Кодирование числовой информации.

Системы счисления.

Представление чисел в компьютере.

Системы счисления, применяемые для представления числовых данных в ЭВМ

Под **системой счисления** понимается способ представления любого числа посредством некоторого алфавита символов, называемых цифрами.

Как известно, системы счисления (СС) бывают позиционные и непозиционные.

В позиционной системе счисления в зависимости от положения (разряда) в котором находится число оно имеет разное значение. Например: 123 (“1”- сотни,”2”- десятки,”3”-единицы)

В непозиционных системах счисления число не меняет своего значения в зависимости от позиции. Например: XXV, XVI, VII(V везде значит – 5)

Системы счисления, применяемые для представления числовых данных в ЭВМ

В позиционной системе счисления числа записываются в виде последовательности цифр:

$$A = a_{m-1}\ a_{m-2} \ldots a_1\ a_0,\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3} \ldots a_{-n}. \qquad (1)$$

Записанную выше последовательность цифр (1), соответствующую числу А, можно представить в виде полинома (2) от **основания q**:

$$A = a_{m-1} * q^{m-1} + a_{m-2} * q^{m-2} + \ldots + a_1 * q^1 + a_0 * q^0 + a_{-1} * q^{-1} + a_{-2} * q^{-2} + \ldots + a_{-n} * q^{-n} \qquad \mathbf{(2)}$$

Основание системы счисления определяет ее название, например,

q = 10 – десятичная система счисления, а q = 2 – двоичная.

В ЭВМ применяют позиционные системы счисления с недесятичным основанием: двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную.

Системы счисления, применяемые для представления числовых данных в ЭВМ

Принятые обозначения:

двоичная СС - $(A)_2$,

десятичная СС - $(A)_{10}$,

восьмеричная СС - $(A)_8$,

шестнадцатеричная СС - $(A)_{16}$.

Системы счисления, применяемые для представления числовых данных в ЭВМ

В двоичной системе счисления любое число в соответствии с (1) и (2) может быть представлено последовательностью двоичных цифр (3) или суммой степеней числа 2, взятых с указанными в ней коэффициентами (4).

$$\mathbf{X = a_{m-1}\ a_{m-2} \ldots\ a_1\ a_0,\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3} \ldots,} \qquad \mathbf{(3)}$$

где $a_i = \{0,1\}$**;**

$$\mathbf{X=a_{m-1}{*}2^{m-1}+\ldots+a_1{*}2^1+a_0{*}2^0+a_{-1}{*}2^{-1}+a_{-2}{*}2^{-2}+\ldots+a_{-n}{*}2^{-n}} \qquad \mathbf{(4)}$$

Например, двоичное число 1010,001 будет представлено следующим образом:

$$\mathbf{(1110{,}001)_2{=}1{*}2^3 + 1{*}2^2 + 1{*}2^1 + 0{*}2^0 + 0{*}2^{-1} + 0{*}2^{-2} + 1{*}2^{-3}}$$

Системы счисления, применяемые для представления числовых данных в ЭВМ

В восьмеричной системе счисления используется восемь цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7. Любое число в восьмеричной системе может быть представлено последовательностью цифр или суммой степеней числа 8.

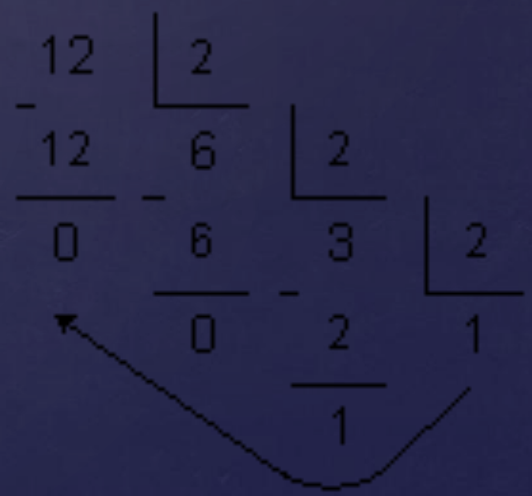
$$(A)_8 = (157{,}34)_8 = 1\cdot 8^2 + 5\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 + 3\cdot 8^{-1} + 4\cdot 8^{-2}$$

В шестнадцатеричной системе счисления для изображения чисел употребляются 16 цифр от 0 до 15. При этом, чтобы одну цифру не изображать двумя знаками, введены обозначения для цифр, больших девяти, латинскими буквами: десять – A, одиннадцать – B, двенадцать – C, тринадцать - D, четырнадцать – E, пятнадцать – F.

$$(A)_{16} = (2AF)_{16} = 2\cdot 16^2 + 10\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0$$

Перевод целых чисел

Для перевода целого числа А, представленного в системе счисления с основанием q, в систему счисления с основанием S необходимо данное число и получаемые частные последовательно делить на новое основание системы счисления S до тех пор, пока последнее частное не будет меньше S. Число А в системе счисления с основанием S представится в виде упорядоченной последовательности остатков деления, причем старшую цифру дает последнее частное, а остатки записываются в порядке, обратном их получению.



$(12)_{10} = (1100)_2$

Перевод дробных чисел

Перевод дробных чисел заключается в последовательном умножении дроби на основание новой системы счисления, причем перемножению подвергаются только дробные части результата. Дробь в новой системе счисления представляется в виде упорядоченной последовательности целых частей произведений, записанной в порядке их получения.

$$\begin{array}{r} 0,325 \\ \times\ 2 \\ \hline 0,650 \\ \times\ 2 \\ \hline 1,300 \\ \times\ 2 \\ \hline 0,600 \\ \times\ 2 \\ \hline 1,200 \end{array}$$

$(0,325)_{10} = (0,0101)_2$

Перевод $(A)_8 \rightarrow (A)_2$

Для перевода восьмеричного числа в двоичное достаточно каждую цифру числа заменить трехразрядным двоичным числом.
При этом отбрасывают нули, стоящие слева от старшей значащей цифры и справа от младшей значащей цифры двоичного кода.

$$\underbrace{1}_{001}\ \underbrace{7}_{111}\ \underbrace{5}_{101},\ \underbrace{6}_{110}:\ (175{,}6)_8=(1111101{,}11)_2$$

$$1\cdot 8^2+7\cdot 8^1+5\cdot 8^0+6\cdot 8^{-1}=1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}$$

$(175{,}6)_8 = (125{,}75)_{10}$, $(1111101{,}11)_2 = (125{,}75)_{10}$

Перевод $(A)_8 \rightarrow (A)_2$

Для перевода шестнадцатеричного числа в двоичное достаточно заменить каждую цифру числа четырехразрядным двоичным кодом.

$$\underbrace{2}_{0010}\quad\underbrace{C}_{1100}\quad\underbrace{F}_{1111},\quad\underbrace{5}_{0101}$$

$(2CF,5)_{16} = (1011001111,0101)_2$

Перевод $(A)_2 \rightarrow (A)_8$ и $(A)_2 \rightarrow (A)_{16}$

- перевод двоичного числа 110101,01 в восьмеричное:

$$\underbrace{110}_{6}\ \underbrace{101}_{5}\ .\ \underbrace{010}_{2} = (65.2)_2$$

- перевод двоичного числа 111000110,101 в шестнадцатеричное

$$\underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1100}_{C}\ \underbrace{0110}_{6}\ .\ \underbrace{1010}_{A} = (1C6.A)_{16}$$

Представление двоичных чисел в форме с фиксированной запятой

При представлении чисел с фиксированной запятой положение запятой (точки) фиксировано относительно разрядов числа и сохраняется неизменным для всех чисел.

Запятая отделяет целую часть числа от дробной.
Если дробная часть отсутствует, то число – целое.

Для кодирования знака используется знаковый разряд («0» для положительных чисел и «1» – для отрицательных).

Представление двоичных чисел в форме с фиксированной запятой

Если для представления числа со знаком выделено n разрядов, то диапазон представления целых двоичных чисел в этом случае определяется выражением

$$1 \leq \left| X_{ф.з.}^{ц} \right| \leq 2^{n-1} - 1.$$

Диапазон представления в ЭВМ дробных двоичных чисел будет определяться неравенством

$$2^{-(n-1)} \leq \left| X_{ф.з.}^{др.} \right| \leq 1 - 2^{-(n-1)}$$

или приближенно

$$0 \leq \left| X_{ф.з.} \right| < 1.$$

Представление двоичных чисел в форме с фиксированной запятой

Разрядная сетка ЭВМ в формате 8-разрядного машинного слова для представления соответственно целого двоичного числа (= +11000) и дробного числа (= +0,11) в форме с фиксированной запятой:

Знак	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	1	1	0	0	0

Веса разрядов

Знак	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
0	1	1	0	0	0	0	0

Веса разрядов

Представление двоичных чисел в форме с фиксированной запятой

Пусть задано число $(X)_2 = – 100010$.

- Целое число $(X)_2$ в формате (n=7 со знаком):

Знак	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	0	0	0	1	0

- Целое число $(X)_2$ в формате (n=8 со знаком):

Знак	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	0	0	0	1	0

Дробное число $(Y)_2 = -0,10001$ в формате (n=8 со знаком):

Знак	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
1	1	0	0	0	1	0	0

Представление двоичных чисел в форме с плавающей запятой

Представление чисел с плавающей запятой в **нормальной** (полулогарифмической) форме используется в ЭВМ, предназначенных для решения широкого круга задач (в универсальных ЭВМ). В полулогарифмической форме число А представляется в виде

$$\mathbf{A = m_n \cdot q^p},$$

где m_n – нормализованная мантисса числа А, определяющая значащие цифры числа;

P – порядок (характеристика) числа А;

q – основание системы счисления.

Мантисса m_n представляет собой правильную дробь, удовлетворяющую условию

$$\mathbf{q^{-1} \leq |m_n| < 1.}$$

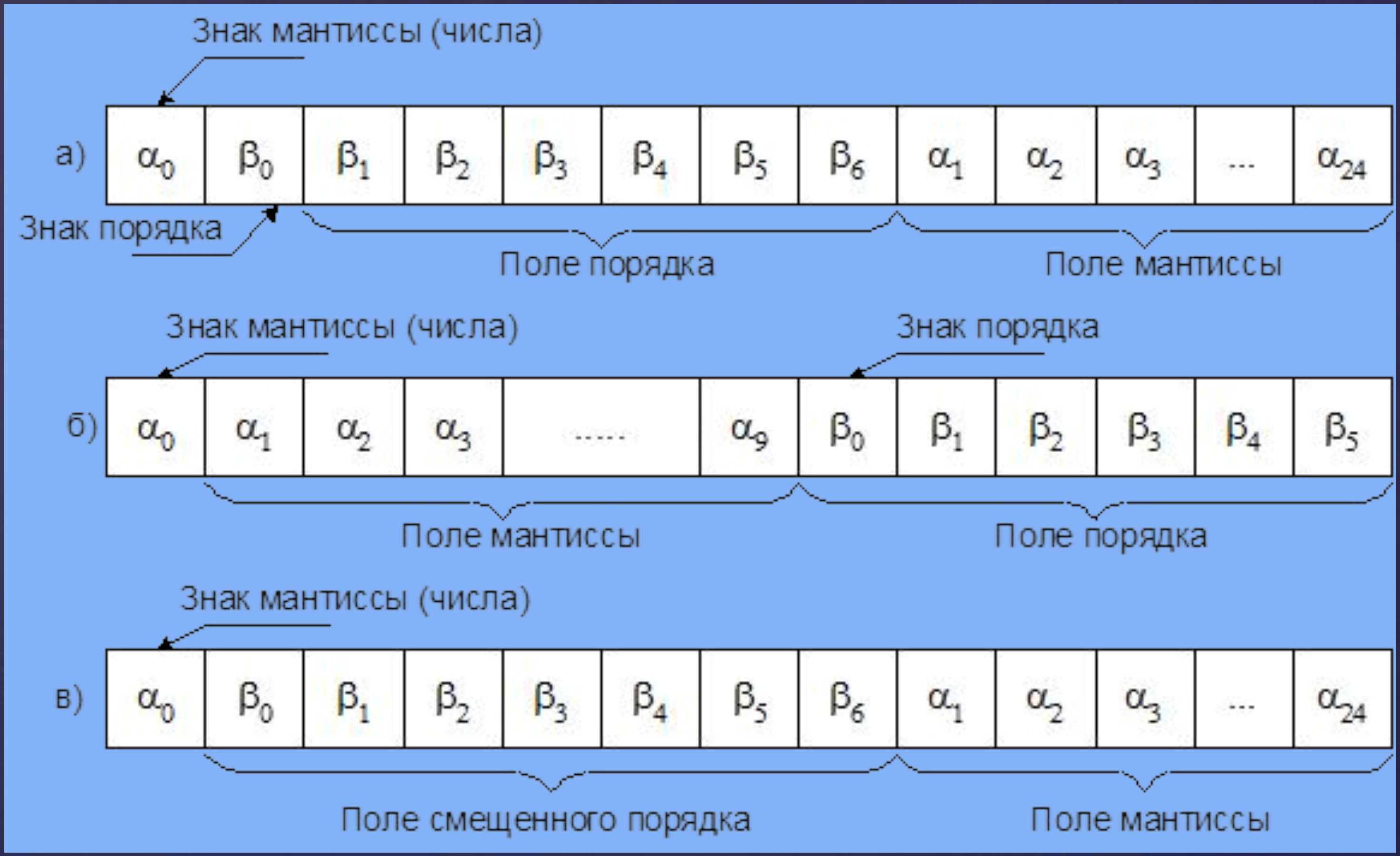
Представление двоичных чисел в форме с плавающей запятой

Запятая при представлении мантиссы фиксируется перед старшим значащим разрядом.

Порядок P указывает положение запятой в числе, может быть положительным или отрицательным целым числом или целым числом без знака (запятая при представлении порядка фиксируется после младшего разряда).

Порядок P и мантисса m_n представляются в системе счисления с основанием q.

Форматы представления в ЭВМ чисел с плавающей запятой



Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Прямой код чисел соответствует обычной записи чисел со своим знаком:

$$A_1 = +0{,}0101, \quad [A_1]_{пр} = 00101\ ;$$

$$A_2 = -\,0{,}0101, \quad [A_2]_{пр} = 10101\ .$$

Для целых чисел в двоичной системе счисления:

$$A_1 = +\,1100, \quad [A_1]_{пр} = 01100\ ;$$

$$A_2 = -\,1100, \quad [A_2]_{пр} = 11100\ .$$

Нуль в прямом коде имеет два изображения:

$$+\,0 = 000\ldots00 = [0]_{пр}\ ;$$

$$-\,0 = 100\ldots00 = [0]_{пр}\ .$$

Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Обратный код. Чтобы представить двоичное отрицательное число в обратном коде, нужно поставить в знаковый разряд единицу, а все остальные разряды инвертировать:

$$A = -0{,}1010. \quad [A]_{обр} = 10101.$$

Примеры обратного кода отрицательных дробного и целого чисел:

$$A^{др} = -0{,}11001;$$
$$[A^{др}]_{пр} = 111001;$$
$$[A^{др}]_{обр} = 100110;$$

$$A^{ц} = -10101;$$
$$[A^{ц}]_{пр} = 110101;$$
$$[A^{ц}]_{обр} = 101010;$$

Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Дополнительный код. Для представления отрицательного числа в дополнительном коде нужно поставить единицу в знаковом разряде, затем найти крайнюю правую единицу и заменить на противоположные разряды слева (до знака). Остальное не менять.

Примеры:

$$[A]^{\text{пр}}_{\text{пр}} = 1110010; \quad [A]^{\text{пр}}_{\text{доп}} = 1001110,$$

$$[A]^{\text{ц}}_{\text{пр}} = 1001110; \quad [A]^{\text{ц}}_{\text{доп}} = 1110010,$$

$$[A]^{ц}_{пр} = 1001001; \quad [A]^{ц}_{доп} = 1110111.$$

Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Правило перевода отрицательных чисел из обратного кода в дополнительный:

дополнительный код отрицательного числа может быть получен из обратного путем прибавления к нему единицы младшего разряда.

Примеры:

$[A]_{пр} = 101010;$	$[A]_{пр} = 111101;$
$[A]_{обр} = 110101;$	$[A]_{обр} = 100010;$
$[A]_{доп} = 110110,$	$[A]_{доп} = 100011.$

Отрицательный нуль изображается:

- в обратном коде $[-0]_{обр} = 1.11111\ldots11;$

- в дополнительном коде отрицательный нуль отсутствует, т.е. код нуля в дополнительном коде соответствует коду нуля положительного числа.

Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Положительные числа в прямом, обратном и дополнительных кодах имеют одинаковую форму записи!!!

Кодирование отрицательных чисел в ЭВМ

Модифицированный код. При выполнении арифметических операций в ЭВМ иногда возникает необходимость для представления знака числа использовать не один, а два знаковых разряда. Модифицированный код отличается от обычного двумя разрядами для знака. Примеры:

$[A_1]_{пр.} = 1\ 01001, \quad [A_1]_{пр.\ мод.} = 11\ 01001,$

$[A_1]_{обр.} = 1\ 10110, \quad [A_1]_{обр.\ мод.} = 11\ 10110,$

$[A_1]_{доп.} = 1\ 10111, \quad [A_1]_{доп.\ мод.} = 11\ 10111.$