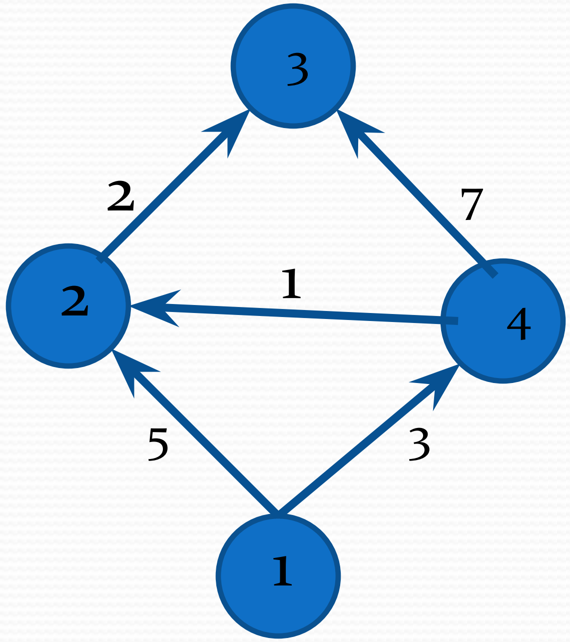
Кратчайшие пути, максимальные потоки и минимальные разрезы на орграфах

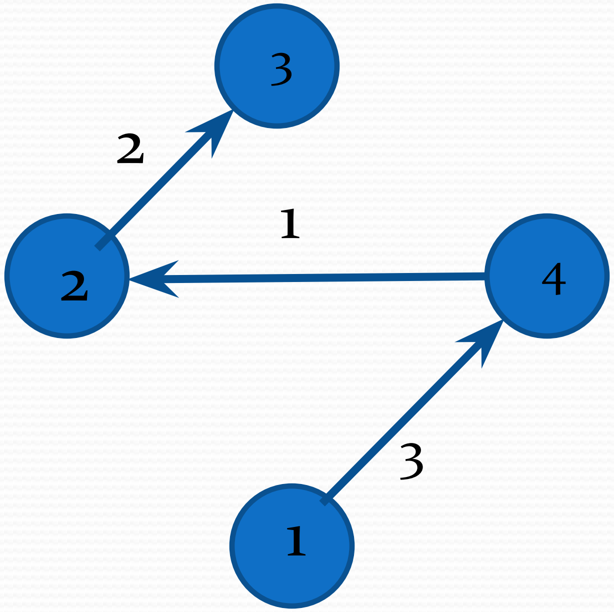
Лекция 7

СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ

На взвешенном ориентированном графе G(X,U) требуется определить кратчайший путь из i-й вершины в j-ю.



Граф G(X,U)



Кратчайший путь из 1-й вершины в 3-ю

ЗАДАЧИ О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ

$$
\begin{cases}
\sum_i \sum_j r(i,j) z(i,j) \to \min; \\
\sum_i z(s,i) = 1; \\
\sum_i z(i,t) = 1; \\
\forall x_k \in X \setminus (x_s \cup x_t) : \sum_i z(i,k) = \sum_j z(k,j); \\
\forall i, \forall j : z(i,j) = 1{,}0.
\end{cases}
$$

Поиск кратчайшего пути из s-й вершины в t-ю

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Шаг 1. Вершине x_s присваивается потенциал P(s)=0.

Шаг 2. Всем вершинам множества X\x_s присвоить потенциал, равный ∞.

Шаг 3. Каждой q-й вершине множества X\x_s присваивается потенциал P(q):

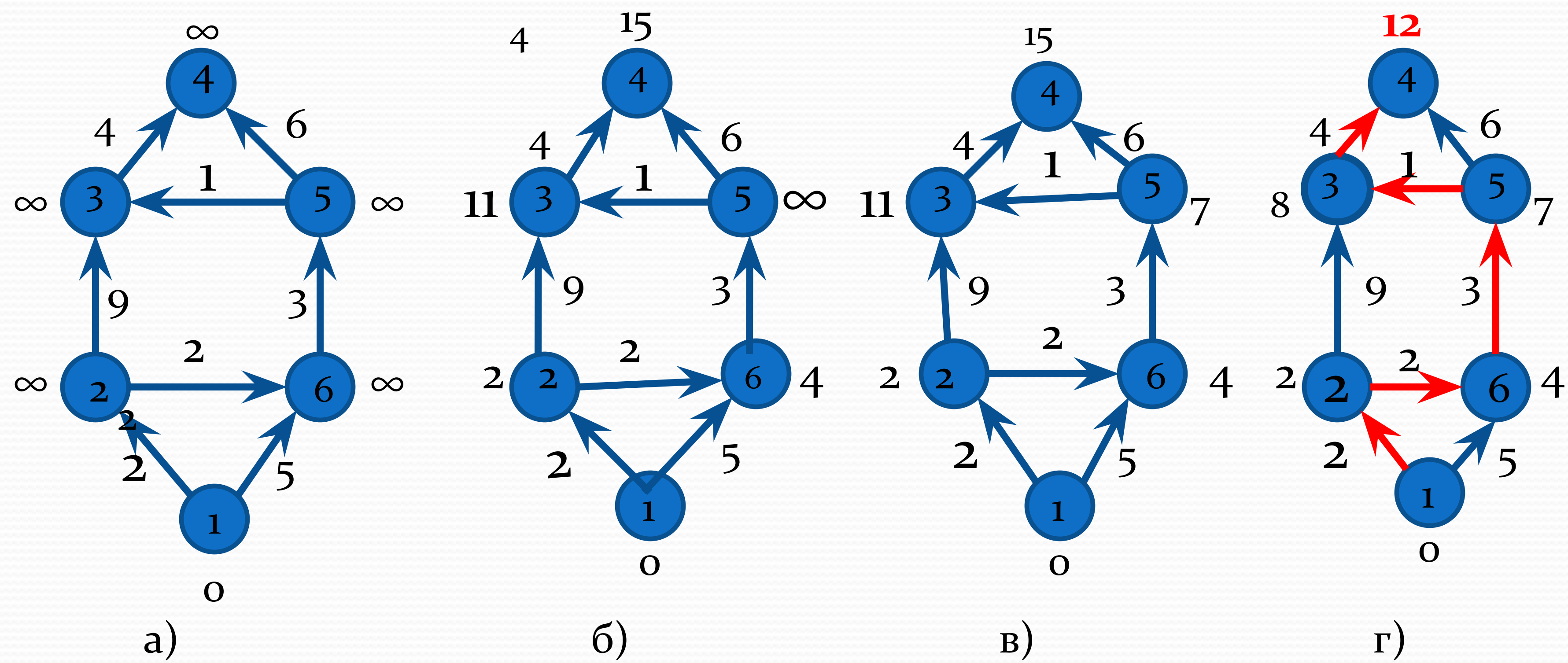
$$\forall x_q \in X \setminus x_s : P(q) = \min\{P(q); \min_i [P(i) + r(i,q)]\}.$$

Шаг 4. Если потенциал хотя бы одной вершины изменился, то перейти к шагу 3, в противном случае – к шагу 5.

Шаг 5. Конец алгоритма. Потенциал t-й вершины равен кратчайшему пути в нее из вершины x_s .

ПРИМЕР 1

Поиск длины кратчайшего пути из 1-й вершины в 4-ю.



Порядок расстановки потенциалов на каждой итерации – по часовой стрелке.

ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ

Достоинства:

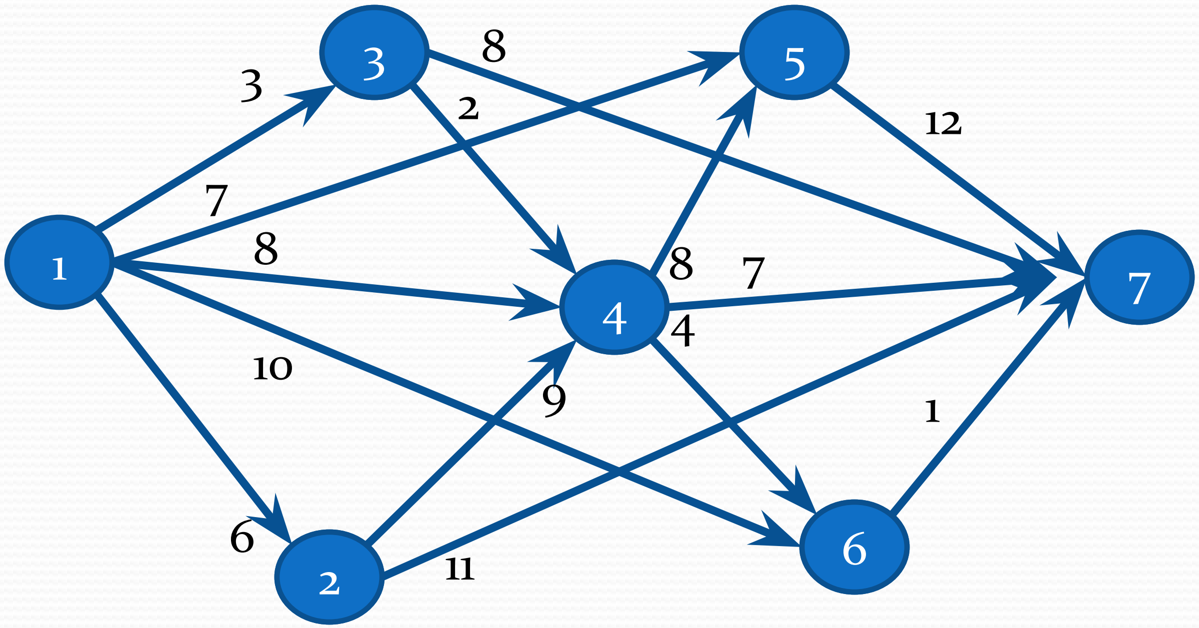
1. Метод потенциалов гарантирует определение кратчайших путей из выбранной вершины во все остальные.
2. Исключается необходимость перебора всех путей.
3. Высокое быстродействие.
4. Легкая программная реализация.
5. Универсальность: метод применим к ориентированным и неориентированным графам.

Недостатки:

Вес каждой дуги должен быть положительным.

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить кратчайшие пути из 1-й вершины во все остальные.



МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОТОКИ НА ГРАФАХ

Содержательная постановка задачи: требуется определить максимальный однородный поток на графе G(X,U) из вершины s в вершину t, если поток по каждой дуге графа *(i,j)* не может превышать ее пропускной способности *r(i,j)*

Формальная постановка задачи о максимальном однородном потоке

Обозначения: $f(i,j)$ – поток по дуге $(i,j)\in U$,

$r(i,j)$ – пропускная способность дуги $(i,j)\in U$;

x_s - вершина – источник;

x_t - вершина – сток.

Задача линейного программирования

$$\begin{cases} \sum\limits_i f(i,t) \to \max; \\ \forall x_j \in X \setminus (x_s \cup x_t) : \sum\limits_i f(i,j) = \sum\limits_k f(j,k); \\ \forall (i,j) \in U : r(i,j) \ge f(i,j) \ge 0. \end{cases}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Дайте иную формальную постановку задачи о максимальном потоке, в которой:
- эмиссионная способность источника ограничена;
- поглощающая способность стока ограничена;
- на графе имеется несколько источников и стоков.

ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

Шаг 1. Полученный граф G(X,U’) заменяется на G’(X,U’) такой, что: $$\begin{cases} \forall (i,j) \in U \Rightarrow (i,j) \in U'; \\ \forall (i,j)' \in U', \exists (i,j) \in U : r(i,j)' = \dfrac{1}{r(i,j)}. \end{cases}$$

Шаг 2. Методом потенциалов ищется кратчайший путь L из x_s в x_t.

Шаг 3. Если длина такого пути равна ∞, то перейти к шагу 9, в противном случае – к шагу 4.

Шаг 4. На графе G(X,U) выбирается дуга (p,q), принадлежащая L, для которой справедливо:

$$r(p,q) = \min_{(i,j) \in L} r(i,j).$$

АЛГОРИТМ ПОИСКА МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Шаг 5. На графе G(X,U) вес всех дуг, принадлежавших пути L, изменяется следующим образом:

$$\forall (i, j) \in L : r(i, j) = r(i, j) - r(p, q).$$

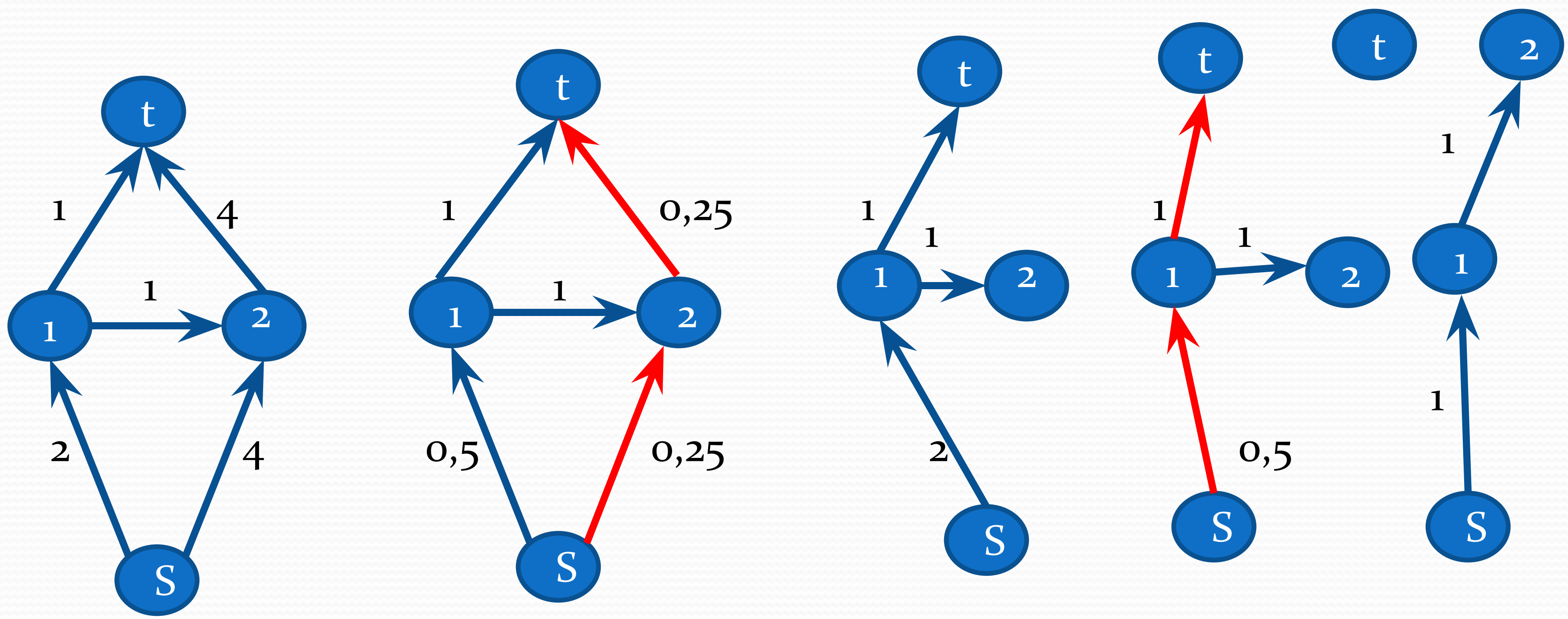
Шаг 6. Образовавшиеся дуги с нулевым весом на G(X,U) отбрасываются.

Шаг 7. Вес r(p,q) добавить к ранее накопленной сумме S.

Шаг 8. Перейти к шагу 1.

Шаг 9. Конец алгоритма. Суммарный вес дуг, найденных на шаге 4 каждой итерации, равен максимальному потоку из источника в сток.

ПРИМЕР 2

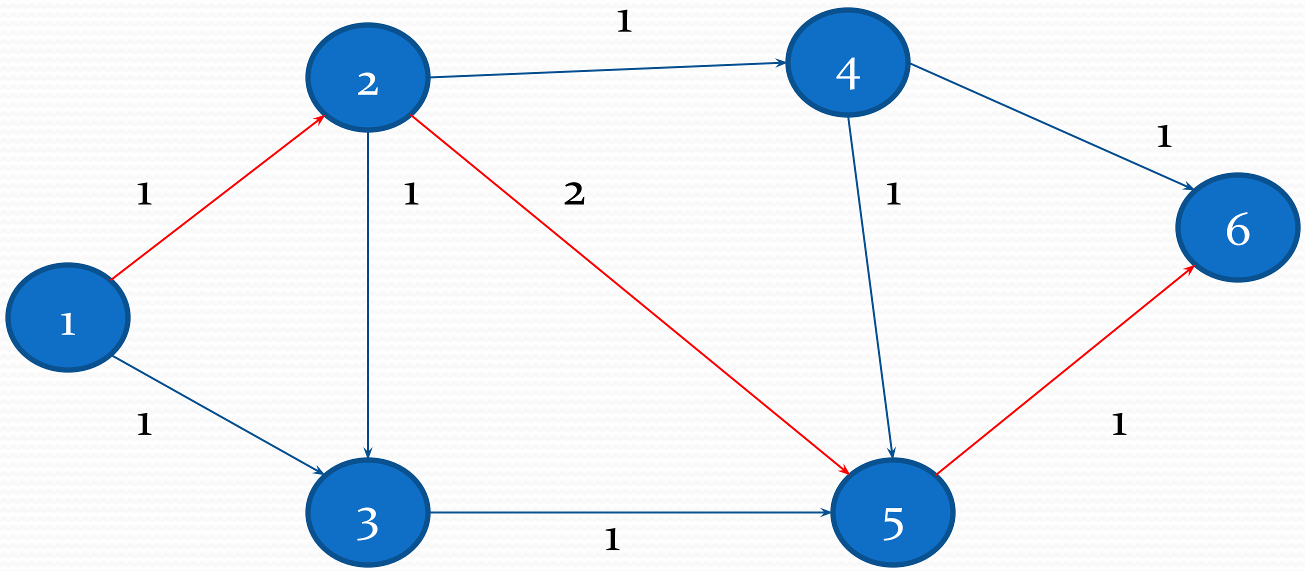


a) Граф G(X,U). b) Граф G’(X,U’), S=4. a) b) S=5. c) L=∞.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Сформулируйте достоинства приведенного выше алгоритма.
- Сформулируйте недостатки приведенного выше алгоритма.

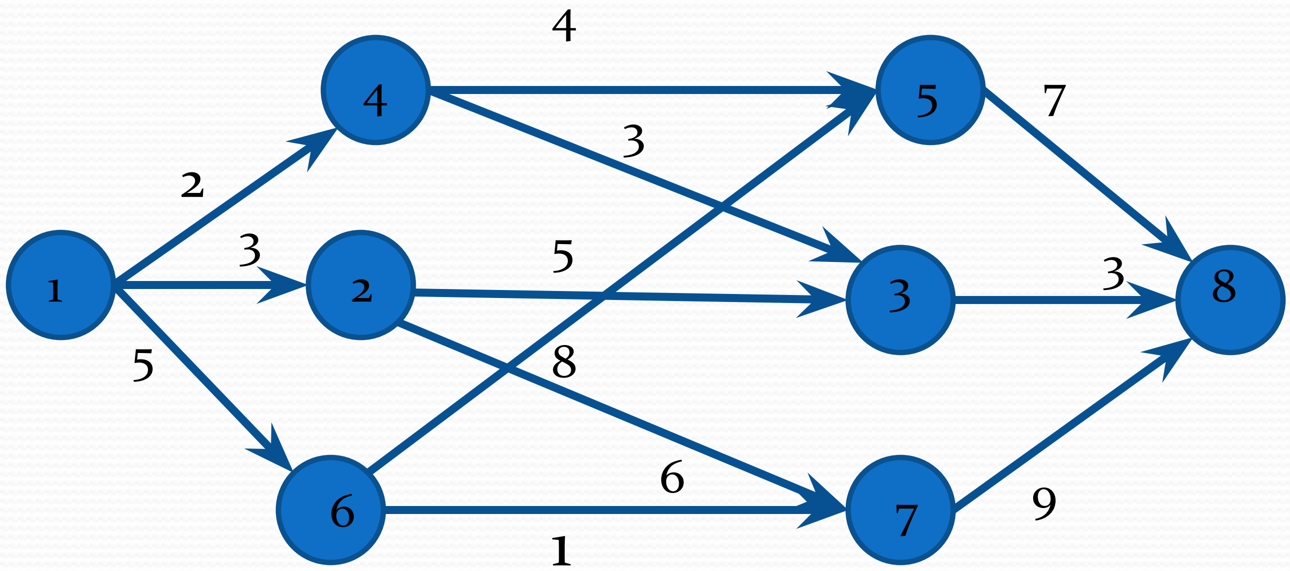
Пример 3



Максимальный поток F из 1-й вершины в 6-ю равен двум, но вышеприведенный алгоритм покажет F = 1 (на графе этот поток выделен красным цветом).

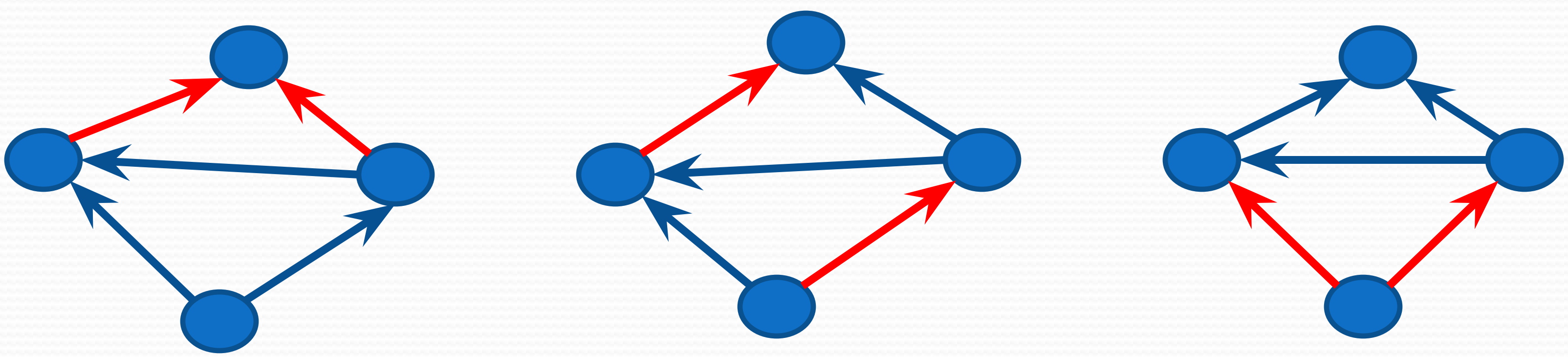
САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Сформулировать достоинства и недостатки алгоритма поиска максимального потока.
2. Определить максимальный поток из источника в сток на графе G(X,U):



МИНИМАЛЬНЫЕ РАЗРЕЗЫ НА ГРАФАХ

- **Определения:**
- 1. Разрезом на ориентированном графе G(X, U) называется подмножество дуг, удаление которых разрывает все пути из источника в сток.
- 2. Минимальным разрезом на взвешенном ориентированном графе G(X, U) называется разрез, суммарный вес дуг которого минимален.



- Варианты разрезов вверху выделены красным цветом

Обозначения и определения

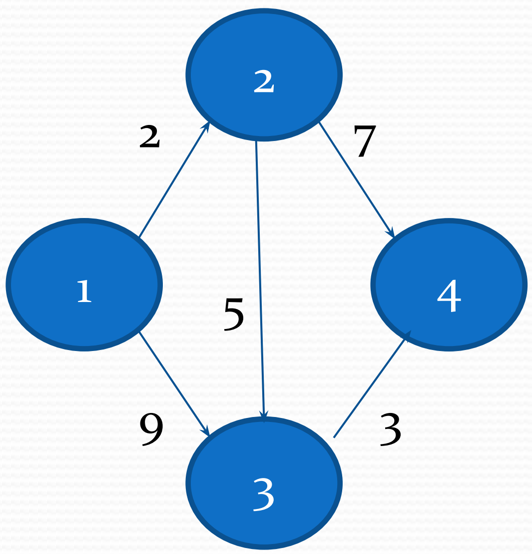
- *Z(i,j)* – булева переменная, равная единице, если дуга *(i,j)* принадлежит минимальному разрезу и равная нулю в противном случае.
- $L^d(s,t)$ - множество дуг, принадлежащих d-у пути, ведущему из вершины-источника x_s в вершину-сток x_t.

Формальная постановка задачи о минимальном разрезе

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i}\sum\limits_{j} r(i,j)z(i,j) \to \min; \\
\forall d: \quad \sum\limits_{(i,j)\in L^{d}(s,t)} z(i,j) \ge 1; \\
\forall i, \forall j \ne i : z(i,j) = 1{,}0.
\end{cases}
$$

Поиск минимального разреза перебором

- Граф G(X,U)



(1,3)	(2,4)	(1,2)	((3,4)	(2,3)	R
0	0	0	0	1	∝
0	0	0	1	0	∝
0	0	0	1	1	∝
0	0	1	0	0	∝
0	0	1	0	1	∝
0	0	1	1	0	5
0	0	1	1	1	10

ТЕОРЕМА ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА

- Величина минимального разреза на взвешенном ориентированном графе равна величине максимального потока.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Пользуясь теоремой Форда-Фалкерсона определить величину минимального разреза на графе G(X,U):