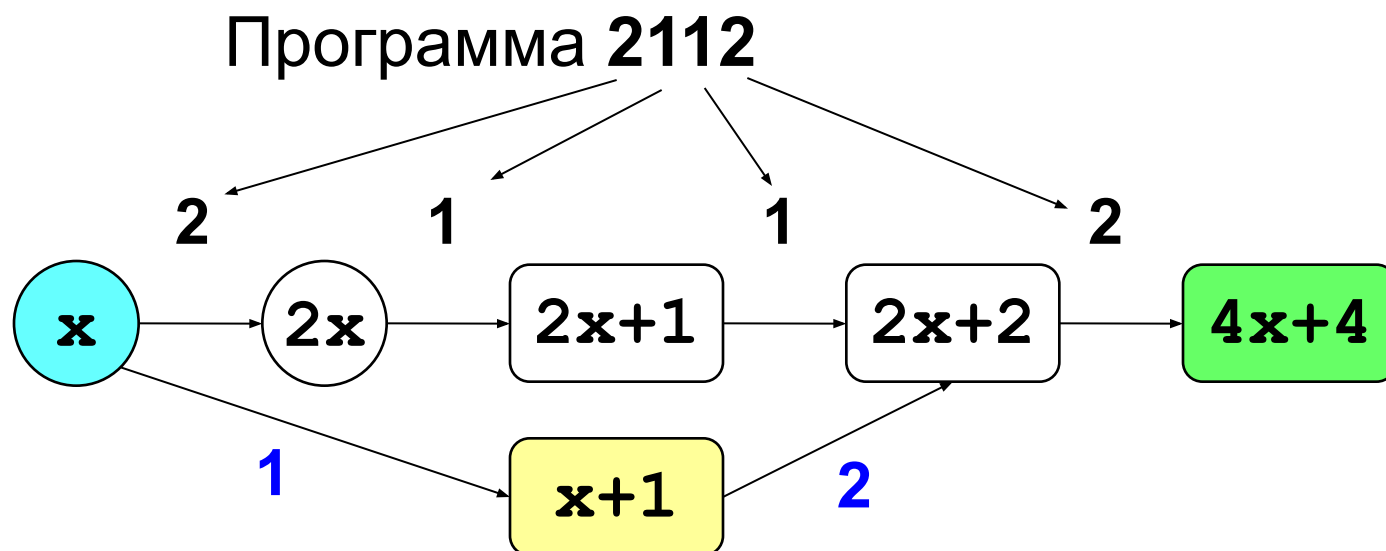
Не все задачи этого типа решаемы. Разрешимость зависит от системы команд и начального числа.

Удвоитель

У исполнителя есть команды:

1. прибавь 1
2. умножь на 2

Дана программа: 2112. Как можно сделать то же самое за 3 шага?



Удвоитель

У исполнителя есть команды:

1. прибавь 1

2. умножь на 2

Задания:

1) Какие числа можно получить из 0?

2) Как из числа 5 получить 105?

3) Какие числа можно получить из отрицательного числа N ?

4) Как построить самую короткую программу для получения заданного X из 0?

5) Найдите минимальное число, которое может быть получено из 0 только за 6 шагов.

Удвоитель

У исполнителя есть команды:

1. прибавь 1

2. умножь на 2

Докажите, что:

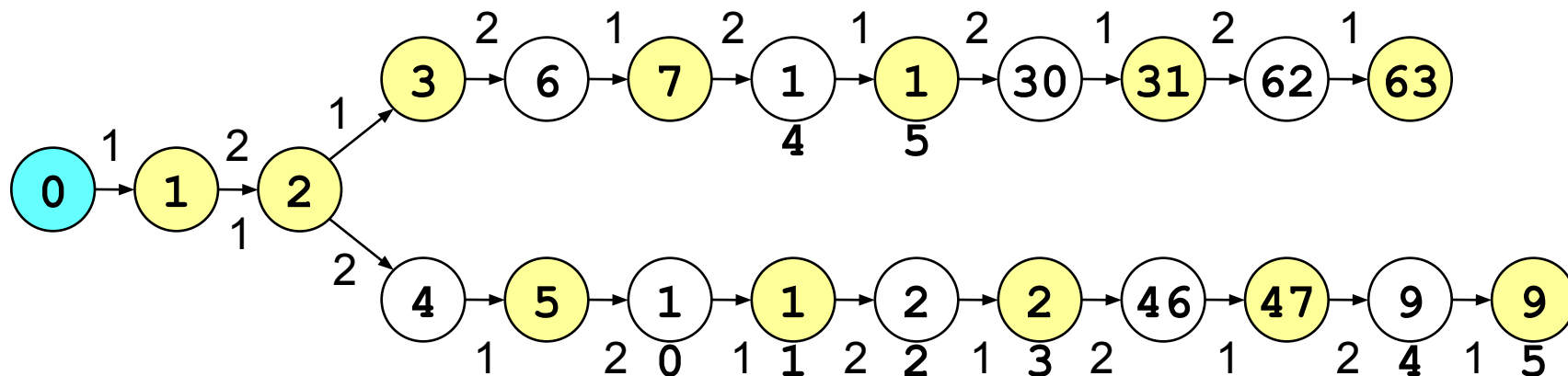
1) любое число, меньше 10, можно получить из 0 за 5 шагов

2) любое число, меньше 100, можно получить из 0 за 12 шагов

Длина оптимальной программы

Минимальное число, для которого *оптимальная* программа содержит ровно N команд:

- первая команда – 1 ($0 \rightarrow 1$)
- программа оканчивается на 1 (**прибавь 1**)
- при «обратном ходе» команды 1 и 2 чередуются



Раздвоитель

У исполнителя есть команды:

1. **вычти 1**
2. **раздели на 2**

Задания:

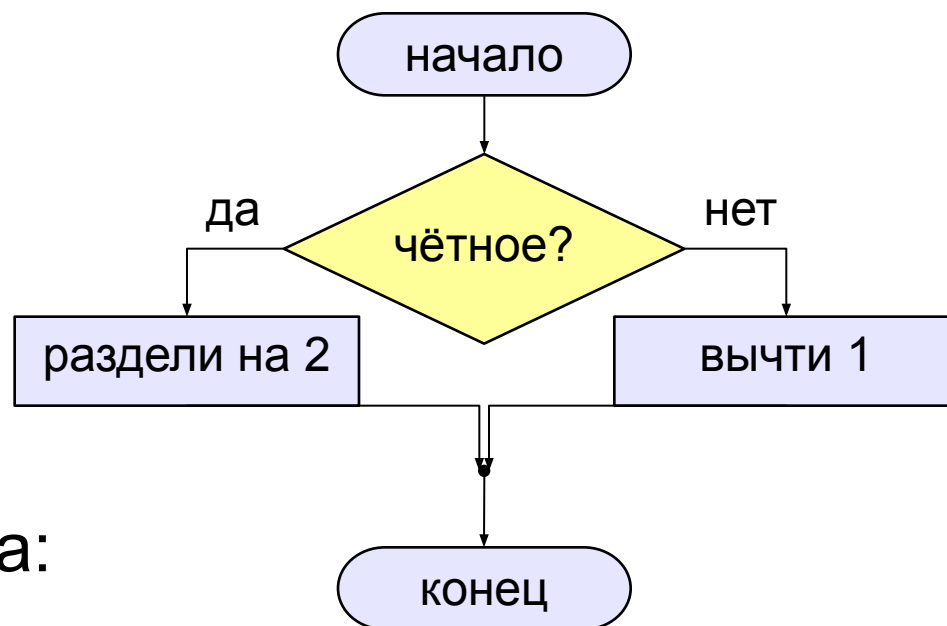
- 1) Какие числа можно получить из положительного числа N ?
- 2) Какие числа можно получить из отрицательного числа N ?
- 3) Как быстрее всего получить 0 из положительного числа N ?

Раздвоитель (ветвление)

Алгоритм:

если четное
то **раздели на 2**
иначе **вычти 1**
все

Блок-схема:



Что получится для числа:

35 → 34

44 → 22

77 → 76

88 → 44

Раздвоитель (циклы)

Цикл – это повторение одинаковых действий.

Алгоритм :

начало цикла

тело цикла

нц 5 раз

если четное

то **раздели на 2**

иначе **вычти 1**

всё

кц

конец цикла

Что получится:

10 → 0

20 → 1

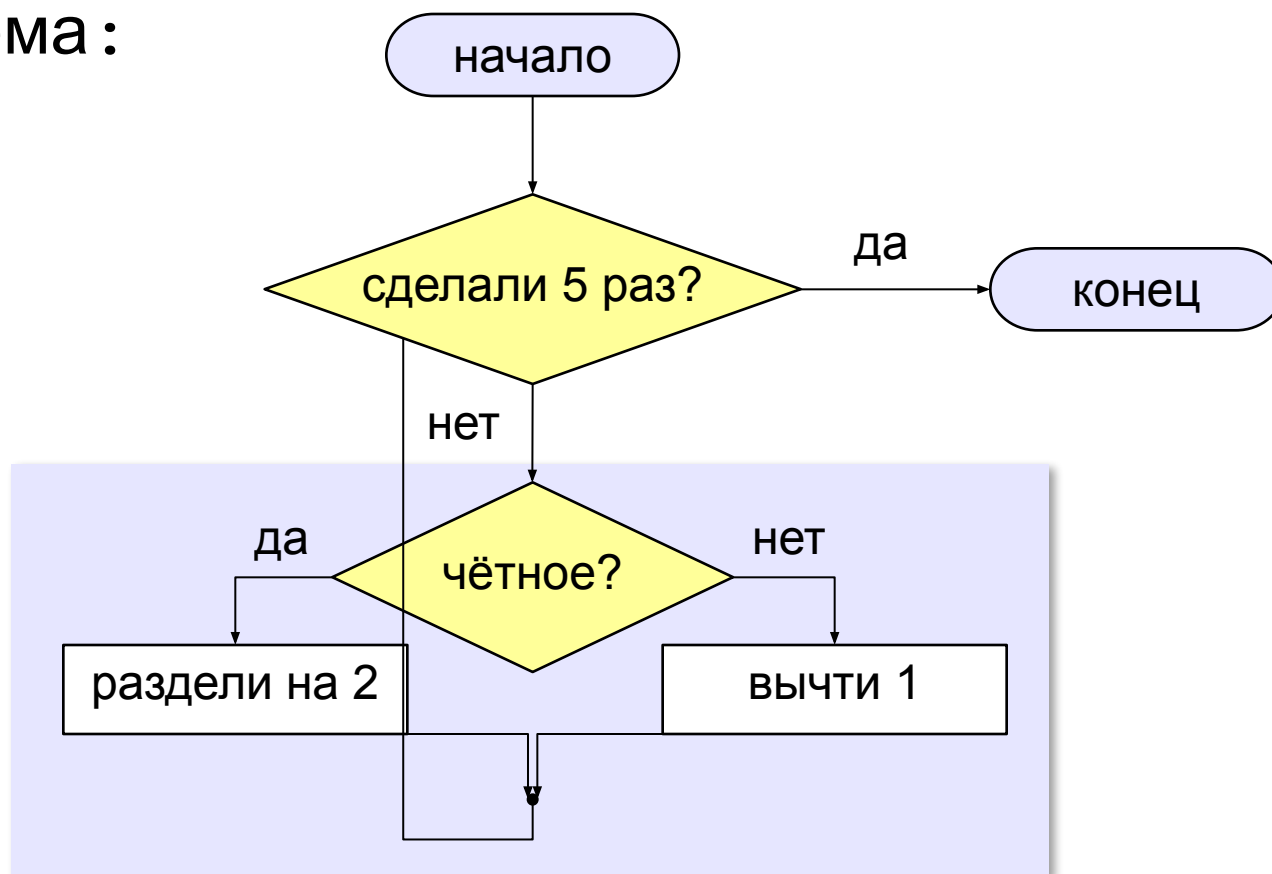
30 → 3

50 → 3

60 → 6

Раздвоитель (циклы)

Блок-схема :



тело цикла

Раздвоитель (циклы)

Алгоритм:

```
нц пока положительное
  если четное
    то раздели на 2
    иначе вычти 1
  всё
кц
```



Задание: нарисуйте блок-схему.

Сколько шагов цикла выполнится для числа

15 → 7

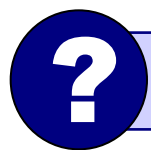
16 → 5

128 → 8

Раздвоитель (циклы)

Алгоритм получения 0 из положительного числа :

```
нц пока положительное  
  нц пока четное  
    раздели на 2  
  кц  
  вычти 1  
кц
```



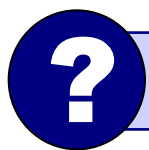
Всегда ли работает?

Задание: нарисуйте блок-схему.

Раздвоитель (циклы)

Алгоритм получения 0 из положительного числа :

```
нц пока положительное  
  вычти 1  
нц пока четное  
  раздели на 2  
кц  
кц
```



Всегда ли работает?

Задание: нарисуйте блок-схему.

Раздвоитель (циклы)

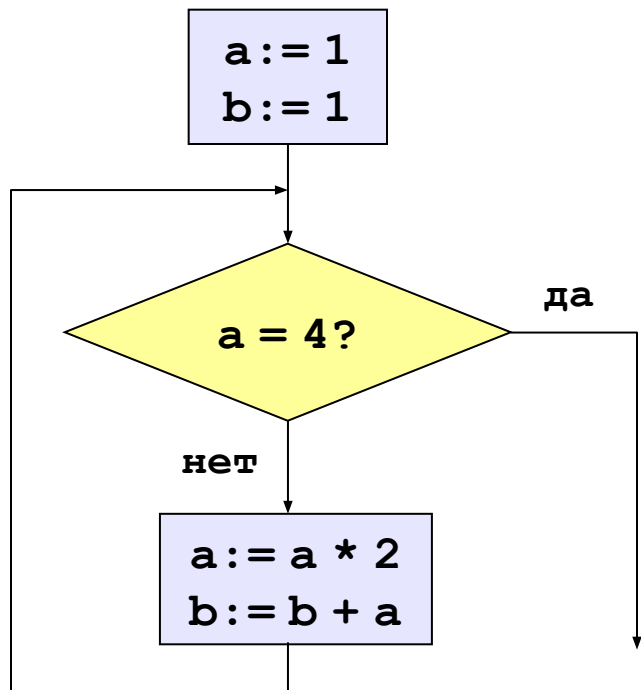
Алгоритм получения 0 из положительного числа :

```
нц пока положительное  
  если нечетное  
    то вычти 1  
  всё  
нц пока четное  
  раздели на 2  
кц  
кц
```

 Всегда ли работает?

Задание: нарисуйте блок-схему.

Анализ блок-схем



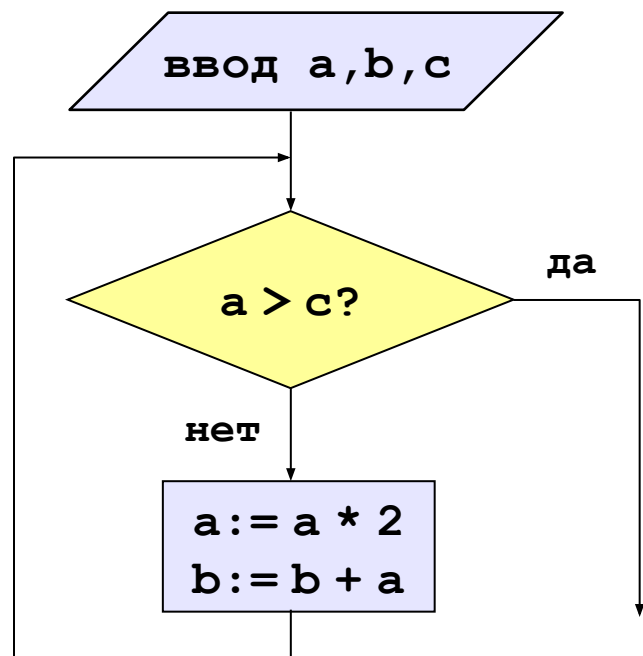
	a	b
	○	
		○



Что будет при $a = 3$?
 $a = 4$? $a = 5$?

Анализ блок-схем

Напишите программу, в которой a , b и c вводятся с клавиатуры. Заполните таблицу:



Исходные данные			Результат	
a	b	c	a	b
2	3	4		
5	12	100		
3	25	999		
111	222	9999		
111	222	111		
100	12	5		

вывод $a, b \rightarrow 85$

вывод $a, " ", b \rightarrow 8 5$

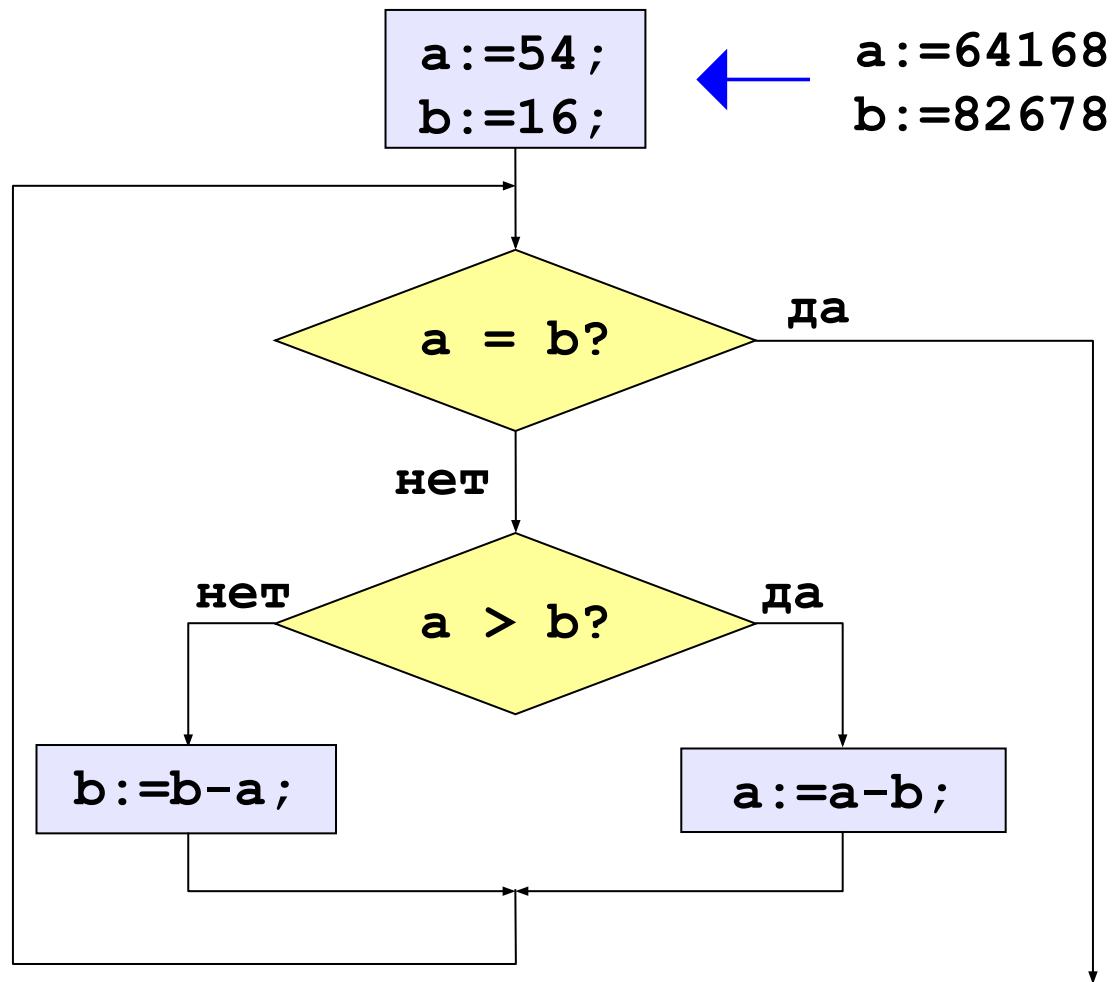
вывод $"a=", a, "b=", b$

$\rightarrow a=8 b=5$



Как вывести результат?

Анализ блок-схем



Напишите программу, в которой a и b вводятся с клавиатуры. Что она вычисляет?

Алгоритм Евклида

Надо: вычислить наибольший общий делитель (НОД) чисел a и b .

Заменяем большее из двух чисел **разностью** большего и меньшего до тех пор, пока они не станут равны. Это и есть НОД.

$$\begin{aligned}\text{НОД}(a, b) &= \text{НОД}(a-b, b) \\ &= \text{НОД}(a, b-a)\end{aligned}$$



Евклид
(365-300 до. н. э.)

Пример:

$$\begin{aligned}\text{НОД}(14, 21) &= \text{НОД}(14, 21-14) = \text{НОД}(14, 7) \\ &= \text{НОД}(7, 7) = 7\end{aligned}$$

⊖ много шагов при большой разнице чисел:

$$\text{НОД}(1998, 2) = \text{НОД}(1996, 2) = \dots = 2$$

Модифицированный алгоритм Евклида

Заменяем большее из двух чисел **остатком от деления** большего на меньшее до тех пор, пока меньшее не станет равно нулю. Тогда большее — это НОД.

$$\begin{aligned}\text{НОД}(a, b) &= \text{НОД}(\text{mod}(a, b), b) \\ &= \text{НОД}(a, \text{mod}(b, a))\end{aligned}$$

Пример:

$$\text{НОД}(14, 21) = \text{НОД}(14, 7) = \text{НОД}(0, 7) = 7$$

Алгоритм Евклида

Составить программу для вычисления НОД с помощью алгоритма Евклида и заполнить таблицу:

a	64168	358853	6365133	17905514	549868978
b	82678	691042	11494962	23108855	298294835
НОД (a , b)					

«5»: Подсчитать число шагов алгоритма.

a	64168	358853	6365133	17905514	549868978
b	82678	691042	11494962	23108855	298294835
НОД (a , b)					
шагов					

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич

д.т.н., учитель информатики высшей категории,
ГООУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург

kpolyakov@mail.ru

Использованы материалы Д. Кириенко, школа № 179, г. Москва