

КОДИРОВАНИЕ ЧИСЕЛ В ЭВМ

Прямой код. Возможны два варианта изображения знаков чисел

двоичными цифрами:

«+» обозначать «0», а «-» обозначать «1»;

«+» обозначать «1», а «-» обозначать «0».

Оба варианта равноценны.

На практике в основном используется первый вариант.

При таком решении все положительные числа имеют вид: $0, \dots$, а отрицательные: $1, \dots$. В данном случае знаковая цифра (код знака) помещается слева от запятой на место разряда с весом 2^0 . Если знак и цифровую часть числа рассматривать как единое целое, то изображение положительных чисел не изменяется и определяется интервалом $0 \leq x < 1$, а все отрицательные числа изображаются положительными числами $[x]_{пк}$, расположенными в интервале $1 \leq [x]_{пк} < 2$. Рассмотренную связь между числом x и его изображением в прямом коде — $[x]_{пк}$ можно представить в виде:

$$[x]_{пк} = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ 1 + x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Прямой код

ZH	2^{n-1}	2^{n-2}	\dots	2^0
------	-----------	-----------	---------	-------

$$X_{\text{пк}} = ZHX \cdot |X|$$

Примеры: $+5_{10} = 0.101_2 \text{пк}$

$$-5_{10} = 1.101_2 \text{пк}$$

Методика выполнения алгебраического сложения, рациональная для применения в ЭВМ, должна удовлетворять следующим условиям:

- обработка знаковых и цифровых разрядов суммируемых чисел X и Y должна производиться по одинаковым правилам с получением при этом правильного знака суммы;
- должна исключаться операция прямого вычитания, и вместо неё алгебраическое суммирование чисел разных знаков должно выполняться как сложение специальных кодов суммируемых чисел;
- должно определяться переполнение, соответствующее $|X + Y| \geq 1$ при условии, что абсолютное значение X и Y меньше единицы.

Всем указанным условиям удовлетворяет методика алгебраического сложения **дополнительных и обратных кодов исходных чисел.**

Обратный код. В этом коде связь между числом x и его изображением в обратном коде — $[x]_{ок}$ определяется равенством:

$$[x]_{ок} = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ 2 + x - 2^{-n}, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$

При $x \leq 0$: $2 + x - 2^{-n} = 2 - |x| - 2^{-n}$.

$$\begin{array}{r} \underline{10.00\dots00} \quad 2 \\ \underline{00.00\dots01} \quad 2^{-n} \\ 1.11\dots11 \quad 2 - 2^{-n} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \quad 2 - 2^{-n} \\ \underline{0.\overset{\bar{x}_1}{x_1}\overset{\bar{x}_2}{x_2}\dots\overset{\bar{x}_{n-1}}{x_{n-1}}\overset{\bar{x}_n}{x_n}} \quad |x| \\ 2 - |x| - 2^{-n} \end{array}$$

Таким образом, для отрицательного числа получение обратного кода заключается в присвоении знаковому разряду кода 1 и замене 0 на 1, а 1 на 0 (выполняется \bar{x}_i) в цифровой части числа.

При обратном преобразовании (от обратного кода к прямому) от обратного кода берется обратный код.

Методика алгебраического суммирования в обратном коде при представлении исходных чисел и суммы в прямом коде

Возможные комбинации, которые могут встретиться при операции сложения.

1). $X > 0$ и $Y > 0$, а $X + Y < 1$. В данном случае обращение к обратному коду не приводит к специфике выполнения операции, так как $[X > 0]_o + [Y > 0]_o = X + Y$.

2). $X > 0$, $Y < 0$ и $X + Y > 0$.

$[X]_{ок} + [Y]_{ок} = X + 2 + Y - 2^{-n}$ – предварительный результат.

Т.к. $X + Y > 0$, то действительный результат равен $X + Y$. Для того чтобы от предварительного результата перейти к действительному, необходима коррекция: вычесть 2 и прибавить 2^{-n} к предварительному результату, т.е. в предварительном результате исключается 1 в разряде с весом 2^1 , что равноценно вычитанию 2, и эту же единицу направляем в младший разряд предварительного результата, что равноценно прибавлению 2^{-n} .

3) $X > 0$, $Y < 0$ и $X + Y < 0$.

$[X]_0 + [Y]_0 = X + (2 + Y - 2^{-n})$. Этот результат соответствует правильному, так как согласно условию

$$X + Y < 0 \text{ и } [X + Y < 0]_0 = 2 + (X + Y) - 2^{-n}.$$

4) $X < 0$, $Y < 0$ и $|X + Y| < 1$.

$[X]_{\text{ок}} + [Y]_{\text{ок}} = (2 + X - 2^{-n}) + (2 + Y - 2^{-n})$ - предварительный результат.

Правильный результат $[(X + Y) < 0]_{\text{ок}} = 2 + X + Y - 2^{-n}$.

Это определяет необходимость выполнения коррекции предварительного результата, которая аналогична рассмотренной в случае 2, т.е. вычесть 2 и прибавить 2^{-n} к предварительному результату.

При суммировании в обратном коде чисел разных знаков возможно получение $X + Y = 0$. Здесь методика суммирования обратных кодов исходных чисел не изменяется, а результат получается в виде $1,1 \dots 1$.

Например,

$$\begin{aligned} [X]_{\text{пк}} &= 0,1011 & [X]_{\text{ок}} &= 0,1011 \\ [Y]_{\text{пк}} &= 1,1011 & [Y]_{\text{ок}} &= 1,0100 \\ & & [X + Y]_0 &= 1,1111 \end{aligned}$$

Получили обратный код отрицательного нуля $[-0,0 \dots 0]_0 = 1,1 \dots 1$. Такой результат согласуется с формулой, где указано, что $X = 0$ может иметь двойное изображение: код положительного нуля и код отрицательного нуля.

Дополнительный код. Здесь связь между числом X и его изображением в дополнительном коде $[X]_{\text{дк}}$ определяется равенством:

$$[x]_{\text{дк}} = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ 2 + x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Получение дополнительного кода **отрицательного числа** осуществляется в соответствии с равенством:

$$[-0, x_1 \dots x_{nk}]_{\text{дк}} = [1, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n]_{\text{дк}} + 2^{-n} = [-0, x_1 \dots x_{nk}]_{\text{ок}} + 2^{-n}$$

Обратное преобразование **отрицательного числа** (от дополнительного к прямому) выполняется следующим образом:

$$[-0, x_1 \dots x_n]_{\text{дк}} = 1, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n + 2^{-n} = [1, \bar{\bar{x}}_1 \dots \bar{\bar{x}}_n]_{\text{дк}} = 1, \bar{\bar{x}}_1 \dots \bar{\bar{x}}_n + 2^{-n} = 1, x_1 \dots x_n$$

Например $[-0, 1101]_{\text{д}} = 1, 0011]_{\text{д}} = 1, 1101$, т. е. от дополнительного кода берется дополнительный код.

Методика алгебраического суммирования в дополнительном коде при представлении исходных чисел и суммы в прямом коде.

Рассмотрим четыре случая:

1) $X > 0$, $F > 0$, а $X + Y < 1$. Как и при обратном коде, суммирование дополнительных кодов не вносит каких-либо изменений в операцию сложения.

2) $X > 0$, $Y < 0$ и $X + Y > 0$.

$[X]_{\text{дк}} + [Y]_{\text{дк}} = X + 2 + Y$ – предварительный результат.

Правильный результат при $X + Y > 0$ равен $X + Y$.

Выполняется коррекция, равная вычитанию 2 из предварительного результата (исключение в нем 1 с весом 2^1).

Методика выполнения операции не изменяется, когда $[X]_{\text{дк}} + [Y]_{\text{дк}} = 0$.

Например,

$$[X]_{\text{пк}} = 0,1100 \quad [X]_{\text{дк}} = +0,1100$$

$$[Y]_{\text{пк}} = 1,1100 \quad [Y]_{\text{дк}} = \underline{1,0100}$$

$$0,0000$$

3) $X > 0$, $Y < 0$ и $X + Y < 0$.

Здесь

$$[X]_{\text{дк}} + [Y]_{\text{дк}} = X + (2 + Y) = 2 + (X + Y)$$

дает правильный результат без коррекции.

4). $X < 0$, $Y < 0$ и $|X + Y| < 1$.

$$[X]_{\text{дк}} + [Y]_{\text{дк}} = (2 + X) + (2 + Y) = 2 + 2 + X + Y,$$

получаем результат, который отличается от правильного

$$[(X + Y) < 0]_{\text{др}} = 2 + (X + Y) \text{ на } 2.$$

Необходима и здесь коррекция, рассмотренная в случае 2, т.е. вычитание 2 из предварительного результата (исключение в нем 1 с весом 2^1).

Достоинства операций суммирования чисел в обратном и дополнительном кодах:

- обработка знаковых и цифровых разрядов чисел - осуществляется по одинаковым правилам, и при этом автоматически получается правильный знак результата;
- исключена операция прямого вычитания

Недостаток — невозможно фиксировать переполнение.

Модифицированные дополнительный и обратный коды и их использование в операции алгебраического суммирования

В модифицированных кодах кодирование знака осуществляется 2-мя разрядами:

«+» кодируется как «00»

«-» кодируется как «11».

При этом изображение числа X в этих кодах определяется равенствами:

$$[X]_{\text{МДК}} = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ 4 + x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$$[X]_{\text{МОК}} = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ 4 + x - 2^{-n}, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$

Эта избыточность, сохраняя все качества обычных дополнительного и обратного кодов, дополняет их способностью фиксировать переполнение.

Знаковые разряды результата «01» определяют положительное переполнение в операциях алгебраического суммирования, а «10» - отрицательное.

При этом основная методика выполнения операций алгебраического суммирования в обратном и дополнительном кодах не меняется:

- при алгебраическом суммировании в модифицированном обратном коде «1», выходящая за пределы знаковых разрядов, должна быть добавлена в младший разряд предварительного результата,
- при алгебраическом суммировании в модифицированном дополнительном коде «1», выходящая за пределы знаковых разрядов, отбрасывается.