Кодирование числовой информации.

Системы счисления.

Представление чисел в компьютере.

Системы счисления, применяемые для представления числовых данных в ЭВМ

Под системой счисления понимается способ представления любого числа посредством некоторого алфавита символов, называемых цифрами.

Как известно, системы счисления (СС) бывают позиционные и непозиционные.

В позиционной системе счисления в зависимости от положения (разряда) в котором находится число оно имеет разное значение. Например: 123 (“1”- сотни,”2”- десятки,”3”-единицы)

В непозиционных системах счисления число не меняет своего значения в зависимости от позиции. Например: XXV, XVI, VII(V везде значит – 5)

? Числовые данные обрабатываются в компьютере в двоичной системе счисления. Числа хранятся в оперативной памяти в виде последовательностей нулей и единиц, т.е. в двоичном коде.

Системы счисления, применяемые для представления числовых данных в ЭВМ

В позиционной системе счисления числа записываются в виде последовательности цифр:

$$\mathbf{A = a_{m-1}\ a_{m-2} \ldots a_1\ a_0,\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3} \ldots a_{-n}.} \qquad (1)$$

Записанную выше последовательность цифр (1), соответствующую числу А, можно представить в виде полинома (2) от основания q:

$$\mathbf{A=a_{m-1}+q^{m-1}+a_{m-2}*q^{m-2}+\ldots+a_1*q^1+a_0*q^0+a_{-1}*q^{-1}+a_{-2}*q^{-2}+\ldots+a_{-n}*q^{-n}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Основание системы счисления определяет ее название, например,

q = 10 – десятичная система счисления, а q = 2 – двоичная.

В ЭВМ применяют позиционные системы счисления с недесятичным основанием: двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную.

Системы счисления, применяемые для представления числовых данных в ЭВМ

Принятые обозначения:

двоичная СС - $(A)_2$,
десятичная СС - $(A)_{10}$,
восьмеричная СС - $(A)_8$,
шестнадцатеричная СС - $(A)_{16}$.

Позиционные системы счисления

Основание системы равно количеству цифр (знаков) в ее алфавите

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двоичная	2	0, 1
Восьмеричная	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Шестнадцатеричная	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Позиция цифры в числе называется разрядом

Соответствие систем счисления

Десятичная	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Двоичная	**0**	**1**	**10**	**11**	**100**	**101**	**110**	**111**
Восьмеричная	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Шестнадцатеричная	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Десятичная	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Двоичная	**1000**	**1001**	**1010**	**1011**	**1100**	**1101**	**1110**	**1111**	**10000**
Восьмеричная	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**20**
Шестнадцатеричная	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**10**

Системы счисления, применяемые для представления числовых данных в ЭВМ

В двоичной системе счисления любое число в соответствии с (1) и (2) может быть представлено последовательностью двоичных цифр (3) или суммой степеней числа 2, взятых с указанными в ней коэффициентами (4).

$$X = a_{m-1}\ a_{m-2} \ldots\ a_1\ a_0,\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3} \ldots, \qquad (3)$$

где $a_i = \{0,1\}$;

$$X = a_{m-1}*2^{m-1}+\ldots+a_1*2^1+a_0*2^0+a_{-1}*2^{-1}+a_{-2}*2^{-2}+\ldots+a_{-n}*2^{-n} \qquad (4)$$

Например, двоичное число 1010,001 будет представлено следующим образом:

$$(1110,\underset{8}{0}01)_2=1*2^3+1*2^2+1*2^1+0*2^0+0*2^{-1}+0*2^{-2}+1*2^{-3}$$

Системы счисления, применяемые для представления числовых данных в ЭВМ

В восьмеричной системе счисления используется восемь цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7. Любое число в восьмеричной системе может быть представлено последовательностью цифр или суммой степеней числа 8.

$$(A)_8 = (157{,}34)_8 = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^{-1} + 4 \cdot 8^{-2}$$

.

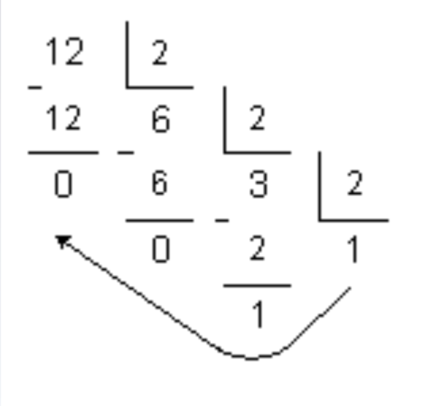
В шестнадцатеричной системе счисления для изображения чисел употребляются 16 цифр от 0 до 15. При этом, чтобы одну цифру не изображать двумя знаками, введены обозначения для цифр, больших девяти, латинскими буквами: десять – A, одиннадцать – B, двенадцать – C, тринадцать - D, четырнадцать – E, пятнадцать – F.

$$(A)_{16} = (2AF)_{16} = 2 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0$$

Перевод целых чисел

Для перевода целого числа A, представленного в системе счисления с основанием q, в систему счисления с основанием S необходимо данное число и получаемые частные последовательно делить на новое основание системы счисления до тех пор, пока последнее частное не будет меньше S. Число A в системе счисления с основанием S представится в виде упорядоченной последовательности остатков деления, причем старшую цифру дает последнее частное.

$(12)_{10} = (1100)_2$



Перевод дробных чисел

Перевод дробных чисел заключается в последовательном умножении дроби на основание новой системы счисления, причем перемножению подвергаются только дробные части результата. Дробь в новой системе счисления представляется в виде упорядоченной последовательности целых частей произведений, где старший разряд является первой цифрой произведения.

$$(0{,}325)_{10} = (0{,}0101)_2$$

$$\begin{array}{r} 0{,}325 \\ 2 \\ \hline 0{,}650 \\ 2 \\ \hline 1{,}300 \\ 2 \\ \hline 0{,}600 \\ 2 \\ \hline 1{,}200 \end{array}$$

ПЕРЕВОД $(A)_8 \longrightarrow (A)_2$

Для перевода восьмеричного числа в двоичное достаточно каждую цифру числа заменить трехразрядным двоичным числом.

При этом отбрасывают нули, стоящие слева от старшей значащей цифры и справа от младшей значащей цифры двоичного кода.

$$\underbrace{1}_{001}\ \underbrace{7}_{111}\ \underbrace{5}_{101},\ \underbrace{6}_{110};\ (175{,}6)_8 = (1111101{,}11)_2$$

$$1\cdot 8^2 + 7\cdot 8^1 + 5\cdot 8^0 + 6\cdot 8^{-1} = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2}$$

$(175{,}6)_8 = (125{,}75)_{10}$, $(1111101{,}11)_2 = (125{,}75)_{10}$

ПЕРЕВОД $(A)_{16} \rightarrow (A)_2$

Для перевода шестнадцатеричного числа в двоичное достаточно заменить каждую цифру числа четырехразрядным двоичным кодом.

$$\underbrace{2}_{0010}\ \underbrace{C}_{1100}\ \underbrace{F}_{1111},\ \underbrace{5}_{0101}$$

$(2CF,5)_{16} = (1011001111,0101)_2$

ПЕРЕВОД $(A)_2 \longrightarrow (A)_8$ и $(A)_2 \longrightarrow (A)_{16}$

- перевод двоичного числа 110101,01 в восьмеричное:

$$\underbrace{110}_{6}\ \underbrace{101}_{5}\ ,\ \underbrace{010}_{2} = (65,2)_2$$

- перевод двоичного числа 111000110,101 в шестнадцатеричное

$$\underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1100}_{C}\ \underbrace{0110}_{6}\ ,\ \underbrace{1010}_{A} = (1C6,A)_{16}$$

Представление двоичных чисел в форме с фиксированной запятой

При представлении чисел с фиксированной запятой положение запятой (точки) фиксировано относительно разрядов числа и сохраняется неизменным для всех чисел.

Запятая отделяет целую часть числа от дробной.

Если дробная часть отсутствует, то число – целое.

Для кодирования знака используется знаковый разряд («0» для положительных чисел и «1» – для отрицательных).

Представление чисел в формате с фиксированной запятой

Целые числа в компьютере хранятся в памяти в формате *с фиксированной запятой*. В этом случае каждому разряду ячейки памяти соответствует всегда один и тот же разряд числа, а запятая находится справа после младшего разряда, т.е. вне разрядной сетки.

1	0	1	0	1	0	1	0

Для хранения *целых неотрицательных чисел* отводится одна ячейка памяти (8 бит). Например, число $A_2 = 10101010_2$ будет хранится в ячейке памяти следующим образом:

Максимальное значение целого неотрицательного числа достигается в случае, когда во всех ячейках хранятся единицы. Для n-разрядного представления оно будет равно:

$2^n - 1$

Для хранения *целых чисел со знаком* отводится две ячейки памяти (16 бит), причем старший (левый) разряд отводится под знак числа (если число положительное, то в знаковый разряд записывается 0, если число отрицательное записывается 1).

Представление в компьютере положительных чисел с использованием формата «знак-величина» называется *прямым кодом* числа. Например, число $2002_{10} = 11111010010_2$ будет представлено в 16-ти разрядном представлении следующим образом:

0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0

Для получения дополнительного кода отрицательного числа можно использовать довольно простой алгоритм:

1. Модуль числа записать *прямым кодом* в *n* двоичных разрядах;
2. Получить *обратный код* числа, для этого значения всех бит инвертировать (все единицы заменить на нули и все нули заменить на единицы);
3. К полученному *обратному коду* прибавить единицу.

Пример. Записать дополнительный код отрицательного числа –2002 для 16-ти разрядного компьютерного представления с использованием алгоритма.

Прямой код	$\lvert -2002_{10} \rvert$	0000011111010010_2
Обратный код	инвертирование	1111100000101101_2
	прибавление единицы	1111100000101101_2 $^{+}0000000000000001_2$
Дополнительный код		1111100000101110_2

Представление двоичных чисел в форме с фиксированной запятой

Если для представления числа со знаком выделено n разрядов, то диапазон представления целых двоичных чисел в этом случае определяется выражением

$$1 \le \left| X^{ц}_{ф.з.} \right| \le 2^{n-1} - 1.$$

Диапазон представления в ЭВМ дробных двоичных чисел будет определяться неравенством

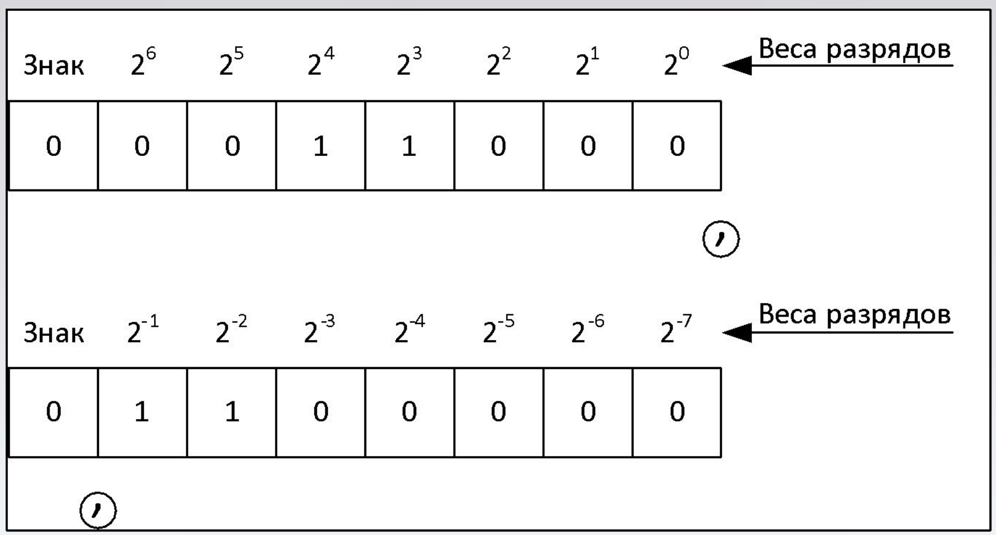
$$2^{-(n-1)} \le \left| X^{пр.}_{ф.з.} \right| \le 1 - 2^{-(n-1)}$$

или приближенно

$$0 \le \left| X_{ф.з.} \right| < 1.$$

Представление двоичных чисел в форме с фиксированной запятой

Разрядная сетка ЭВМ в формате 8-разрядного машинного слова для представления соответственно целого двоичного числа (= +11000) и дробного числа (= +0,11) в форме с фиксированной запятой:



Представление двоичных чисел в форме с фиксированной запятой

Пусть задано число $(X)_2 = -100010$.

- Целое число $(X)_2$ в формате (n=7 со знаком):

Знак	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	0	0	0	1	0

- Целое число $(X)_2$ в формате (n=8 со знаком):

Знак	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	0	0	0	1	0

- Дробное число $(X)_2$ в формате (n=8 со знаком):

Знак	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
1	1	0	0	0	1	0	0

Представление двоичных чисел в форме с плавающей запятой

Вещественные числа (конечные и бесконечные десятичные дроби) хранятся и обрабатываются в компьютере в формате *с плавающей запятой*. В этом случае положение запятой в записи числа может изменяться.

Формат чисел *с плавающей запятой* базируется на экспоненциальной форме записи, в которой может быть представлено любой число. Так число А может быть представлено в виде:

$$A = m \times q^n$$

где m – мантисса числа

q – основание системы счисления,

n – порядок числа.

Для однозначности представления чисел *с плавающей запятой* используется нормализованная форма, при которой мантисса отвечает условию:

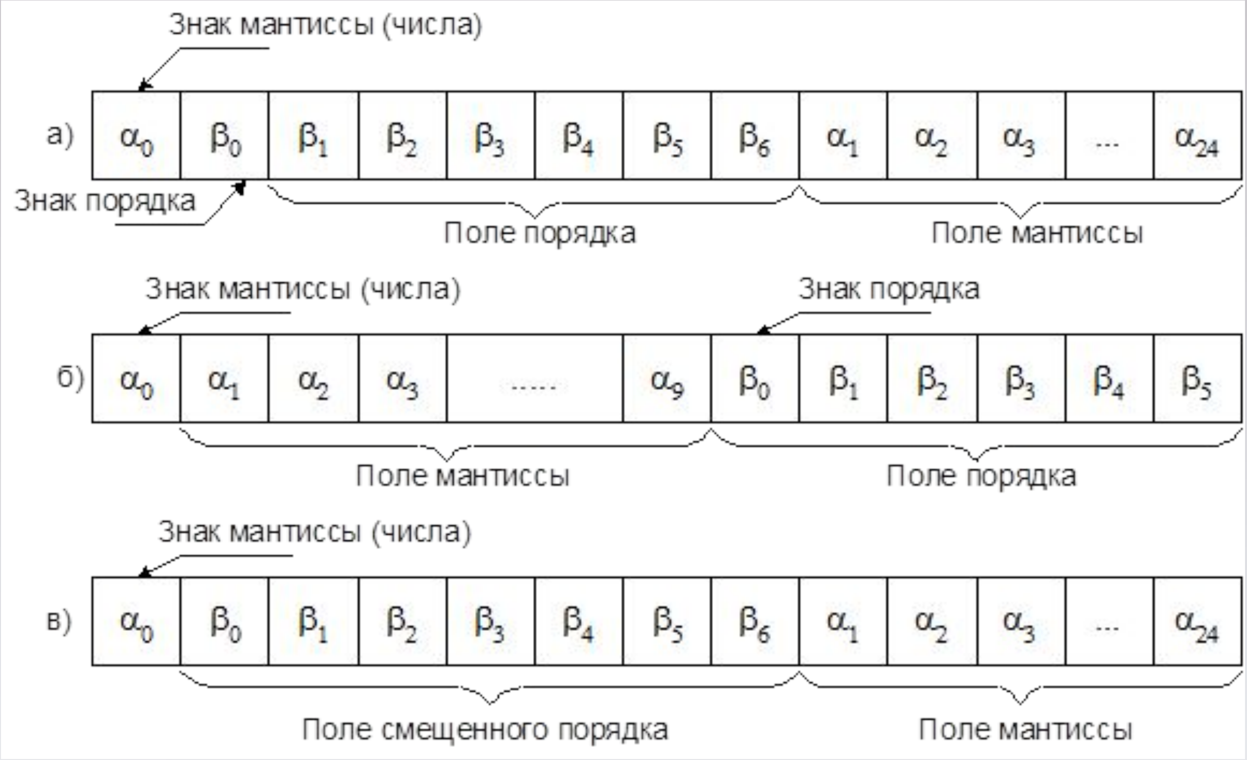
$$1/n \le |m| < 1.$$

Это означает, что мантисса должна быть правильной дробью и иметь после запятой цифру, отличную от нуля.

Представление двоичных чисел в форме с плавающей запятой

Запятая при представлении мантиссы фиксируется перед старшим значащим разрядом. Порядок P указывает положение запятой в числе, может быть положительным или отрицательным целым числом или целым числом без знака (запятая при представлении порядка фиксируется после младшего разряда). Порядок P и мантисса m_n представляются в системе счисления с основанием q.

Форматы представления в ЭВМ чисел с плавающей запятой



Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Прямой код чисел соответствует обычной записи чисел со своим знаком:

$$A_1 = +0{,}0101, \quad [A_1]_{пр} = 00101;$$
$$A_2 = -\,0{,}0101, \quad [A_2]_{пр} = 10101.$$

Для целых чисел в двоичной системе счисления:

$$A_1 = +\,1100, \quad [A_1]_{пр} = 01100;$$
$$A_2 = -\,1100, \quad [A_2]_{пр} = 11100.$$

Нуль в прямом коде имеет два изображения:

$$+\,0 = 000\ldots00 = [0]_{пр},$$
$$-\,0 = 100\ldots00 = [0]_{пр}$$

Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Обратный код. Чтобы представить двоичное отрицательное число в обратном коде, нужно поставить в знаковый разряд единицу, а все остальные разряды инвертировать:

$A = -0{,}1010.$ $[A]_{обр} = 10101.$

Примеры обратного кода отрицательных дробного и целого чисел:

$A^{др}$=-0,11001;

$[A^{др}]_{пр} = 111001;$

$[A^{др}]_{обр}=100110;$

$A^{ц} = -10101;$

$[A^{ц}]_{пр} = 110101;$

$[A^{ц}]_{обр}= 101010;$

Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Дополнительный код. Для представления отрицательного числа в дополнительном коде нужно поставить единицу в знаковом разряде, затем найти крайнюю правую единицу и заменить на противоположные разряды слева (до знака). Остальное не менять.

Примеры:

$$[A]^{\text{др}}_{\text{пр}} = 1110010; \quad [A]^{\text{др}}_{\text{доп}} = 1001110,$$

$$[A]^{\text{ц}}_{\text{пр}} = 1001110; \quad [A]^{\text{ц}}_{\text{доп}} = 1110010,$$

$$[A]^{ц}_{пр} = 1001001; \quad [A]^{ц}_{доп} = 1110111.$$

Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Правило перевода отрицательных чисел из обратного кода в дополнительный:

дополнительный код отрицательного числа может быть получен из обратного путем прибавления к нему единицы младшего разряда.

Примеры:

$[A]_{пр} = 1.01010;$ $[A]_{пр} = 1.11101;$

$[A]_{обр} = 110101;$ $[A]_{обр} = 100010;$

$[A]_{доп} = 110110,$ $[A]_{доп} = 100011.$

Отрицательный нуль изображается:

- в обратном коде $[-0]_{обр} = 1.11111\ldots11;$

- в дополнительном коде отрицательный нуль отсутствует, т.е. код нуля в дополнительном коде соответствует коду нуля положительного числа.

Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Положительные числа в прямом, обратном и дополнительных кодах имеют одинаковую форму записи!!!

Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Модифицированный код. При выполнении арифметических операций в ЭВМ иногда возникает необходимость для представления знака числа использовать не один, а два знаковых разряда. Модифицированный код отличается от обычного двумя разрядами для знака. Примеры:

$$[A_1]_{\text{пр.}} = 1\,01001,\quad [A_1]_{\text{пр. мод.}} = 11\,01001,$$
$$[A_1]_{\text{обр.}} = 1\,10110,\quad [A_1]_{\text{обр. мод.}} = 11\,10110,$$
$$[A_3]_{\text{доп.}} = 1\,10111,\quad [A_3]_{\text{доп. мод.}} = 11\,10111.$$