

Конечные автоматы

Основные определения

ДМПА:

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F),$$

где

- Q – конечное множество состояний;
- Σ – конечный входной алфавит;
- Γ – конечный алфавит магазинных символов;
- δ – функция, переходов, отображение множества $Q \times (\Sigma \cup \{e\} \cup \{\perp\}) \times \Gamma$ во множество $Q \times \Gamma^*$;
- $q_0 \in Q$ – начальное состояние;
- $Z_0 \in \Gamma$ – начальный символ;
- $F \subseteq Q$ – множество заключительных состояний.

Основные определения

Конфигурация ДМПА P

$$(q, w, \alpha) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*,$$

где:

- q – текущее состояние устройства;
 - w – неиспользованная часть входной цепочки;
 - α – содержимое магазина;
- « \perp » – маркер конца входной цепочки. Начальная конфигурация – (q_0, w, Z_0) , где $w \in \Sigma^*$,
заключительная конфигурация – (q, \perp, α) , где $q \in F$
и $\alpha \in \Gamma^*$.

Основные определения

Такт работы ДМПА P при $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$, где $q, q' \in Q, a \in \Sigma \cup \{e\} \cup \{\perp\}, w \in \Sigma^*, Z \in \Gamma, \alpha, \gamma \in \Gamma^*$:

$$(q, aw, Z\alpha) \vdash (q', w, \gamma\alpha),$$

Если $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$, то ДМПА P может:

- перейти в состояние q' ;
- сдвинуть головку на одну ячейку вправо;
- заменить верхний символ магазина цепочкой γ магазинных символов.

Частные случаи: $Z = e, \gamma = e, a = e, a = \perp$.

Основные определения

ДКА:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

где

- Q – конечное множество состояний;
- Σ – конечное множество входных символов;
- δ – функция переходов, отображение множества $Q \times (\Sigma \cup \{\perp\})$ во множество Q ;
- $q_0 \in Q$ – начальное состояние;
- $F \subseteq Q$ – множество заключительных состояний.

Основные определения

Конфигурация ДКА M

$$(q, w) \in Q \times \Sigma^*,$$

Начальная конфигурация – (q_0, w) , где $w \in \Sigma^*$,
заключительная конфигурация – (q, \perp) , где $q \in F$.

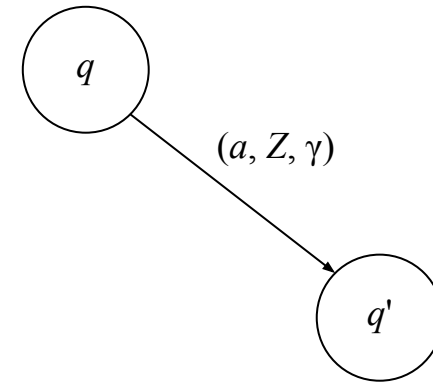
Такт работы ДКА M при $\delta(q, a) = q'$, где $q, q' \in Q$,
 $a \in \Sigma \cup \{\perp\}$:

$$(q, aw) \vdash (q', w)$$

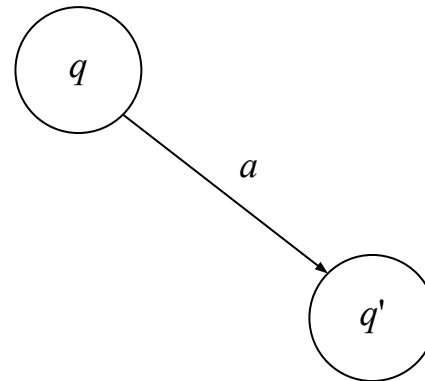
Способы задания функции переходов

Граф переходов

Переход ДМПА $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$:



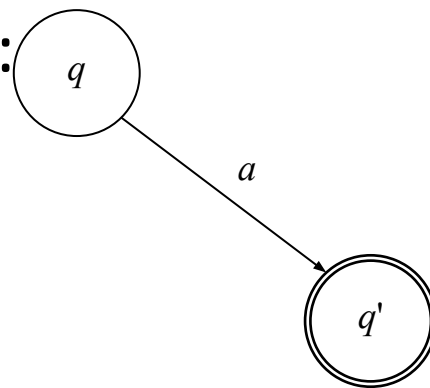
Переход ДКА $\delta(q, a) = q'$:



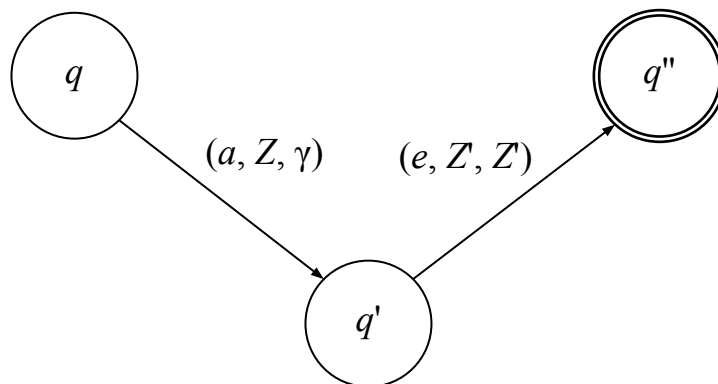
Способы задания функции переходов

Переход в конечное состояние

Переход ДКА $\delta(q, a) = q'$, где $q' \in F$:



Переход ДМПА $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$, где $q' \in F$:



Способы задания функции переходов

Таблица переходов

Таблица переходов ДМПА:

| | (a_1, z_1) | (a_2, z_2) | (a_3, z_3) | ... |
|-------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----|
| q_0 | $\delta(q_0, a_1, z_1)$ | $\delta(q_0, a_2, z_2)$ | $\delta(q_0, a_3, z_3)$ | ... |
| q_1 | $\delta(q_1, a_1, z_1)$ | $\delta(q_1, a_2, z_2)$ | $\delta(q_1, a_3, z_3)$ | ... |
| q_2 | $\delta(q_2, a_1, z_1)$ | $\delta(q_2, a_2, z_2)$ | $\delta(q_2, a_3, z_3)$ | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... |

$\delta(q, a, Z) :$

- (q', γ) ;
- *HALT* ($a = \perp, q \in F$);
- *ERROR*.

Способы задания функции переходов

Таблица переходов

Таблица переходов ДКА:

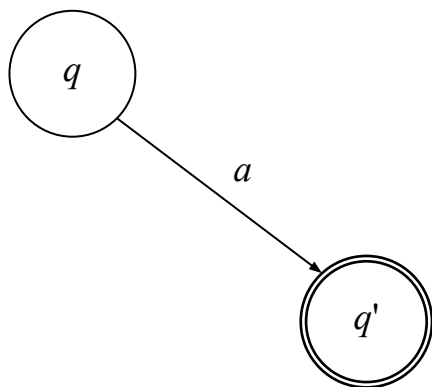
| | a_1 | a_2 | ... | \perp |
|-------|--------------------|--------------------|-----|----------------------|
| q_0 | $\delta(q_0, a_1)$ | $\delta(q_0, a_2)$ | ... | $\delta(q_0, \perp)$ |
| q_1 | $\delta(q_1, a_1)$ | $\delta(q_1, a_2)$ | ... | $\delta(q_1, \perp)$ |
| q_2 | $\delta(q_2, a_1)$ | $\delta(q_2, a_2)$ | ... | $\delta(q_2, \perp)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |

$\delta(q, a)$:

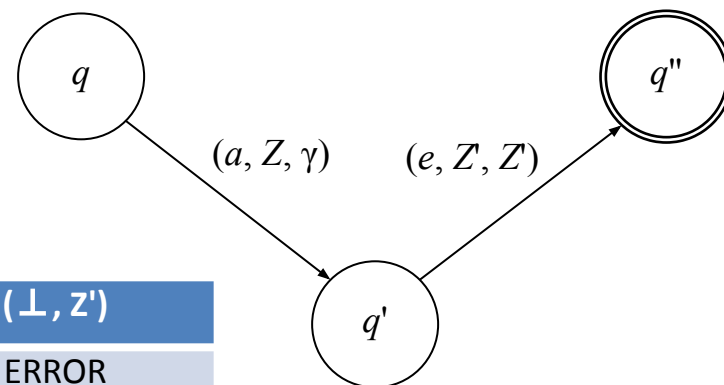
- q' ;
- *HALT* ($a = \perp, q \in F$);
- *ERROR*.

Способы задания функции переходов

Переход в конечное состояние



| | a | \perp |
|----|-------|---------|
| q | q' | ERROR |
| q' | ERROR | HALT |



| | (a, Z) | (e, Z') | (\perp , Z') |
|-----|-----------------|-----------|-----------------|
| q | (q', γ) | ERROR | ERROR |
| q' | ERROR | (q'', Z') | ERROR |
| q'' | ERROR | ERROR | HALT |

| | (a, Z) | (\perp , Z') |
|----|-----------------|-----------------|
| q | (q', γ) | ERROR |
| q' | ERROR | HALT |

Определение функции переходов

1. Построить граф переходов, а потом преобразовать его в таблицу переходов.
2. Построение графа начинается с начального состояния q_0 . Если начальное состояние может являться также и конечным, помечаем это двойной границей окружности.
3. Для каждого состояния графа q_i определяем, есть ли из данного состояния такие переходы (a, Z, γ) , которые соответствуют допустимому символу a из входной цепочки и допустимому символу Z на вершине стека (если автомат с магазинной памятью), которые пока еще отсутствуют в графе. Если есть, то проверяем, ведет ли данный переход в уже имеющееся состояние. Если да, то добавляем в граф только новый переход (a, Z, γ) . Если нет, то добавляем в граф новое состояние и переход (a, Z, γ) в него. Если новое состояние может являться конечным, помечаем это двойной границей окружности.
4. Если в процессе выполнения шага 3 в графе появились новые состояния или переходы, возвращаемся на шаг 3, иначе граф переходов построен.

Включение действий в синтаксис

Действия:

$$\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, \dots$$

Функция переходов ДМПА:

$$\delta(q, a, Z) = (q', \gamma, \langle A \rangle).$$

Функция переходов ДКА:

$$\delta(q, a) = (q', \langle A \rangle).$$

Отсутствие действия:

$$\langle A \rangle = \epsilon \text{ или } \langle A \rangle = \emptyset.$$

Алгоритм работы ДМПА

Пусть M – магазин (стек), $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n \perp$ – входная цепочка.

Тогда:

1. $q := q_0, M := Z_0, k := 1$.

2. Ищем $\delta(q, a, Z)$, где: $a = a_k, M = Z\beta$ или $a = a_k, Z = e$ или $a = e, M = Z\beta$.

3. Если $\delta(q, a, Z)$ не определена, то ошибка в позиции k . Если значений $\delta(q, a, Z)$ несколько – таблица переходов построена неверно. Если $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma, \langle A \rangle)$, то:

3.1. Если $\langle A \rangle \neq e$ и $\langle A \rangle \neq \emptyset$, то выполнить действие $\langle A \rangle$.

3.2. $q := q'$.

3.3. $M := \gamma\beta$.

3.4. Если $a \neq e$, то $k := k + 1$.

4. Если $\delta(q, a, Z) = HALT$, то разбор успешно завершен.

5. Если $\delta(q, a, Z) = ERROR$, то имеем во входной цепочке синтаксическую ошибку в позиции k .

Алгоритм работы ДКА

Пусть $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n \perp$ – входная цепочка. Тогда:

1. $q := q_0, k := 1$.

2. Ищем $\delta(q, a)$, где $a = a_k$.

3. Если $\delta(q, a)$ не определена, то ошибка в позиции k . Если значений $\delta(q, a)$ несколько – таблица переходов построена неверно. Если $\delta(q, a) = (q', \langle A \rangle)$, то:

3.1. Если $\langle A \rangle \neq \epsilon$ и $\langle A \rangle \neq \emptyset$, то выполнить действие $\langle A \rangle$.

3.2. $q := q'$.

3.3. $k := k + 1$.

4. Если $\delta(q, a) = HALT$, то разбор успешно завершен.

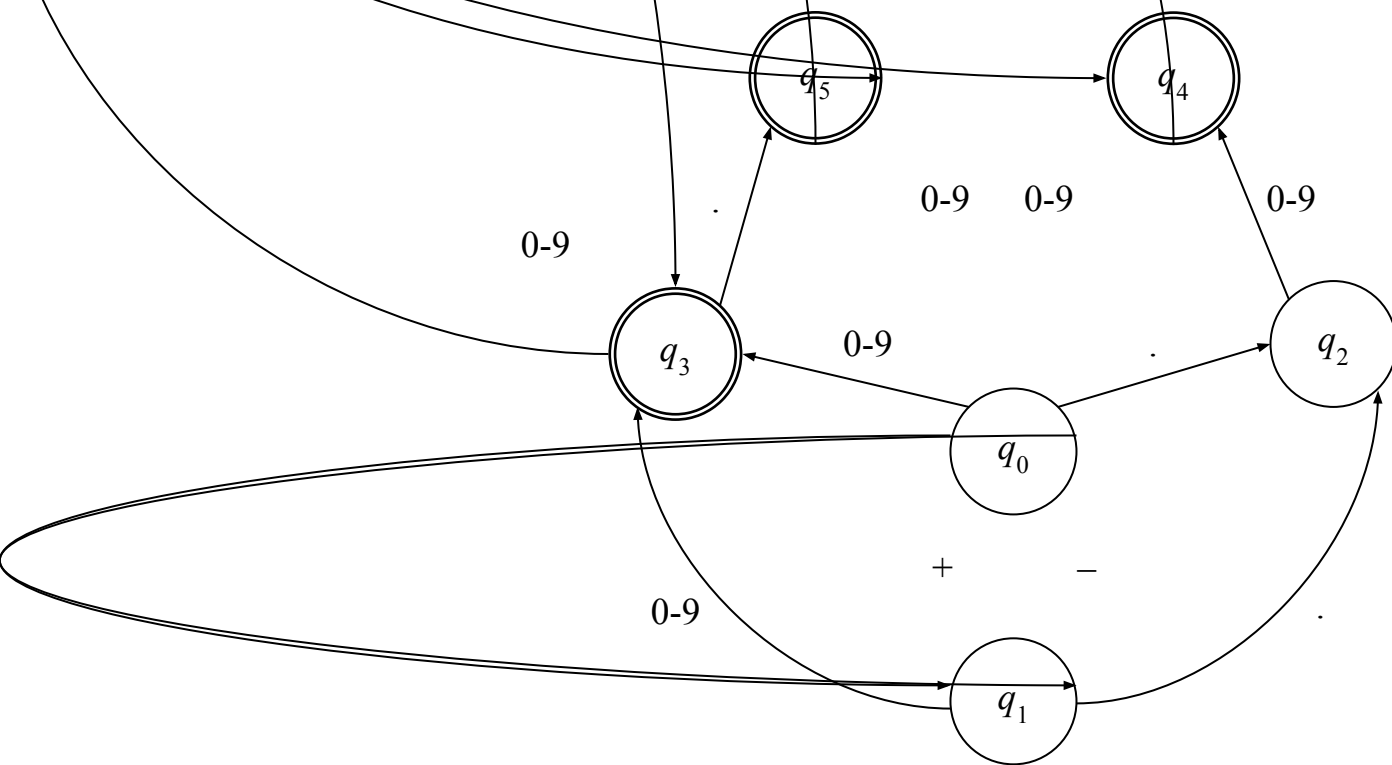
5. Если $\delta(q, a) = ERROR$, то имеем во входной цепочке синтаксическую ошибку в позиции k .

Посимвольный разбор Число с фиксированной точкой

Примеры:

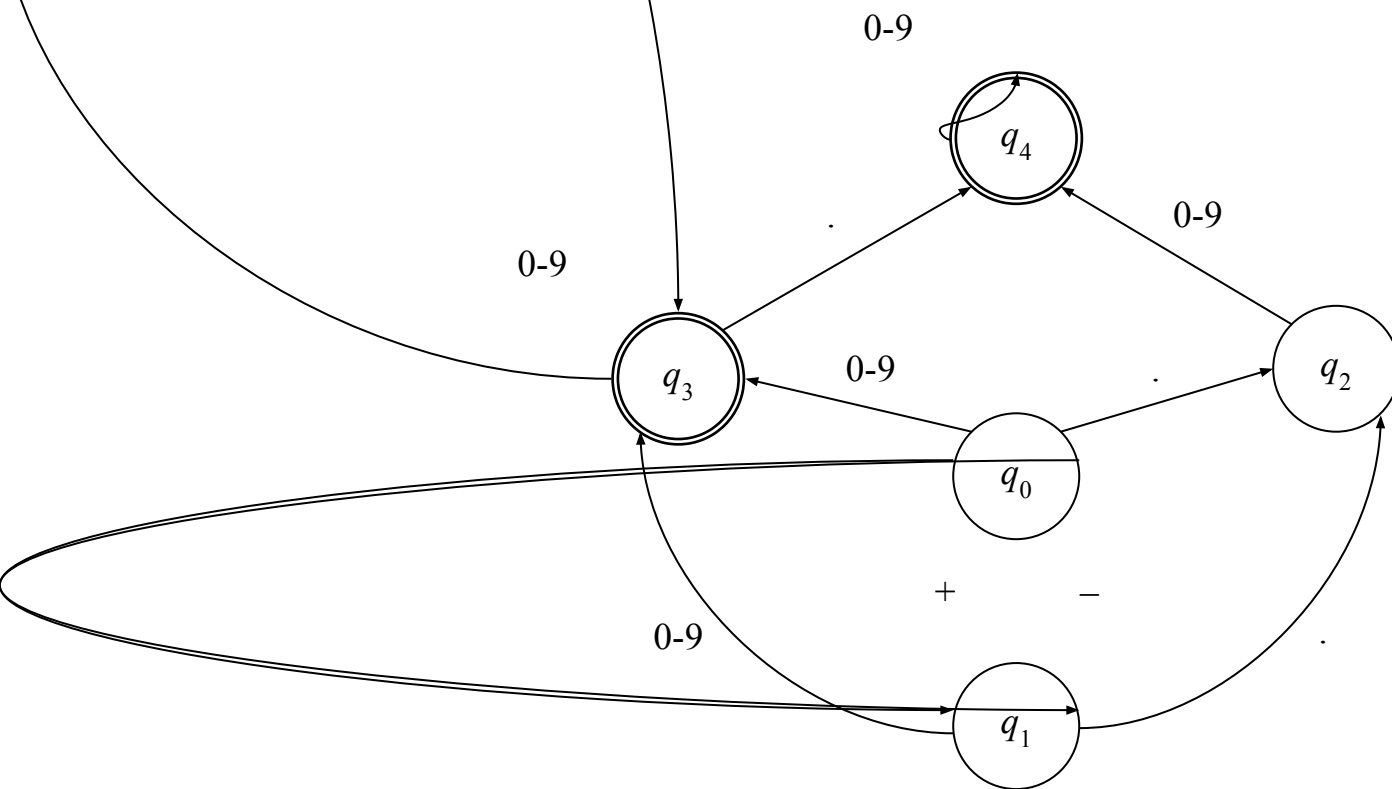
« $N.M$ », « $N.$ », « $.M$ », « N »,

где N – целая, а M – дробная часть числа.



Посимвольный разбор Число с фиксированной точкой

Граф переходов после минимизации:



Посимвольный разбор Число с фиксированной точкой

Таблица переходов ДКА:

| | + - | . | 0-9 | ⊥ |
|-------|-------|-------|-------|------|
| q_0 | q_1 | q_2 | q_3 | |
| q_1 | | q_2 | q_3 | |
| q_2 | | | q_4 | |
| q_3 | | q_4 | q_3 | HALT |
| q_4 | | | q_4 | HALT |

Примечание: объединение символов алфавита.

Посимвольный разбор

Число с фиксированной точкой

Получили ДКА $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, где:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$;
- $\Sigma = \{+, -, ., 0-9\}$;
- $\delta(Q \times \Sigma) = \{\{q_1, q_2, q_3, ERROR\}, \{ERROR, q_2, q_3, ERROR\}, \{ERROR, ERROR, q_5, ERROR\}, \{ERROR, q_4, q_3, HALT\}, \{ERROR, ERROR, q_4, HALT\}\}$;
- $F = \{q_3, q_4\}$.

Посимвольный разбор Число с фиксированной точкой

Пример разбора цепочки «-15.2»:

- $(q_0, \text{«-15.2 } \perp \text{»}) \quad \square \vdash (q_1, \text{«15.2 } \perp \text{»})$
- $\square^2 (q_3, \text{«5|2 } \perp \text{»})$
- $\square^3 (q_3, \text{«.2 } \perp \text{»})$
- $\square^4 (q_4, \text{«2 } \perp \text{»})$
- $\square^5 (q_4, \text{« } \perp \text{»})$
- $\square^6 \text{ } \text{HALT } \vdash$

Разбор завершен успешно. Другой пример:

- $(q_0, \text{«.2. } \perp \text{»}) \quad \square \vdash (q_2, \text{«2. } \perp \text{»})$
- $\square^2 (q_4, \text{«. } \perp \text{»})$
- $\square^3 \text{ } \text{ERROR} \vdash$

Имеем синтаксическую ошибку в позиции 3.

Посимвольный разбор Число с фиксированной точкой

Ограничение количества значащих цифр:

| | $+-$ | $.$ | $0-9$ | \perp |
|-------|------------------|------------------|----------------------------|---------|
| q_0 | q_1, \emptyset | q_2, \emptyset | $q_3, \langle A_1 \rangle$ | |
| q_1 | | q_2, \emptyset | $q_3, \langle A_1 \rangle$ | |
| q_2 | | | $q_4, \langle A_1 \rangle$ | |
| q_3 | | q_4, \emptyset | $q_3, \langle A_2 \rangle$ | HALT |
| q_4 | | | $q_4, \langle A_2 \rangle$ | HALT |

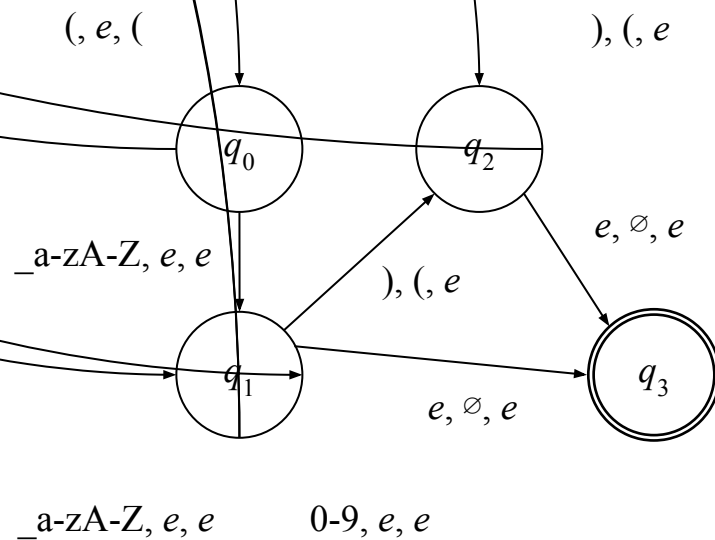
Действия:

- $\langle A_1 \rangle$ – $\text{count} := 1$;
- $\langle A_2 \rangle$ – $\text{count} := \text{count} + 1$; если $\text{count} > N$, $\delta(q, a) = \text{ERROR}$.

Посимвольный разбор Идентификатор в скобках

Примеры:

xyz, (((abc))), ...



Посимвольный разбор Идентификатор в скобках

Таблица переходов ДМПА:

| | (, e | _a-zA-Z, e | 0-9, e |), (| e, ∅ | ⊥, ∅ |
|----------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------|
| q ₀ | q ₀ , (| q ₁ , e | | | | |
| q ₁ | | q ₁ , e | q ₁ , e | q ₂ , e | q ₃ , e | |
| q ₂ | | | | q ₂ , e | q ₃ , e | |
| q ₃ | | | | | | HALT |

Убираем лишнее состояние:

| | (, e | _a-zA-Z, e | 0-9, e |), (| ⊥, ∅ |
|----------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------|
| q ₀ | q ₀ , (| q ₁ , e | | | |
| q ₁ | | q ₁ , e | q ₁ , e | q ₂ , e | HALT |
| q ₂ | | | | q ₂ , e | HALT |

Посимвольный разбор Идентификатор в скобках

Получили ДМПА $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, где:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
- $\Sigma = \{(\, , _ , a-z, A-Z, 0-9\}$;
- $\Gamma = \{(\}$;
- $\delta(Q \times (\Sigma \cup \{e\} \cup \{\perp\}) \times \Gamma) = \{(q_0, \langle \langle \rangle \rangle), (q_1, e), ERROR, ERROR, ERROR\}, \{ERROR, (q_1, e), (q_1, e), (q_2, e), HALT\}, \{ERROR, ERROR, ERROR, (q_2, e), HALT\}$;
- $Z_0 = e$;
- $F = \{q_1, q_2\}$.

Посимвольный разбор Идентификатор в скобках

Пример разбора цепочки «((a123))»:

$(q_0, \langle \langle (a123) \rangle \rangle, e) \stackrel{1}{\vdash} (q_0, \langle (a123) \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{2}{\vdash} (q_0, \langle a123 \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{3}{\vdash} (q_1, \langle 123 \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{4}{\vdash} (q_1, \langle 23 \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{5}{\vdash} (q_1, \langle 3 \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{6}{\vdash} (q_1, \langle \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{7}{\vdash} (q_2, \langle \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{8}{\vdash} (q_2, \langle \perp \rangle, e)$

$\stackrel{9}{\vdash} \text{HALT}$

Разбор завершен успешно.

Посимвольный разбор Идентификатор в скобках

Пример разбора цепочки «(x)»:

- $(q_0, \text{«(x)»} \perp, e)$ $\xrightarrow{1} (q_0, \text{«(x)»} \perp, \text{«(»)})$
- $\xrightarrow{2} (q_1, \text{«)»} \perp, \text{«(»)})$
- $\xrightarrow{3} (q_1, \text{«)»} \perp, e)$
- $\xrightarrow{4} \text{ERROR}$

Имеем ошибку в позиции 4. Пример разбора цепочки «()»:

- $(q_0, \text{«()»} \perp, e)$ $\xrightarrow{1} (q_0, \text{«)»} \perp, \text{«(»)})$
- $\xrightarrow{2} \text{ERROR}$

Ошибка в позиции 2.

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Язык L описывает вложенные операторы языка Pascal «**begin end**;». Таблица переходов ДМПА при посимвольном разборе:

| | b, e | e, b | g, e | i, e | n, e | d, e | «;», e | _, e | ⊥, ∅ |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------|
| q_0 | q_1, b | q_6, e | | | | | | q_0, e | HALT |
| q_1 | | q_2, b | | | | | | | |
| q_2 | | | q_3, e | | | | | | |
| q_3 | | | | q_4, e | | | | | |
| q_4 | | | | | q_5, e | | | | |
| q_5 | | | | | | | | q_0, e | |
| q_6 | | | | | q_7, e | | | | |
| q_7 | | | | | | q_8, e | | | |
| q_8 | | | | | | | q_0, e | q_8, e | |

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Таблица переходов ДМПА при разборе по лексемам

| | begin, e | end, b | «;», e | ⊥, ∅ |
|----------------|--------------------|--------------------|--------------------|------|
| q ₀ | q ₀ , b | q ₁ , e | | HALT |
| q ₁ | | | q ₀ , e | |

$$\Sigma = \{\mathbf{b, e, g, i, n, d, \langle\!\langle; \!\!\rangle\!\rangle, _}\} \rightarrow \Sigma' = \{\mathbf{begin, end, \langle\!\langle; \!\!\rangle\!\rangle}\}$$

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Алфавит языка Σ делится на три подмножества:

1. Подмножество символов-разделителей $\Sigma_S \subset \Sigma$;
2. Подмножество символов пунктуации $\Sigma_P \subset \Sigma$;
3. Подмножество лексемных символов $\Sigma_L \subset \Sigma$:

$$\Sigma_L = \Sigma - (\Sigma_S \cup \Sigma_P).$$

Алфавит Σ' :

$$\Sigma' \subseteq \Sigma_P \cup \Sigma_L^+.$$

Лексема x – либо $x \in \Sigma_P$, либо $x \in \Sigma_L^+$, отделенная от других лексем символами алфавитов Σ_S и Σ_P .

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Пример:

begin

begin end ;

end;

begin

end;

1. **begin** (1:1);

2. **begin** (2:3);

3. **end** (2:9);

4. **;** (2:13);

5. **end** (3:1);

6. **;** (3:4);

7. **begin** (4:1);

8. **end** (5:1);

9. **;** (5:4).

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Пример разбора:

- $$(q_0, \text{«bbe;e;be; } \perp \text{»}, e) \stackrel{1}{\vdash} (q_0, \text{«be;e;be; } \perp \text{»}, b)$$
- $$\stackrel{2}{\vdash} (q_0, \text{«e;e;be; } \perp \text{»}, bb)$$
- $\stackrel{3}{\vdash} (q_1, \text{«;e;be; } \perp \text{»}, b)$
 - $\stackrel{4}{\vdash} (q_0, \text{«e;be; } \perp \text{»}, b)$
 - $\stackrel{5}{\vdash} (q_1, \text{«;be; } \perp \text{»}, e)$
 - $\stackrel{6}{\vdash} (q_0, \text{«be; } \perp \text{»}, e)$
 - $\stackrel{7}{\vdash} (q_0, \text{«e; } \perp \text{»}, b)$
 - $\stackrel{8}{\vdash} (q_1, \text{«; } \perp \text{»}, e)$
 - $\stackrel{9}{\vdash} (q_0, \text{« } \perp \text{»}, e)$
 - $\stackrel{10}{\vdash} \text{HALT } \perp$

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Пример:
begin end;
end;

1. **begin** (1:1);
2. **end** (1:7);
3. **;** (1:10);
4. **end** (2:1);
5. **;** (2:4);

$(q_0, \langle \text{be};e; \perp \rangle, e) \stackrel{1}{\vdash} (q_0, \langle e;e; \perp \rangle, b)$
 $\stackrel{2}{\vdash} (q_1, \langle ;e; \perp \rangle, e)$
 $\stackrel{3}{\vdash} (q_0, \langle e; \perp \rangle, e)$
 $\stackrel{4}{\vdash} \text{ERROR}$

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Таблица переходов ДКА с действиями:

| | {b, e, g, i, n, d}, e | «;», e | _ , e | ⊥, ∅ |
|----------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|------|
| q ₀ | q ₁ , e, ⟨A ₁ ⟩ | q ₀ , e, ⟨A ₃ ⟩ | q ₀ , e, ∅ | HALT |
| q ₁ | q ₁ , e, ⟨A ₂ ⟩ | q ₀ , e, ⟨A ₄ ⟩ | q ₀ , e, ⟨A ₅ ⟩ | |

Действия (в начале разбора buf := ""):

- ⟨A₁⟩ – если buf ≡ "", то buf := a_k, иначе *ERROR*.
- ⟨A₂⟩ – buf := buf + a_k.
- ⟨A₃⟩ – если buf ≡ 'end', то buf := "", иначе *ERROR*.
- ⟨A₄⟩ – если buf ≡ 'end', то ⟨A₅⟩; ⟨A₃⟩, иначе *ERROR*.
- ⟨A₅⟩: если buf ≡ 'begin', то M ← b и buf := ""; если же buf ≡ 'end' и M = bα, то M → b, иначе *ERROR*.