

Задачи нахождения кратчайшего пути

Определения

- Пусть дан ориентированный взвешенный граф $G = \langle V, E \rangle$ с весовой функцией $w: E \rightarrow R$

Весом пути $p = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ называется сумма весов ребер, входящих в этот путь:

$$w(p) = \sum_{i=1}^n w(v_{i-1}, v_i)$$

Определения

Вес кратчайшего пути из u в v равен

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \rightarrow v\} & \text{если существует} \\ \infty, \text{ иначе} & \text{путь из } u \text{ в } v \end{cases}$$

Определения

Кратчайший путь из u в v – это любой путь p из u и v , для которого

$$w(p) = \delta(u, v)$$

Варианты задач о кратчайшем пути

- Кратчайший путь из одной вершины:
Дан взвешенный граф $G = \langle V, E \rangle$
и начальная вершина s .
Требуется найти кратчайшие пути из s во все вершины $v \in V$
- Кратчайшие пути в одну вершину:
Дана конечная вершина t .
Требуется найти кратчайшие пути в t
из всех вершин $v \in V$

Варианты задач о кратчайшем пути

- Кратчайший путь между парой вершин:
Даны вершины u и v .
Требуется найти кратчайший путь из u в v
- Кратчайшие пути для всех пар вершин:
Для каждой пары вершин u и v
найти кратчайший путь из u в v

Варианты задач о кратчайшем пути

- Часто в задачах бывает необходимо найти не только кратчайший путь, но и сам путь.
- Для каждой вершины v будем помнить ее предшественников $\mathbf{p}(v)$

Свойства кратчайших путей

■ Лемма 1. (отрезки кратчайших путей являются кратчайшими)

Пусть дан ориентированный взвешенный граф $G = \langle V, E \rangle$

с весовой функцией $w: E \rightarrow R$

Если $p(v_1, v_2, \dots, v_k)$ – кратчайший путь из v_1 в v_k и $1 \leq i \leq j \leq k$, то

$p_{ij} = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$ – кратчайший путь из v_i в v_j

Свойства кратчайших путей

- Следствие 1

Пусть дан ориентированный взвешенный граф $G = \langle V, E \rangle$

с весовой функцией $w: E \rightarrow R$

Рассмотрим кратчайший путь p из s в v .

Пусть $u \rightarrow v$ – последнее ребро этого пути.

Тогда

$$\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$$

Свойства кратчайших путей

- Лемма 2

Пусть дан ориентированный
взвешенный граф $G = \langle V, E \rangle$

с весовой функцией $w: E \rightarrow R$

Пусть $s \in V$

Тогда для всякого ребра $(u, v) \in E$

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$$

Релаксация

- Для каждого ребра $v \in V$ будем хранить некоторое число $d[v]$, являющееся верхней оценкой веса кратчайшего пути из вершины s в v (*оценка кратчайшего пути*)

Релаксация

- Начальное значение оценки кратчайшего пути и массива π определяется следующим образом:
- ***Initialize(G,s)***

Для всех вершин $v \in V$

$$d[v] = \infty$$

$$\pi[v] = \text{NULL}$$

$$d[s] = 0$$

Релаксация

Релаксация ребра (u, v) состоит в следующем:

Значение $d[v]$ уменьшается до

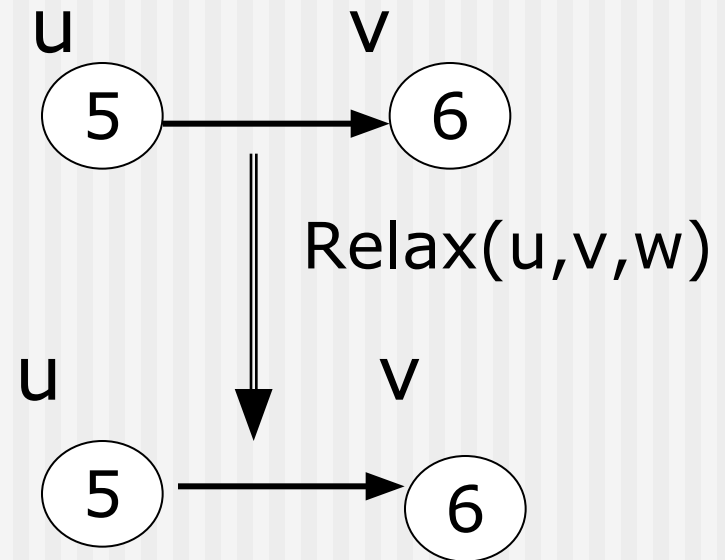
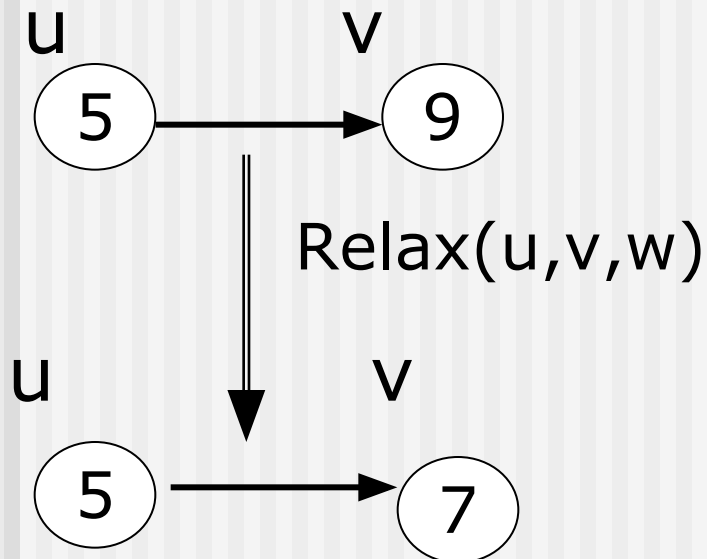
$d[u] + w(u, v)$, если

второе значение меньше первого

При этом $\pi(v) = u$

Relax(u,v,w)

If ($d[v] > d[u] + w(u,v)$)
 $d[v] = d[u] + w(u,v)$
 $\pi[v] = u$



В вершинах указаны оценки кратчайшего пути

Алгоритм Дейкстры

- Решает задачу о кратчайших путях из одной вершины s графа $G = \langle V, E \rangle$ с весовой функцией w до всех остальных вершин графа.
- Веса всех ребер неотрицательны

Алгоритм Дейкстры

- Алгоритм строит множество S вершин v , для которых кратчайшие пути до вершины s уже известны, т. е. $d[v] = \delta(s, v)$
- На каждом шаге к множеству S добавляется та из оставшихся вершин u , для которой $d[u]$ имеет наименьшее значение
- После этого проводится релаксация всех ребер, выходящих из u

Алгоритм Дейкстры

- Вершины, не лежащие в множестве S , хранятся в очереди с приоритетами, определяемыми значениями функции d .
- Пусть граф представлен списками смежности
 $Adj[u]$ – список смежных вершин u
 Q – очередь с приоритетами

Алгоритм Дейкстры

- Initialize(G, s)

$S = \emptyset$

$Q = V[G]$

while $Q \neq \emptyset$

do $u = \min(Q)$ – выбираем вершину с наименьшим значением $d[u]$

$S = S \cup \{u\}$

for для всех вершин $v \in \text{Adj}[u]$

do Relax(u, v, w)